Ridouane

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session normale – 03 Janvier 2017
Pr. NASSIK

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée : 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Problème I (10 points) : Moment cinétique orbital et harmoniques sphériques

1. On considère une particule M de masse μ qui évolue dans le potentiel central $V(r)$.

a. Ecrire, en coordonnées sphériques, l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par la fonction d'onde $\psi(r,\theta,\varphi)$ des états stationnaires d'énergie E.

b. Dire pourquoi la fonction d'onde peut s'écrire sous la forme :

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$

où $R(r)$ est la fonction d'onde radiale et $Y_l^m(\theta,\varphi) = \langle \theta,\varphi \,|\, l,m \rangle$ sont les harmoniques sphériques, fonctions propres communes aux observables L^2 et L_z ; l et m étant les nombres quantiques associés au moment cinétique orbital.

c. Pour une valeur de l fixée, donner l'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$.

2. a. Montrer que $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'écrit sous la forme :

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = F_{l,m}(\theta)\,G_m(\varphi)$$

Donner l'expression de la fonction $G_m(\varphi)$ et les valeurs prises par le nombre quantique m.

b. On considère le cas $m = l$, montrer que :

$$F_{l,l}(\theta) = C_l\,(\sin\theta)^l$$

où C_l est la constante de normalisation.

c. Indiquer, **sans détailler les calculs**, comment obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_l^l(\theta,\varphi)$.

d. Sachant que $C_l = \dfrac{(-1)^l}{2^l\, l!}\sqrt{\dfrac{(2l+1)!}{4\pi}}$, déterminer les expressions des harmoniques sphériques correspondantes à $l = 1$: $Y_1^1(\theta,\varphi)$, $Y_1^0(\theta,\varphi)$, $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$.

Formulaire :

$$\Delta(\bullet) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\bullet) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}(\bullet) \quad ; \quad L_z = -i\hbar.\frac{\partial}{\partial\varphi} \quad ; \quad L_\pm = \pm\hbar\, e^{\pm i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Problème II (10 points) : Moment cinétique $j=1$ dans un champ magnétique

On considère un système quantique de moment cinétique $j=1$. Le sous-espace $\mathcal{E}_1$ à trois dimensions, associé au système, est rapporté à la base $\{|j=1,m\rangle\}$ que l'on notera simplement $\{|m\rangle\}$, où les vecteurs $|m\rangle$ sont classés par ordre décroissant du nombre quantique m.

L'hamiltonien H_0 du système est :

$$H_0 = a J_z + \frac{b}{\hbar} J_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives, ayant les dimensions d'une pulsation.

1. Quels sont les niveaux d'énergie du système ?

2. On applique un champ magnétique statique $\vec{B}$ dans une direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ définie par les angles θ et φ :

$$\vec{u} = \sin\theta\cos\varphi.\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi.\vec{e}_y + \cos\theta.\vec{e}_z$$

L'interaction du champ $\vec{B}$ avec le moment magnétique du système $\vec{M} = \gamma\vec{J}$ (γ est le rapport gyromagnétique, supposé négatif) est décrite par l'hamiltonien :

$$W = -\vec{M}.\vec{B}$$

On notera $\omega = -\gamma B$ la pulsation de Larmor. L'hamiltonien total du système est alors :

$$H = H_0 + W$$

a. Donner l'expression de l'hamiltonien d'interaction W en fonction des opérateurs J_+, J_- et J_z et des données du problème.

b. Calculer la matrice représentant W dans la base $\{|m\rangle\}$.

3. On suppose que $b=a$ et que la direction du champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle à l'axe Ox : $\vec{u} = \vec{e}_x$. On suppose aussi que $\omega << a$.

a. Calculer, au premier ordre de perturbation, l'énergie propre du niveau fondamental et, à l'ordre zéro, le vecteur propre correspondant.

b. Calculer, au premier ordre puis au second ordre de perturbation, l'énergie propre du niveau excité.

Résumer les résultats sur un diagramme d'énergie.

4. On suppose que $b=2a$ et que $\omega << a$. La direction du vecteur $\vec{u}$ est maintenant quelconque (son expression est donnée dans la question 2.).

Calculer, au premier ordre de perturbation, le vecteur propre du niveau fondamental.

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session normale – 03 Janvier 2017
Pr. NASSIK

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Problème I (10 points) : Moment cinétique orbital et harmoniques sphériques

1. Soient une particule M de masse μ qui évolue dans le potentiel central $V(r)$ et $\psi(r,\theta,\varphi)$ la fonction d'onde des états stationnaires d'énergie E.

a. L'opérateur hamiltonien du système en coordonnées sphériques est :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps satisfaite par les états stationnaires du système $\psi(r,\theta,\varphi)$ est :

1

$$\boxed{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)\right]\psi(r,\theta,\varphi) = E\,\psi(r,\theta,\varphi) \qquad (*)}$$

b. Factorisation de la fonction d'onde :

On a :

1

$$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + V(r)}_{H_r} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{L^2}{2\mu}}_{H_\Omega} = H_r + H_\Omega$$

avec : $\quad H_r = -\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + V(r) \quad$ et $\quad H_\Omega = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{L^2}{2\mu}$

L'opérateur L^2 n'agit que sur les variables angulaires $\Omega = (\theta,\varphi)$, il commute alors avec l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ et avec toute fonction $V(r)$ de r, il s'ensuit que :

$$[H_r, H_\Omega] = 0 \;\Rightarrow\; [H, H_\Omega] = [H, H_r] = 0$$

Donc, H, H_r et L^2 possèdent des fonctions propres communes.

