Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences BP 2121
Département de Physique
TETOUAN - Maroc

جامعة عبد الملك السعدي
كلية العلوم
شعبة الفيزياء
تطوان

Année 2013/2014 **SMP(S4)-Physique 6.**

Contrôle de Mécanique Quantique I.
(Durée : 1 h 30min)

Exercice 1 : (6 points)

Soit une particule décrite par la fonction d'onde, à l'instant t = 0 par :

$$\psi(x,o) = N\frac{e^{\frac{ip_0x}{\hbar}}}{\sqrt{x^2+a^2}}$$ *Où p_0 et a sont des constantes réelles et N une constante de normalisation.*

1) Sachant que $\psi(x,0)$ est normée et de carré sommable, déterminer N.

2) Donner l'allure de $|\psi(x,0)|^2$ et calculer sa largeur à mi-hauteur Δx en donnant sa signification physique.

3/ On mesure la position de la particule, quelle est la probabilité P pour que le résultat soit compris entre $\frac{-a}{\sqrt{3}}$ et $\frac{a}{\sqrt{3}}$

Indication :

- la dérivée de la fonction Arctang(x) est : $\frac{1}{1+x^2}$
- $Artang \pm\infty = \pm\frac{\pi}{2}$
- $tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow Arctg(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pi/6$

Exercice2 : (14 points)

Considérons une particule d'énergie E provenant de la région des x négatifs qui est soumise au potentiel V définit par V(x) = 0 si x < 0 et V(x) = v_0 si x > 0 (avec v_0 >0)

1) *a) Dans le cas où E < v_0, déterminez le cœfficient de Réflexion R et de Transition T.*

   b) Comparez les résultats obtenus à ceux prévus si on fait un raisonnement classique.

2) *Dans le cas où E > v_0*

   a)On pose q = v_0/E, exprimer le cœfficient de Réflexion R et de Transition T en fonction de q

   b) Comparez ce résultat avec celui obtenu lorsqu'on fait un raisonnement classique.

Corrigés Mécanique Quantique I

ExI ; $\psi(x,0) = N \dfrac{e^{\frac{i p_0 x}{\hbar}}}{\sqrt{x^2+a^2}}$, p_0 et a sont des Cte $\in \mathbb{R}$.
et N une Cte de normalisation

1) $\psi(x,0)$ est normée et de carré sommable $\Leftrightarrow \int |\psi(x,0)|^2 dx = 1$

espace.

d'après le cours; $P = \hbar k$, $k_0 = \dfrac{p_0}{\hbar}$

donc, $\psi(x,0) = N \dfrac{e^{i k_0 x}}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (N.B, $k_0 = \frac{p_0}{\hbar}$ pour simplifi l'écriture).

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,0)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} N^2 \frac{|e^{i k_0 x}|^2}{|\sqrt{x^2+a^2}|^2} dx = 1 \equiv$ Carré somm

$N = $ cte, $\quad N^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx = 1$; on faisant une chang. des Variables.

$N^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = 1$; $N^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = 1$

Sachant que $u = \dfrac{x}{a}$; $x = a u$; $dx = a\,du$.

Si $x \to -\infty$, $u \to -\infty$
Si $x \to +\infty$, $u \to +\infty$ $\mapsto N^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{a(1+u^2)} = 1$

