Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques /M.I

26/09/2012
Durée : 2H

Examen de Rattrapage d'Analyse II

Appareils électroniques et documents sont interdits.
Il est conseillé de lire l'intégralité du sujet avant de commencer à répondre.

Exercice 1. *(04 pts) Soit f une fonction définie sur $[0,2]$*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \in [0,1[, \\ 2-x & si\ x \in [1,2]. \end{cases}$$

1) Montrer que f est intégrable sur $[0,2]$.

2) Calculer $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Exercice 2. *(06 pts) Calculer les intégrales suivantes*

$$\int \frac{1-x}{x^2}\, e^x dx, \quad \int \frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos^2 x} dx.$$

Exercice 3. *(06 pts) Soit l'équation différentielle suivante*

$$(x^2-3x+2)y' - y^2 + 3xy = 4x^2 - 6x + 4 \qquad (E)$$

1) De quel type est l'équation (E)?

2) Montrer que $y = 2x$ est une solution particulière de l'équation (E).

3) Résoudre l'équation (E) sur $]2,+\infty[$.

Exercice 4. *(04 pts) On considère l'équation*

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E_1)$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E_1).

2) Trouver une solution particulière de (E_1), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E_1).

3) Déterminer l'unique solution h de (E_1) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

Bon courage

Corrigé d'Analyse II

Solution 1.

On a

$$f \text{ est continue } [0,2] \Longrightarrow f \text{ est intégrable sur } [0,2].$$

1) Etude de la continuité de f sur $[0,2]$

a) La continuité Sur $[0,1[$. *La fonction f est continue sur $[0,1[$ (car f est un polynôme)*

b) La continuité Sur $]1,2]$. *La fonction f est continue sur $]1,2]$ (car f est un polynôme)*

c) La continuité en $x=1$. *On a*

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = f(1) = 1,$$

donc f est continue en $x=1$. D'où f est continue sur $[0,2]$, donc f est intégrable sur $[0,2]$.

2)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}.$$

Solution 2.

a) *On pose $I = \int \frac{1-x}{x^2}\, e^x dx$. On a*

$$I = \int \frac{e^x}{x^2}\, dx - \int \frac{e^x}{x}\, dx,$$

on intègre par parties $\int \frac{e^x}{x^2}\, dx$. Posons $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g(x) = e^x$, donc $f(x) = -\frac{1}{x}$ et $g(x) = e^x$.

$$\int \frac{e^x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}e^x + \int \frac{e^x}{x}\, dx,$$

on remplace $\int \frac{e^x}{x^2}\, dx$ par $-\frac{1}{x}e^x + \int \frac{e^x}{x}\, dx$ dans I et on obtient

$$I = -\frac{1}{x}e^x + \left(\int \frac{e^x}{x}\, dx - \int \frac{e^x}{x}\, dx\right) = -\frac{1}{x}e^x + k \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

b) *On pose $J = \int \frac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$.*

$$J = \int \frac{\sin x + 2\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{1+2\cos x}{1+\cos^2 x} \sin x dx,$$

pour calculer cette intégrale on pose $t = \cos x$

$$t = \cos x \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = -\sin x \Leftrightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow \sin x dx = -dt,$$

donc

$$J = -\int \frac{1+2t}{1+t^2} dt = -\left(\int \frac{dt}{1+t^2} + \int \frac{2t}{1+t^2} dt\right) = -Arc\tan t - \ln\left(1+t^2\right) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$J = -Arc\tan(\cos x) - \ln\left(1+\cos^2 x\right) + C, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution 3.

1) L'équation (E) est de ***Riccati***

2) On a $y = 2x \Longrightarrow y' = 2$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)2 - 4x^2 + 6x^2 = 4x^2 - 6x + 4\\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 4 = 4x^2 - 6x + 4.\end{aligned}$$

3) La résolution de l'équation (E).

