Université A. Mira-Béjaia
Faculte des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Département MIAS

Examen Final : Analyse 2

Juin 2006

Exercice 1. *(05 points) :*

1. *Décomposition en éléments simples :*
   Determiner A, B et C telle que : $\frac{3}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$
2. *Calculer* $I = \int \frac{3}{x^3+1}\,dx$
3. *Déduire* $I = \int_0^1 \frac{3}{x^3+1}\,dx$

Exercice 2. *(04 points) :*
Soit f *la fonction définie sur* $[0,3]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ 3 & si \quad x = 1 \\ -2 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ 4 & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

1. *Calculer* $I = \int_0^3 f(t)\,dt$
   Ind : utiliser la subdivision $d = \{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$ *de l'intervalle* $[0,3]$.
2. *Soit* $x \in [0,3]$, *calculer* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

Exercice 3. *(05 points) :*
On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$y' + y\tan x = \sin x \cos x \tag{E1}$$

1. *Résoudre l'équation homogène (sans second membre) associée à (E1)*
2. *En utilisant la méthode de la variation de la constante, trouver une solution particulière de (E1) puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E1).*
3. *Calculer la solution de (E1) vérifiant* $y(\frac{\pi}{4}) = 0$

Université A. Mira-Béjaia
Faculte des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Département MIAS

Analyse 2 : Le corrigé

Exercice 1. *(05 points) :*

1. *Décomposition en éléments simples :*
   Après identification on trouve $A = 1$, $B = -1$ *et* $C = 2$ *c'est à dire :*
   $\frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}$
2. $I = \int \frac{3}{x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1}\right) dx$
   $\frac{-x+2}{x^2-x+1} = -(\frac{1}{2})\frac{2x-1}{x^2-x+1} + (\frac{3}{2})\frac{1}{x^2-x+1}$
   Finalement, on obtient :
   $I = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1) + C$
3. *D'ou* $I = \int_0^1 \frac{3}{x^3+1}\,dx = \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = 2.5069$

Exercice 2. *(04 points) :*
Soit f *la fonction définie sur* $[0,3]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < 1 \\ 3 & si \quad x = 1 \\ -2 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ 4 & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

1. *La fonction* f *est bornée sur* $[0,3]$, $d = \{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$ *une subdivision de* $[0,3]$ *de pas constant* $h = x_{k+1} - x_k = 1$
   La somme de Darboux inférieure $s(f,d) = \sum_{k=0}^{2} m_k(x_{k+1} - x_k)$ *avec* $m_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$
   La somme de Darboux supérieure $S(f,d) = \sum_{k=0}^{2} M_k(x_{k+1} - x_k)$ *avec* $M_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$
   Le sup *et* inf *sont atteint et égaux pour la subdivision* d *et toute subdivision plus fine.*
   D'ou $s(f,d) = S(f,d) = 1 + (-2) + 4 = 3$, *donc* f *est intégrable au sens de Riemann sur* $[0,3]$ *de plus* $I = \int_0^3 f(t)\,dt = s(f,d) = S(f,d) = 3$
   Remarque : La valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est à dire les valeurs de f *en* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ *et* $x_3 = 3$ *n'ont aucune influence sur le calcul de* I.
   N.B : On peut aussi utiliser le théorème de Riemann-Darboux.

2. *de même que précédemment, au lieu d'intégrer jusqu'à 3 on s'arrête à x ; Soit*

$$F(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3-2x & si \quad 1 < x \leq 2 \\ -9+4x & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Exercice 3. *(05 points) :*

1. *Soit*

$$y' + y\tan x = \sin x \cos x \tag{E1}$$

L'équation homogène associée à (E1) est

$$y' + y\tan x = 0 \tag{H1}$$

de solution $y_h = C\cos x$, avec $C = e^k$, k constante arbitraire.

2. *Méthode de la variation de la constante :*
$y = C(x)\cos x \Longrightarrow y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$
En remplaçant y et y' dans (E1), on trouve $C'(x) = \sin x \Rightarrow C(x) = -\cos x + \lambda$
D'ou la solution particulière de (E1) est

$$y_p = -\cos^2 x = -\tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2}$$

La solution générale de (E1) est

$$y_g = \lambda\cos x - \cos^2 x = \lambda\cos x - \tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2}$$

3. *En remplaçant x par $\frac{\pi}{4}$, la résolution de $y_g(\frac{\pi}{4}) = 0$ donne $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc :*

$$y_c = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \cos^2 x$$

Exercice 4. *(06 points) :*

1. *$(E2)$: $y'' + y = \sin^2 x$ est une équation différentielle linéaire du second ordre*
$(H2)$: $y'' + y = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à $(E2)$ d'équation caractéristique $k^2 + 1 = 0 \Longrightarrow k_{1,2} = \pm i$
D'ou, on tire la solution générale de l'équation homogène $(H2)$:

$$y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$$

2. *Résolution de (E2)*

1ere **méthode : variation des constantes** .

$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x \Rightarrow y'(x) = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$

Avec la condition : $C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$

$y''(x) = -C_1'(x)\sin x - C_1(x)\cos x + C_2'(x)\cos x - C_2(x)\sin x$

En remplacant dans $(E2)$*, on trouve :* $-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \sin^2 x$

Le système (S) *d'inconnues* C_1' *et* C_2'

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x & = & 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x & = & \sin^2 x \end{array}\right.$$

admet comme solution : $\Big(C_1'(x) = -\sin^3 x\ ,\ C_2'(x) = \cos x \sin^2 x\Big)$

En intégrant, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} C_1(x) = \int \big(1-\cos^2 x\big)d(\cos x) = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + k_1 = \frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos x + k_1 \\ C_2(x) = \int \big(\sin^2 x\big)d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + k_2 = \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{12}\sin(3x) + k_2 \end{array}\right.$$

D'où, la solution particulière de (E2)

$$y_p = \frac{1}{6}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

Et la solution générale de (E2)

$$y_G = y_h + y_p = k_1\cos x + k_2\sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)$$

2^{ieme} **méthode : Linéarisation** .

On linéarise $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$

La résolution de l'équation différentielle $E(2)$ *revient à résoudre le système :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'' + y & = & \frac{1}{2} \\ y'' + y & = & \frac{\cos(2x)}{2} \end{array}\right.$$

L'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{2}$ *a pour solution particulière*

$$y_{p1} = \frac{1}{2}$$

L'équation différentielle $y'' + y = -\frac{\cos(2x)}{2}$ *a pour solution particulière*

$$y_{p2} = \frac{cos(2x)}{6}$$

D'où la solution générale de (E2)

$$y_G = y_h + y_{p1} + y_{p1} = k_1\cos x + k_2\sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)$$

3. *Avec les conditions initiales* $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ *et* $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$*, on determine les constantes* $k_1 = -1$ *et* $k_2 = -\frac{1}{3}$*. D'où la solution unique du problème de Cauchy*

$$y_c = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cos(2x)$$

Exercice 4. *(06 points) :*
On considère l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin^2 x \tag{E2}$$

1. *Résoudre l'équation différentielle homogène (sans second membre) associée à (E2)*
2. *Trouver une solution particulière de (E2) puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E2).*
3. *Determiner la solution unique y_c de (E2) verifiant $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $y'(\frac{\pi}{2}) = 1$*