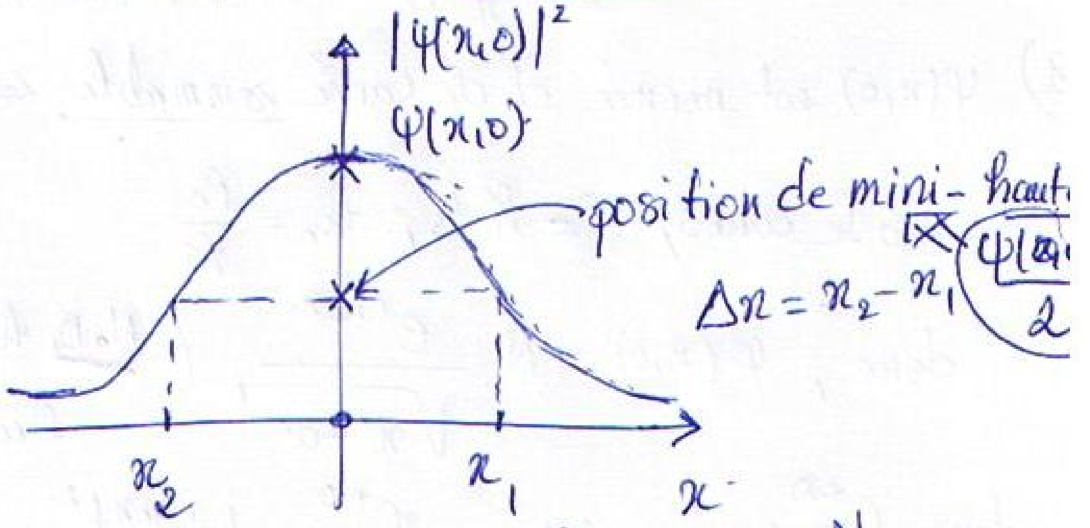
$a = $ Cte $\Rightarrow \underbrace{\dfrac{N^2}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}}_{\left\{\text{Arctg}\, u\right\}_{-\infty}^{+\infty}} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{N^2}{a} \left\{\text{Arctg}\, u\right\}_{-\infty}^{+\infty} = 1 \Rightarrow \dfrac{N^2}{a}\pi = 1 \Rightarrow \boxed{N = \sqrt{\dfrac{a}{\pi}}}$

si $\psi(x,0)$ de carré sommable, $\boxed{N=\sqrt{\frac{a}{\pi}}}$

2) La présentation graphique de $|\psi(x,0)|^2$.

$\psi(x,0)$ est une fonction d'onde sa présentation graphique c'est comme suit ;



Soit $\psi(x,0) = \frac{\psi(0,0)}{2} \Leftrightarrow \frac{N e^{ik_0 x}}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{N}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

$\boxed{e^{ik_0 x} = \frac{1}{2}}$

$ik_0 x = -\ln 2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\ln 2}{ik_0}}$

$x_2 < 0,\ x_1 > 0;\ \Rightarrow \begin{cases} x_2 = +\frac{\ln 2}{ik_0} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{2\ln 2}{ik_0} \\ x_1 = -\frac{\ln 2}{ik_0} \end{cases}$

- donc $\psi(x,0)$ est une fonction d'onde et sa largeur à mini hauteur $\boxed{\Delta x = \frac{2\ln 2}{ik_0}}$

3) Probabilité de la présence de particule dans l'espace qui compris entre $-\frac{a}{\sqrt{3}}$ et $\frac{a}{\sqrt{3}}$;

☺ هل أنت عصامي أم عظامي!!! ☺

Par définition, $P\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, +\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \int_{-a/\sqrt{3}}^{+a/\sqrt{3}} |\varphi(x,0)|^2 \, dx$

$$P = \int_{-a/\sqrt{3}}^{+a/\sqrt{3}} N^2 \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \int_{-a/\sqrt{3}}^{+a/\sqrt{3}} \frac{N^2 dx}{x^2+a^2} = N^2 \int_{-a/\sqrt{3}}^{+a/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$P = N^2 \int_{-a/\sqrt{3}}^{+a/\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}$$ on pose $u = \frac{x}{a}$; $dx = a\,du$

$\boxed{x = au}$

$$P = \frac{N^2}{a^2} \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$; $\begin{cases} \text{si } x \to -a\sqrt{3} ; \ u \to -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{si } x \to +a\sqrt{3} ; \ u \to +\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

