Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Physique

Année Universitaire: 2014-2015
Sciences de la Matière Physique 4
Session printemps

Epreuve de Mécanique Quantique
Rattrapage
Durée: 1 heure 30 mn

Exercice I

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène les orbites de l'électron, supposé confiné dans un volume de dimension linéaire r_0, sont décrites par une fonction d'onde à symétrie sphérique dont l'extension spatiale est caractérisée par un rayon r.

1- Ecrire le potentiel Coulombien auquel est soumis l'électron.

2- En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, montrer que:

$$mv^2 = \frac{q^2}{r}$$

avec $q^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ et où v et m sont respectivement la vitesse et la masse de l'électron.

3- Donner l'énergie totale de l'électron en fonction de r. Peut-elle expliquer le spectre de raie de l'atome d'hydrogène ?
En déduire la valeur de l'énergie minimale. Que peut-on conclure ?

4- Ecrire le principe d'incertitude de Heisenberg et donner son interprétation physique.

5- En admettant que l'incertitude sur la quantité de mouvement est $\Delta p = p_{min}$ et $\Delta r = r_0$, où p_{min} est la quantité de mouvement minimale de l'électron, montrer, en utilisant le principe d'incertitude de Heisenberg, que l'énergie cinétique T ne peut être inferieure à une valeur minimale:

$$T \geq T_{min} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}$$

6- Déterminer l'énergie minimale E_{min} et donner le rayon r_0 correspondant. Que peut-on conclure ?

7- Sachant que les orbites permises sont déterminées par la régle de quantification $pr = n\hbar$, montrer que leurs rayons sont donnés par:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{mq^2}n^2$$

En déduire le rayon r_0 de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène.

8 Donner l'expression de l'énergie quantifiée E_n et montrer que les transitions possibles pour l'atome d'hydrogène sont données par

$$\Delta E = E_{n_f} - E_{n_i} = \frac{mq^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)$$

Quand est ce que on a une emission ou une absorption.

Exercice II

On considére une particule de masse m et d'énergie E en mouvement le long de l'axe XX' d'une barrière de potentiel $V(x)$ défini par:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } \mid x \mid \leq \ell \\ 0 & \text{si } \mid x \mid > \ell \end{cases}$$

1- Représenter le potentiel $V(x)$.

2- Ecrire l'équation de Schrödinger qui donne l'évolution de la fonction d'onde $\varphi(x)$ de la particule.

3- On considère le cas $E < V_0$.

Résoudre l'équation de Schrödinger dans les différentes régions du potentiel.

4- Ecrire les conditions de raccordement et montrer que le coefficient de transmission s'écrit:

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0 sh^2 \sqrt{2m(V_0 - E)}\frac{2\ell}{\hbar}}$$

Que peut-on conclure? (Faire une comparaison avec une particule classique soumise à cette barrière de potentiel). De quel phénomène s'agit-il?

5- On considère le cas $E > V_0$.

Déduire, sans faire de calcul, à partir de la question 4 le coeficient de transmission de la particule. En déduire les valeurs de ℓ qui correspondent à la résonance ainsi que l'énergie correspondante.

Mécanique quantique
SMP 4
Correction rattrapage

Exercice I: 10 Pts

1- $V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$ (0,5)

2- $m\vec{\gamma} = m\vec{\gamma}_t + m\vec{\gamma}_N = m\frac{dv}{dt}\vec{\tau} + m\frac{v^2}{r}\vec{N}$ (0,5)

$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\vec{N}$; PFD: $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ (0,25)

$\frac{dv}{dt} = 0$ et $m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$ (0,25)

$mv^2 = \frac{q^2}{r}$ $\left(q^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)$

3- $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{q^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{r}$ (0,5)

$E \equiv E(r)$. C'est une fonction continue de r. Elle ne peut expliquer le spectre de raie de l'atome d'H. (0,5)

$E_{min} = -\infty$ $(r \to 0)$. Classiquement, l'e^- tombe dans le noyau. Ainsi l'atome d'H est non stable du point de vue de la mécanique classique. (0,5)

4- Principe d'incertitude de Heisenberg:

$\Delta x \Delta P \geq \hbar$ (1)

si $\Delta x <<$ alors $\Delta P >>$
si $\Delta x >>$ " $\Delta P <<$ $\Rightarrow$ On ne peut déterminer avec précision en même temps la position et la quantité de mouvement de la particule. (1)

5- $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}P^2 > \frac{1}{2m}P_{min}^2 = \frac{1}{2m}\Delta P^2 \geq \frac{\hbar^2}{2m\Delta r^2} = \frac{\hbar^2}{2m r_0^2} = T_{min}$ (0,5) (0,5)

6- $E_{min} = T_{min} - \frac{q^2}{r_0} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} - \frac{q^2}{r_0}$ 0,5

E_{min} étant l'énergie minimale, alors $\frac{dE_{min}}{dr_0}\Big|_{r_0} = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{mr_0^3} + \frac{q^2}{r_0^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{\hbar^2}{mq^2}$$ 0,25

Ainsi pour cette valeur de r_0 on obtient:

$$E_{min} = \frac{mq^4}{2\hbar^2} - \frac{mq^4}{\hbar^2} = -\frac{mq^4}{2\hbar^2}$$

C'est une énergie finie qui correspond à l'énergie de l'état fondamental. L'orbite de cet état a pour valeur $r_0 = \hbar^2/mq^2$. On conclu que le principe d'incertitude de Heisenberg rend compte de la stabilité de l'atome d'H. 0,25

7- $pr = n\hbar$; $mv^2 = \frac{q^2}{r} \Rightarrow p^2 = \frac{mq^2}{r} = \frac{n^2\hbar^2}{r^2}$