On pose $y = z + 2x \Rightarrow y' = z' + 2$. En remplaçant dans E, on obtient

$$(x^2 - 3x + 2)z' - z^2 - xz = 0 \ (F).$$

L'équation (F) est de ***Bernoulli.***

On divise l'équation (F) par z^2,on obtient

$$(x^2 - 3x + 2)z'z^{-2} - 1 - xz^{-1} = 0 \ (F_1)$$

puis on pose $t = z^{-1}$

$$t = z^{-1} \Longrightarrow z = t^{-1} \Longrightarrow z' = -\frac{t'}{t^2} \Longrightarrow z'z^{-2} = -t'.$$

En remplaçant z^{-1} par t et $z'z^{-2}$dans (F_1), on obtient

$$(x^2 - 3x + 2)t' + xt = -1 \ (F_2).$$

(F_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre

La solution générale de l'équation (F_2) ***sans second membre***

$$(x^2 - 3x + 2)t' + xt = 0 \ (F_3)$$

$$\begin{aligned}(F_3) &\Longleftrightarrow (x^2 - 3x + 2)\frac{dt}{dx} = -xt \Longleftrightarrow \frac{dt}{t} = \frac{-x}{x^2 - 3x + 2}dx\\ &\Longleftrightarrow \ln|t| = \int \frac{-x}{x^2 - 3x + 2}dx = \int \frac{-x}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x-2}\\ &= \ln|x-1| - 2\ln|x-2| + C = \ln\left(\frac{|x-1|}{(x-2)^2}\right) + C, \ \text{où } C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

d'où

$$t_0 = C\frac{x-1}{(x-2)^2}, \ \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de (F_2)

On utilise la variation de la constante, on pose

$$t_p = C(x)\frac{x-1}{(x-2)^2}.$$

On remplace t par $C(x)\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$ dans l'équation (F_2) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(x-1)^2}{(x-2)}C' = -1 &\Longrightarrow C' = -\frac{(x-2)}{(x-1)^2}\\ &\Longrightarrow C(x) = -\int \frac{(x-2)}{(x-1)^2}dx = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}\\ &= -\ln|x-1| + \left(-\frac{1}{x-1}\right) + C.\end{aligned}$$

$$t_p = \left(-\ln|x-1| + \left(-\frac{1}{x-1}\right)\right)\left(\frac{x-1}{(x-2)^2}\right),$$

alors la solution générale de (F_2) *est*

$$t = C\frac{x-1}{(x-2)^2} + t_p, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

La solution générale de (F)

$$z = \frac{1}{C\dfrac{x-1}{(x-2)^2} + t_p}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

D'où la solution générale de (E) *est*

$$y = \frac{1}{C\dfrac{x-1}{(x-2)^2} + t_p} + 2x, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution 4.

1) La solution générale de l'équation sans second membre

L'équation caractéristique associée à (E_1) *est*

$$r^2 + 2r + 4 = 0.$$

On a $\Delta' = -3 < 0$, *donc l'équation admet deux racines complexes* $r_1 = -1 - i\sqrt{3}$ *et* $r_2 = -1 + i\sqrt{3}$.
D'où la solution générale de l'équation différentielle homogène est

$$y_0(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right) \text{ où } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) La solution particulière de l'équation (E_1).

Le second membre est de la forme $Q(x)\,e^{\alpha x}$ *avec* $\alpha = 1$ *et* $Q(x) = x$.
1 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique donc* $y_p = (ax+b)\,e^x$. *On cherche* a *et* b.

$$\begin{aligned} y_p = (ax+b)\,e^x &\Leftrightarrow y_p' = ae^x + (ax+b)\,e^x \\ &\Leftrightarrow y_p'' = 2ae^x + (ax+b)\,e^x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 4y_p = xe^x &\Leftrightarrow 2ae^x + (ax+b)\,e^x + 2ae^x + 2(ax+b)\,e^x + 4(ax+b)\,e^x = xe^x \\ &\Leftrightarrow (7ax + 4a + 7b)\,e^x = xe^x. \end{aligned}$$

On trouve après identification des coefficients

$$a = \frac{1}{7} \text{ et } b = -\frac{4}{49}.$$

D'où

$$y_p = \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x.$$

La solution générale de l'équation (E_1) ***est***

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right) + \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x, \text{ où } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}.$$

3) *Soit* h *une solution de* (E_1), *vérifiant* $h(0) = 1$ *et* $h(1) = 0$. *Posons*

$$h(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right) + \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x, \text{ où } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R},$$

puis on cherche les valeurs de C_1 *et* C_2.

$$h(0) = 1 \text{ et } h(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 = \frac{53}{49} \text{ et } C_2 = -\frac{53\cos\sqrt{3} + 3e^2}{49\sin\sqrt{3}}.$$