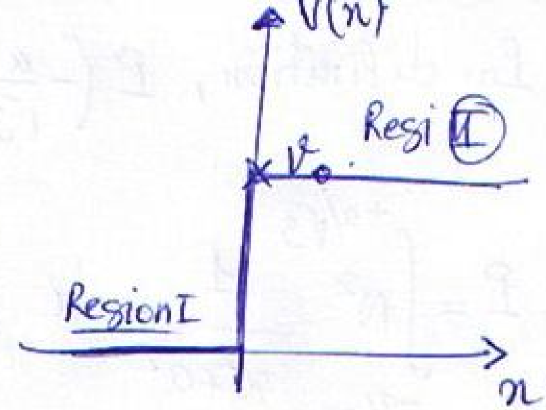
$$P = \left(\frac{N}{a}\right)^2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{a\,du}{1+u^2} = \frac{N^2}{a} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+1/\sqrt{3}} \frac{du}{1+u^2}$$

$$P = \frac{N^2}{a} \left\{ \text{Arctg}\, u \right\}_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}$$; $\text{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{P = \frac{N^2 \pi}{3a}}$$

☺ هل أنت عصامي أم عظامي!!! ☺

Ex2 ; $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ V_0 & \text{si } x>0 \end{cases}$



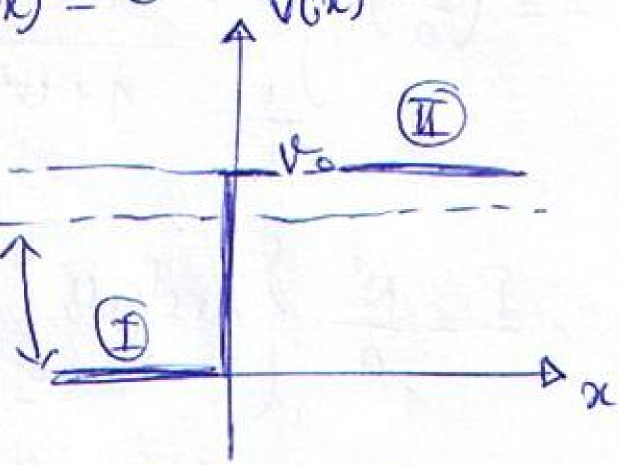
1) si $E < V_0$ $R = ?$ et $T = ?$

Par définition; $R = \frac{\|\text{onde réflechie}\|^2}{\|\text{onde incident}\|^2}$

et $T = \frac{\|\text{onde transmis}\|^2}{\|\text{onde incident}\|}$ ou bien $T + R = 1$

- Pour calculons; R et T ; on Etudier le marche de particule à partir de l'equation de schrodingeur
- l'equation de Schrödingeur Au valeurs propres

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left\{E - V(x)\right\}\varphi(x) = 0$$



a/ 1er cas ; si $E < V_0$

▷ Région I ; $V(x) = 0$;

$$\varphi_I''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_I(x) = 0$$

on pose $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{\varphi_I''(x) + K^2\varphi_I(x) = 0}$

la soulution générale est $\varphi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

▷ Région II ; $V(x) = V_0$

$$\Rightarrow \varphi_{II}''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left\{E - V_0\right\}\varphi_{II}(x) = 0$$

avec $E < V_0 \Rightarrow \varphi_{II}''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\varphi_{II}(x) = 0$

d'ou $\varphi_{II}(x) = Ce^{qx} + De^{-qx}$ avec $q = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$.

