UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

Année universitaire 2013/2014
(19 juin 2014)
Durée: 1h30
Section SMP/S4

MÉCANIQUE QUANTIQUE
2ème Contrôle

==============

I. Questions de cours (8 points)

1) On considère l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions d'ondes et soit $\{u_i(\vec{r})\}$ la base discrète de $\mathcal{F}$.

a) Ecrire la relation de fermeture.

b) Récrire cette relation dans l'espace ξ des états généré par les kets $|u_i\rangle$.

c) Montrer que l'on peut passer de l'une à l'autre. On montrera le passage dans les deux sens à savoir : a) donne b) et b) donne a).

2) Montrer que :

a) Les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles.

b) L'état d'un système conservatif à un instant t est décrit par le ket :

$$|\Psi_t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H.t}\,|\Psi_{t=0}\rangle \quad \text{où H est l'hamiltonien du système.}$$

3) a) Rappeler la relation donnant l'évolution dans le temps de la valeur moyenne d'une grandeur représentée par l'observable A.

b) Soient A et B deux observables quelconques, Démontrer la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\langle A.B\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle A[B,H]\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]B\rangle + \langle A.\frac{\partial B}{\partial t}\rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t}.B\rangle$$

(Ici, grandeurs physiques et observables sont notées par les mêmes lettres).

II. Grandeur physique associée à un système conservatif (12 points)

On considère un système physique dont l'hamiltonien H possède deux vecteurs propres $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$ associés aux valeurs propres E_1 et E_2 respectivement.

Dans cette base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$, un opérateur A est défini par :

$$A|u_1\rangle = a\,e^{i\alpha}|u_2\rangle \quad \text{et} \quad A|u_2\rangle = a\,e^{-i\alpha}|u_1\rangle$$

avec a et α des constantes réelles positives.

1) a) L'opérateur A est-il hermitique ?

b) Calculer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A ($\lambda_1 > \lambda_2$) ainsi que les kets propres correspondants $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ normés à l'unité.

2) Le système est supposé dans l'état $|u_1\rangle$ et on effectue une mesure de la grandeur $\mathcal{A}$ représentée par A.

a) Quels sont les résultats possibles de cette mesure?

b) Quelles sont les probabilités correspondantes?

3) Le système étant toujours dans l'état $|u_1\rangle$ et on suppose qu'à l'instant t=0, le résultat de la mesure de la grandeur $\mathcal{A}$ représentée par A est λ_1, quel est l'état du système immédiatement après cette mesure ?

4) Après la mesure précédente, on laisse évoluer librement le système jusqu'à l'instant t.

a) Déterminer l'état $|\Psi_t\rangle$ du système à l'instant t ?

b) Quelles sont les probabilités de mesure de $\mathcal{A}$ à cet instant. Ecrire les résultats sous la forme de :

$$\mathcal{P}_t(\lambda_1) = a_1 \cos^2(\omega t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_t(\lambda_2) = a_2 \sin^2(\omega t)$$

où a_1, a_2 et ω sont des constantes réelles à déterminer.

c) En déduire la valeur moyenne de $\mathcal{A}$ à l'instant t et montrer qu'elle s'écrit :

$\langle \mathcal{A} \rangle_t = a_3 \cos\Omega t$ où a_3 et Ω sont des constantes réelles à déterminer.

5) En représentation position [x], les états $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$ correspondent aux fonctions $u_1(x)$ de l'état fondamental et $u_2(x)$ du premier état excité. Donner les expressions $\Psi_0(x)$ et $\Psi_t(x)$ relatives aux états $|\Psi_{t=0}\rangle$ et $|\Psi_t\rangle$.