Ce qui donne $r_n = \frac{\hbar^2}{mq^2} n^2$ 0,5

L'état fondamental correspond à $n = 1 \rightarrow r_{fon} = \frac{\hbar^2}{mq^2} = r_0$ 0,5

8- $E = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{r} \Rightarrow E_n = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{r_n} = -\frac{1}{2}\frac{mq^4}{\hbar^2}\frac{1}{n^2}$

$$\Delta E = E_{n_f} - E_{n_i} = \frac{mq^4}{2\hbar^2}\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2}\right)$$ 1

0,5

on a absorption de l'énergie si $n_f > n_i$ et par conséquent $\Delta E > 0$

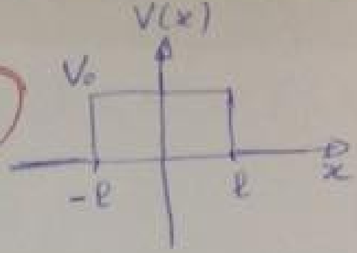
on a emission de l'énergie si $n_f < n_i$ " " " $\Delta E < 0$

0,5

- Pour l'absorption l'é passe d'un niveau d'énergie E_{n_i} à un niveau d'énergie supérieur E_{n_f}.
- Pour l'émission l'é passe d'un niveau d'énergie E_{n_i} à un niveau d'énergie inferieur E_{n_f}.

Exercice II :

1- $V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } |x| \leq \ell \\ 0 & \text{si } |x| > \ell \end{cases}$ (1)



2- $\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x) = 0$ (1,5)

3- $E < V_0$

(1) $\varphi_1''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}E\varphi_1(x) = 0 \Rightarrow \varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$ $\left(k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E\right)$

(1) $\varphi_2''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\varphi_2(x) = 0 \Rightarrow \varphi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x}$ $\left(k_2^2 = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)\right)$

(1) $\varphi_3''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}E\varphi_3(x) = 0 \Rightarrow \varphi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x}$ ($B_3 = 0$, pas d'onde réfléchie)

4- Conditions de raccordement :

$\varphi_1(-\ell) = \varphi_2(-\ell)$, $\varphi_1'(-\ell) = \varphi_2'(-\ell)$ $\Rightarrow \begin{cases} A_1 e^{-ik_1\ell} + B_1 e^{ik_1\ell} = A_2 e^{-k_2\ell} + B_2 e^{k_2\ell} & (1) \\ ik_1(A_1 e^{-ik_1\ell} - B_1 e^{ik_1\ell}) = k_2(A_2 e^{-k_2\ell} - B_2 e^{k_2\ell}) & (2) \end{cases}$ (0,5)

$\varphi_2(\ell) = \varphi_3(\ell)$, $\varphi_2'(\ell) = \varphi_3'(\ell)$ $\Rightarrow \begin{cases} A_2 e^{k_2\ell} + B_2 e^{-k_2\ell} = A_3 e^{ik_1\ell} & (3) \\ k_2(A_2 e^{k_2\ell} - B_2 e^{-k_2\ell}) = ik_1 A_3 e^{ik_1\ell} & (4) \end{cases}$ (0,5)

de l'équation (1) et (2) on tire A_1 :

$2ik_1 e^{-ik_1\ell} A_1 = (ik_1 + k_2)A_2 e^{-k_2\ell} + (ik_1 - k_2)B_2 e^{k_2\ell}$ (5) (0,25)

de l'équation (3) et (4) on tire A_2 et B_2 :

$\begin{cases} 2k_2 A_2 e^{k_2\ell} = (k_2 + ik_1)A_3 e^{ik_1\ell} & (0{,}25) \\ 2k_2 B_2 e^{-k_2\ell} = (k_2 - ik_1)A_3 e^{ik_1\ell} & (0{,}25) \end{cases}$

En remplaçant l'expression de A_2 et B_2 dans l'équation (5) on obtient

$\cancel{2ik_1 e^{-ik_1\ell} A_1 = [\ldots] A_3 e^{ik_1\ell}}$

$\cancel{[\ldots] A_3 e^{ik_1\ell}}$

$$2ik_1 e^{-ik_1 l} A_1 = [(k_1^2 - k_2^2)\, sh\, 2k_2 l + 2ik_1 k_2\, ch\, 2k_2 l] A_3 \frac{e^{ik_1 l}}{k_2}$$

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2) sh^2 2k_2 l + 4k_1^2 k_2^2 ch^2 2k_2 l}$$

$$= \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 + k_2^2) sh^2 2k_2 l} \quad 0{,}5$$

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0\, sh^2 \sqrt{2m(V_0 - E)}\, \frac{2l}{\hbar}} \quad 0{,}25$$

$T \neq 0$, alors la particule peut traverser la barrière du potentiel contrairement à une particule classique qui rebondit à la rencontre de la barrière. En mécanique quantique, la particule peut exister dans la région III tout en traversant la barrière. C'est l'effet tunnel.

5- $E > 0$

$$k_2'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0) = -k_2^2.$$

Il suffit de faire la transformation $k_2 \to ik_2 = k_2'$

$$sh(-ik_2' l) = -\frac{e^{+ik_2' l} - e^{-ik_2' l}}{2} = -\sin k_2' l$$

$$T = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0 \sin^2 \sqrt{2m(E - V_0)}\, \frac{2l}{\hbar}} \quad 1$$

A la résonnance on a $T = 1 \Rightarrow 2lk_2' = n\pi \Rightarrow l = \frac{n\pi}{2k_2'}$

En conséquence l'énergie à la résonnance est: 0,5

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ml^2} n^2 + V_0 \quad 0{,}5$$