- Alors; $\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ Ce^{qx} + De^{-qx} \end{cases}$

- Choix des soulutions acceptables physiquement;

si $x \to \infty$ (Region II); $Ce^{qx} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, $De^{-qx} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

donc; $\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{si } x<0 \\ De^{-qx} & \text{si } x>0 \end{cases}$

- Conditions aux limites; $\varphi(x)$ est continue et sa premiers dérivée, en $x=0$ $\Rightarrow \begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B = D \\ ik(A-B) = -qD \end{cases}$; $\boxed{\frac{B}{A} = \frac{k-iq}{k+iq}}$

Par définition $R = \frac{\|B\|^2}{\|A\|^2} = \frac{k^2+q^2}{k^2+q^2} = 1$

et $R+T = 1$; $\Rightarrow \boxed{T=0}$

b/ Mécanique classique; on sait que l'énergie total du syst ou bien de particule s'écrit sous la forme $E_T = E_c + V(x)$

- Région I; $V(x) = 0$ si $x<0$; d'ou $E_T = \frac{1}{2}mv^2$

or $P = mv$ (qte de mouvement) $\boxed{E_T = \frac{P^2}{2m}}$

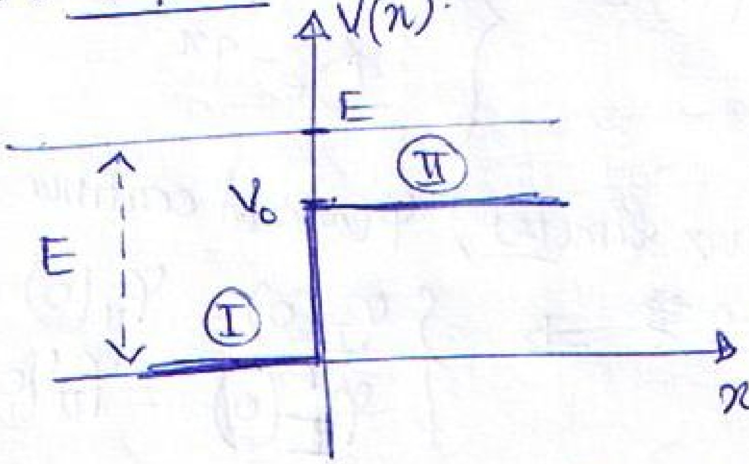
$E = \frac{P^2}{2m}$; $E = \frac{1}{2} m V^2$; la vitesse de particule est

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

si $\underline{E < V_0}$; le particule est soumis une vitesse $\vartheta = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ et frapp. dans le bariere est rétourner donc la région II est interdit dans ce cas ; Alors, $\underline{T = 0}$ (coeff de Transition).

Alors ; la mécanique classique et Quantique sont <u>semblable</u>

2/ Dans le cas ou $\underline{E > V_0}$



a) si on pose $q = \frac{V_0}{E}$; R et T en fonction de q

- l'equation de <u>Schöredinguer</u> $\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\{E - V(x)\}\varphi(x) = 0$

$$\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\{E - V(x)\}\varphi(x) = 0.$$

Cas de $\underline{E > V_0}$; <u>Région I</u> ; si $x < 0$, $V(x) = 0$

$$\varphi_I''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_I(x) = 0 \Rightarrow \varphi_I(x) = A' e^{ikx} + B' e^{-ikx}.$$

avec $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Région II ; si $x>0$ $V(x)=V_0$.

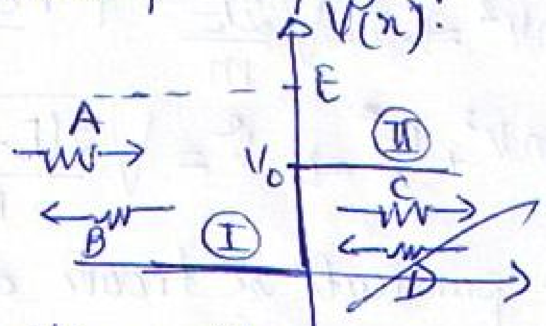
$$\varphi_{II}''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}\left\{E-V_0\right\}\varphi_{II}(x)=0 \cdot \text{ on a } q=\frac{V_0}{E}$$

$$\varphi_{II}''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}\left\{1-\frac{V_0}{E}\right\}\varphi_{II}(x)=0 \quad \text{soit } K_0^2=\frac{2m}{\hbar^2}\left(1-\frac{V_0}{E}\right)$$

donc ; $\varphi_{II}(x)=C'e^{ik_0x}+D'e^{-ik_0x}$

$$\text{d'où} \Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}\varphi_I(x)=A'e^{ikx}+B'e^{-ikx} & \text{si } x<0\\ \varphi_{II}(x)=C'e^{ik_0x}+De^{-ik_0x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