On donne : $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

<u>Barème</u> :

I (8 points) : 1) 3pts ; 2)3,5pts ; ~~3) 2pts~~ ; 3) 1,5pts

II (12 points): 1) 2pts ; 2) 1,5pts ; 3) 1,5pts ; 4) 5,5pts ; 5) 1,5pts

Corrigé Contrôle 2

I. 1°) $\{u_i(\vec{r})\}$ base discrète de $\mathcal{F}$, $\{|u_i\rangle\}$ base discrète dans $\mathcal{E}$

0,5 a) R.F. : $\sum_i u_i(\vec{r})\, u_i^*(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ → dans $\mathcal{F}$ (a)

0,5 b) R.F. : $\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$ → dans $\mathcal{E}$ (b)

0,25

c) Sachant que $u_i(\vec{r}) = \langle\vec{r}|u_i\rangle$ et que :

0,25 $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \iiint d^3r_0\, \delta(\vec{r}_0-\vec{r})\,\delta(\vec{r}_0-\vec{r}\,') = (\delta_{\vec{r}}, \delta_{\vec{r}\,'}) = \langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle$

(a) $\Rightarrow \sum_i \langle\vec{r}|u_i\rangle\langle u_i|\vec{r}\,'\rangle = \langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle$

$\Rightarrow \langle\vec{r}|\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\vec{r}\,'\rangle = \langle\vec{r}|\mathbb{1}|\vec{r}\,'\rangle$

Donc $\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = \mathbb{1}$ (= relation (b))

De m̂ si on part de (b), on peut écrire :

$\langle\vec{r}|\sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\vec{r}\,'\rangle = \langle\vec{r}|\mathbb{1}|\vec{r}\,'\rangle$

$\Rightarrow \sum_i \langle\vec{r}|u_i\rangle\langle u_i|\vec{r}\,'\rangle = \langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle$

$\Rightarrow \sum_i u_i(\vec{r})\, u^*(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ (= relation (a)).

2°) a) $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \lambda = \dfrac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$

1

- $\langle\psi|\psi\rangle = (\text{Norme})^2$ de $|\psi\rangle$ donc nombre réel.
- $\langle\psi|A^+|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle^*$ par définition de A^+

et $\langle\psi|A^+|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$ puisque A est hermitique ($A = A^+$)

$\Rightarrow \langle\psi|A|\psi\rangle$ est réel

Donc λ est réelle.

b) $|\psi_{t=0}\rangle \xrightarrow{U(t)} |\psi_t\rangle \overset{0{,}25}{=} U(t)|\psi_{t=0}\rangle$ (transformation linéaire) 2/4

Schrödinger : $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_t\rangle \overset{0{,}25}{=} H(t)|\psi_t\rangle$ avec $H(t) = H$ car système conservatif

$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} U|\psi_{t=0}\rangle = H U|\psi_{t=0}\rangle \Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} U = HU$ 0,5

$\Rightarrow \frac{dU}{U} = -\frac{i}{\hbar} H\, dt \longrightarrow U(t) = C\, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ avec $C = U(t=0)$ 0,5

or à $t=0$ on a : $|\psi_{t=0}\rangle = U(t_0)|\psi_{t=0}\rangle \Rightarrow U(t=0) = \mathbb{1}$ 0,5

soit $|\psi_t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi_{t=0}\rangle$

3°) a) 0,5 $\frac{d\langle A\rangle_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t}\rangle$

b) 1 $\frac{d\langle AB\rangle_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [AB,H]\rangle + \langle \frac{\partial AB}{\partial t}\rangle$

avec $[A.B,H] = A[B,H] + [A,H]B$

et $\frac{\partial AB}{\partial t} = A\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t}\cdot B$

$\Rightarrow \frac{d\langle AB\rangle_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle A[B,H]\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]B\rangle + \langle A\frac{\partial B}{\partial t}\rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t}\cdot B\rangle$

II

a) $(A) = a\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ Les éléments diagonaux sont réels, les non diagonaux sont conjugués l'un de l'autre $A_{12} = A_{21}^*$.

(0,5) $\Rightarrow$ A est hermitique.

b) $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = -a$ (0,5)

$\vec{vp}$: à λ_1 est associé $|\varphi_1\rangle = C_1|u_1\rangle + C_2|u_2\rangle$

$A|\varphi_1\rangle = \lambda_1|\varphi_1\rangle \Rightarrow C_1 = C_2 e^{-i\alpha}$, c. Normal. $\Rightarrow |C_2| = 1/\sqrt{2}$

soit $|\varphi_1\rangle = \dfrac{e^{-i\alpha}|u_1\rangle + |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$ à un facteur de phase global près (0,5)

