L2-MI 20 janvier 2010

Examen final d'Analyse 2

Durée 2h. Les documents et calculatrices électroniques ne sont pas autorisés. Les réponses devront toujours être justifiées, même succinctement.

Exercice 1.

a) Prouver la convergence et donner la limite de la suite de terme général $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq e$. Discuter suivant la valeur de a la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{a^n\, n!}$.

Exercice 2. Soit b un nombre réel.

a) Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de $u_n = e^{b/n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$ (on discutera suivant la valeur du paramètre b).

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \frac{u_n}{\ln n}$. Déduire de ce qui précède la nature de la série Σv_n (là encore discuter selon la valeur de b).

c) Justifier la convergence *pour tout réel* b de la série $\Sigma(-1)^n v_n$.

Exercice 3. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$.

a) Étudier la nature de la suite de terme général u_n lorsque $|x| > 1$. En déduire la nature de la série Σu_n.

b) Montrer que si $|x| < 1$, la série Σu_n est absolument convergente.

c) Étudier la convergence et l'absolue convergence de Σu_n quand $x = 1$ et quand $x = -1$.

Exercice 4. Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes, en précisant en quel(s) point(s) elles sont impropres.

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t\,, \qquad J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2}\,\mathrm{d}t\,, \qquad J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|^{3/2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5.

a) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(t+1)}$. Calculer pour $x > 1$ $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t\,(t+1)}$, puis en déduire la valeur de I.

b) Justifier la convergence puis faire le calcul de l'intégrale impropre $J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Justifier la convergence puis faire le calcul de l'intégrale impropre $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$ (on pourra faire le changement de variable $u = e^t$).

Corrigé de l'examen final d'Analyse 2

Exercice 1

a) On a une forme indéterminée 1^∞, il faut donc passer par le logarithme

$$\ln z_n = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-o(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

par conséquent z_n tend vers $e = e^1$ quand n tend vers l'infini.

b) En appliquant le critère de d'Alembert, il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{a\,(n+1)\,n^n} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{a}$$

d'après la question (a). Le critère s'applique car $a \neq e$: si $a < e$ la série diverge, si $a > e$ elle converge.

Exercice 2

a) En utilisant un développement limité en 0 à l'ordre 2 de exp et ln :

$$u_n = 1+\frac{b}{n}+\frac{b^2}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2\,n^2}-1+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{b-1}{n}+\frac{b^2+1}{2\,n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

on a donc : si $b \neq 1$, $u_n \sim \frac{b-1}{n}$ et si $b = 1$, $u_n \sim \frac{b^2+1}{2\,n^2} = \frac{1}{n^2}$.

b) Si $b \neq 1$, $v_n \sim \dfrac{b-1}{n \ln n}$, terme général d'une série divergente, donc Σv_n diverge ; tandis que si $b = 1$, $v_n \sim \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ terme général d'une série convergente, donc Σv_n converge (séries de Bertrand).

c) La série $\Sigma(-1)^n\, v_n$ est somme de la série $\Sigma(-1)^n\, \frac{b-1}{n \ln n}$ et d'une série de terme général $w_n = (-1)^n\left(v_n - \frac{b-1}{n \ln n}\right)$. La première converge par le théorème des séries alternées, et la deuxième converge absolument car $|w_n| \sim \frac{b^2+1}{n^2 \ln n}$.

Exercice 3

a) L'exponentielle l'emportant sur la puissance de n, $|u_n| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ (car $|x| > 1$). Donc u_n diverge, en changeant de signe si $x < 0$. La série Σu_n ne peut évidement pas converger puisque son terme général ne tend pas vers 0.

b) Le critère de d'Alembert s'applique à $|u_n|$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x|\sqrt{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow |x| \text{ et } |x| < 1$$

donc la série est absolument convergente et donc convergente.

c) Le cas $x = \pm 1$ est celui où d'Alembert ne s'applique pas. Si $x = 1$, on retrouve une série de Riemann $\Sigma\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (et $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$), qui est divergente car l'exposant est 1/2 ; par contre si $x = -1$ on a une série $\Sigma\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ qui est convergente par le théorème des séries alternées (puisque $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ décroît vers zéro).

Exercice 4

I est impropre en 0 ; en 1 c'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ical. En zéro, $\frac{\ln t}{t-1} \sim -\ln t$ or on sait que $\ln t$ est intégrable en zéro. En 1, on pose $t = 1-\varepsilon$, avec $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\ln t}{t-1} = -\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{-\varepsilon + o(\varepsilon)}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$$

et la forme indéterminée se révèle finalement bornée (et même continue) ; il n'y donc pas de problème en $t = 1$ et l'intégrale est convergente.

J_1 et J_2 sont impropres en 0 et $+\infty$. En $+\infty$, les deux fonctions sont majorées par $1/t^2$ car $|\sin t| \leqslant 1$, et $1/t^2$ est convergent en $+\infty$. En 0, on prend l'équivalent $\sin t \sim t$:

$$\frac{|\sin t|}{t^2} \sim \frac{1}{t} \text{ (non convergent en 0) }, \quad \frac{|\sin t|^{3/2}}{t^2} \sim \frac{t^{3/2}}{t^2} = \frac{1}{t^{1/2}} \text{ (convergent en 0).}$$

On conclut donc que J_1 est divergente tandis que J_2 converge.

Exercice 5

a) L'intégrale I est impropre en $+\infty$ seulement, et $\frac{1}{t(t+1)} \sim \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable (critère de Riemann) donc I converge. En décomposant en éléments simples $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = [\ln t - \ln(t+1)]_1^x = \ln\frac{x}{x+1} - \ln\frac{1}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2$$

par conséquent

$$I = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \ln 2.$$

b) L'intégrale J est impropre en $+\infty$ et on peut majorer ainsi

$$\frac{\ln(t+1)}{t^2} = \frac{\ln(t+1)}{t^{1/2}} \frac{1}{t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \text{ car } \frac{\ln(t+1)}{t^{1/2}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

comme $1/t^{3/2}$ est intégrable en $+\infty$, on a par comparaison que J converge. Pour la calculer utilisons l'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t^2} \mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln(t+1)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} \\ &= \ln 2 - \frac{\ln(x+1)}{x} + \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln 2 + I = \ln 4 \end{aligned}$$

donc $J = \ln 4$.

c) Comme $\dfrac{e^t}{e^{2t}+1} \sim e^{-t}$ en $+\infty$, l'intégrale K est convergente. Posons alors le changement de variable $u = e^t$, donc $\mathrm{d}u = e^t\,\mathrm{d}t$:

$$K = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = [\arctan u]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$