- choix des solutions acceptables physiquement



$D=0$

$$\text{donc, } \varphi(x)=\begin{cases}A'e^{ikx}+B'e^{-ikx}\\ C'e^{ik_0x}\end{cases}$$

- conditions aux limites, $\varphi(x)$ et sa première dérivée continue

$$\text{en } x=0 \Rightarrow \begin{cases}\varphi_I(0)=\varphi_{II}(0)\\ \varphi_I'(0)=\varphi_{II}'(0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A'+B'=C'\\ ik(A'-B')=ik_0C'\end{cases}$$

$$B'=\frac{C'(1-h)}{2} \; ; \; A'=\frac{C(1+h)}{2} \quad \text{avec } h=\frac{K_0}{K}$$

$$\frac{B'}{A'}=\frac{K-K_0}{K+K_0}$$

$$R = \frac{\|B'\|^2}{\|A'\|^2} = \left(\frac{K-K_0}{K+K_0}\right)^2 = \frac{(K-K_0)^2}{(K+K_0)^2}$$

et $R+T = 1$; $T = 1 - R = 1 - \frac{(K-K_0)^2}{(K+K_0)^2}$

$$T = \frac{4KK_0}{(K+K_0)^2} \quad \text{avec } K_0 = \frac{\sqrt{2m(1-\frac{V_0}{E})}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(1-q)}}{\hbar}$$

d'où $R = \left(\frac{K-K_0}{K+K_0}\right)^2$ et $T = \frac{4KK_0}{(K+K_0)^2}$ avec $K_0 = \frac{\sqrt{2m(1-}}{\hbar}$

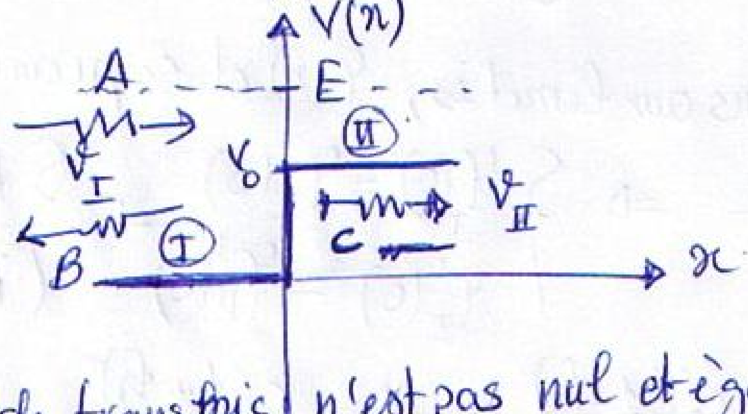
b/ $E_T = \frac{1}{2}mV^2 + V(x)$; $\begin{cases} \text{Région I} ; V(x) = 0 \\ \text{Région II} ; V(x) = V_0 \end{cases}$

donc $E = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$E = \frac{1}{2}mV^2 + V_0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(E-V_0)}{m}}$

- Si $E > V_0$; le particule se trouve dans les deux régions avec sa vitesse dans les deux régions sont respectivement

$v_I = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ et $v_{II} = \sqrt{\frac{2(E-V_0)}{m}}$



donc le coeff de transmis n'est pas nul et égal $T = \frac{\|C\|^2}{\|A\|^2}$

Alors, les deux méthode de calcul sont ~~sommables~~ égaux mais la Mécanique Quantique plus précis,

Fin