à λ_2 est associé le $\vec{vp}$: $|\varphi_2\rangle$ tel que $C_1 = -C_2 e^{-i\alpha}$

soit $|\varphi_2\rangle = \dfrac{e^{-i\alpha}|u_1\rangle - |u_2\rangle}{\sqrt{2}}$ à un facteur de phase global près (0,5)

2) L'état du système est décrit par $|u_1\rangle$ $\vec{vp}$ de H associé à E_1

a) Postulat : La mesure de A donnerait l'une des vp de A (0,5) à savoir a ou $-a$

b) avec $\mathcal{P}(a) = |\langle\varphi_1|u_1\rangle|^2 = 1/2$ (0,5) et $\mathcal{P}(-a) = |\langle\varphi_2|u_1\rangle|^2 = 1/2$ (0,5)

3) Postulat : immédiatement après la mesure, l'état du système est

$|\phi\rangle = \dfrac{P|u_1\rangle}{\sqrt{\langle u_1|P|u_1\rangle}}$ (0,5) avec $P = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|$ opérateur projecteur correspondant au $\vec{vp}$ associé au résultat de la mesure (λ_1)

$\Rightarrow P|u_1\rangle = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|u_1\rangle = \dfrac{e^{-i\alpha}}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle$ (0,5)

$\langle u_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|u_1\rangle = 1/2$

$\Rightarrow |\phi\rangle = e^{i\alpha}|\varphi_1\rangle \equiv |\varphi_1\rangle$ (0,5)

4/4

4)
a) $|\psi_t\rangle = F(H)|\psi_{t=0}\rangle$ avec $F(H) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ et $|\psi_{t=0}\rangle = |\varphi_1\rangle$ (0,5)

$\Rightarrow |\psi_t\rangle = F(H)\left(\frac{e^{-i\alpha}|u_1\rangle + |u_2\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\alpha}F(H)|u_1\rangle + F(H)|u_2\rangle\right)$

or $H|u_n\rangle = E_n|u_n\rangle \Longrightarrow F(H)|u_n\rangle = F(E_n)|u_n\rangle$ $(n=1,2)$

$\Rightarrow |\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\alpha}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|u_1\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}|u_2\rangle\right)$ (1)

b) $\mathcal{P}_t(a_1) = |\langle\varphi_1|\psi_t\rangle|^2$ (0,5) car $\langle\psi_t|\psi_t\rangle = 1$

avec $\langle\varphi_1|\psi_t\rangle = \left(\frac{e^{+i\alpha}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{e^{-i\alpha}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\right)$ (0,5)

$\Rightarrow \mathcal{P}_t(a_1) = \frac{1}{4}\left(e^{-i\beta_1} + e^{-i\beta_2}\right)\left(e^{+i\beta_1} + e^{+i\beta_2}\right)$ avec $\beta_n = \frac{E_n t}{\hbar}$ $(n=1,$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \cos(\beta_1 - \beta_2)\right] = \cos^2\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ (0,5)

(0,5) Soit $\mathcal{P}_t(a_1) = \cos^2\frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar}$ et $\mathcal{P}_t(a_2) = 1 - \mathcal{P}_t(a_2) = \sin^2\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}$

et donc $a_1 = a_2 = 1$ et $\omega = \frac{E_1 - E_2}{2\hbar} = \frac{\Delta E}{2\hbar}$.

c) $\langle A\rangle_t = a_1\mathcal{P}(a_1) + a_2\mathcal{P}(a_2)$ (0,5)

$= a(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t) = a(1 - 2\sin^2\omega t)$

$= a\cos 2\omega t = a\cos\Omega t$

et donc : $a_3 = a$ et $\Omega = 2\omega = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$.

5°) Représentation $[x]$ $\Rightarrow u_n(x) = \langle x|u_n\rangle$ $n=1,2$

$\psi_0(x) = \langle x|\psi_{t=0}\rangle = \langle x|\varphi_1\rangle = \frac{e^{-i\alpha}\langle x|u_1\rangle + \langle x|u_2\rangle}{\sqrt{2}}$

Soit $\psi_0(x) = \left[e^{-i\alpha}u_1(x) + u_2(x)\right]/\sqrt{2}$

De même $\psi_t(x) = \langle x|\psi_t\rangle$

$\psi_t(x) = \left[e^{-i\alpha}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}u_1(x) + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}u_2(x)\right]/\sqrt{2}$