H_r agit dans le sous-espace $\mathcal{E}_r$ et a pour fonctions propres $R(r)$;

L^2 (et donc $H_{\theta,\varphi}$) agit dans le sous-espace $\mathcal{E}_\Omega$ et a pour fonctions propres les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$;

Donc l'hamiltonien H agit dans l'espace produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_\Omega$, et a pour fonctions propres :

$$\boxed{\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)}$$

c. **L'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$:**

L'équation de Schrödinger (*) décrivant l'évolution de l'état stationnaire s'écrit alors :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{L^2}{2\mu r^2}+V(r)\right]R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=E\,R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Pour l fixé, on a :

$$\frac{L^2}{2\mu r^2}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Donc :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}+V(r)\right]R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)=E\,R(r)Y_l^m(\theta,\varphi)$$

En divisant par $Y_l^m(\theta,\varphi)$ on obtient l'équation différentielle satisfaite par la fonction radiale $R(r)$:

1 $$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2\mu r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR(r))+\left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}+V(r)\right)R(r)=E\,R(r)}$$

3. Les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta,\varphi)$ sont les fonctions propres communes à L^2 et L_z ; elles sont définies par :

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\langle\theta,\varphi\,|\,l,m\rangle$$

a. **Montrons que $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'écrit sous la forme :**

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=F_{l,m}(\theta)G_m(\varphi)$$

- On a :

$$L_z\,Y_l^m(\theta,\varphi)=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m(\theta,\varphi)=m\hbar\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_l^m(\theta,\varphi)=i\,m\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

1 $$\boxed{Y_l^m(\theta,\varphi)=F_{l,m}(\theta)e^{im\varphi}\quad\Rightarrow\quad G_m(\varphi)=e^{im\varphi}}$$

- Comme $0\le\varphi\le 2\pi$ et la fonction d'onde doit être continue en tout point, on a alors :

$$Y_l^m(\theta,\varphi=0)=Y_l^m(\theta,\varphi=2\pi)\quad\Rightarrow\quad e^{2\pi i m}=1$$

Ce qui implique que m ne peut prendre que des valeurs entières :

1 $$m=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

b. On considère le cas $m = l$, montrons que :

$$F_{l,l}(\theta) = C_l (\sin\theta)^l$$

- On a :

$$L_+ |l,l\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\theta,\varphi|L_+|l,l\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad L_+ Y_l^l(\theta,\varphi) = 0$$

Or :

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

Donc :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) F_{l,l}(\theta) e^{il\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dF_{l,l}(\theta)}{d\theta}.e^{il\varphi} - l.\cot g\theta.F_{l,l}(\theta) e^{il\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dF_{l,l}(\theta)}{F_{l,l}(\theta)} = l.\cot g\theta.d\theta = l\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad Ln F_{l,l}(\theta) = l\, Ln(\sin\theta) = Ln(\sin\theta)^l$$

$$\Rightarrow \quad F_{l,l}(\theta) = c_l (\sin\theta)^l$$

D'où :

1 $$\boxed{Y_l^l(\theta,\varphi) = C_l (\sin\theta)^l e^{il\varphi}}$$

où C_l est la constante de normalisation.

c. Pour obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_l^l(\theta,\varphi)$:

Les expressions des fonctions $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'obtiennent par applications successives de l'opérateurs L_- sur les fonctions $Y_l^l(\theta,\varphi)$. En effet :

1 $$L_- Y_l^l(\theta,\varphi) \,\alpha\, Y_l^{l-1}(\theta,\varphi) \quad \Rightarrow \quad L_-^p Y_l^l(\theta,\varphi) \,\alpha\, Y_l^{l-p}(\theta,\varphi) \quad ; \quad p = 1, 2, 3, \cdots$$

Donc, pour obtenir $Y_l^m(\theta,\varphi)$, il faut que $l - p = m \quad \Rightarrow \quad p = l - m$.

Ainsi, les fonctions $Y_l^m(\theta,\varphi)$ s'obtiennent en appliquant $(l-m)$ fois l'opérateur L_- sur la fonction $Y_l^l(\theta,\varphi)$.

d. Expressions des harmoniques sphériques : $Y_1^1(\theta,\varphi)$, $Y_1^0(\theta,\varphi)$ et $Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$

- $l = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}$, donc :

1 $$\boxed{Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta.e^{i\varphi}}$$

- On a d'une part :

$$L_- |1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \quad \Rightarrow \quad L_- Y_1^1(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{2}\, Y_1^0(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_- Y_1^1(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot g\theta.\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\sin\theta.e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}(\cos\theta + \cot g\theta.\sin\theta).e^{i\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,2\hbar\cos\theta$$

Donc :

$$\hbar\sqrt{2}\,Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,2\hbar\cos\theta$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta}$$

- De même :

$$L_-|1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,-1\rangle \;\Rightarrow\; L_- Y_1^0(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{2}\,Y_1^{-1}(\theta,\varphi)$$

D'autre part :

$$L_- Y_1^0(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar e^{-i\varphi}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar\sin\theta.e^{-i\varphi}$$

Donc :

$$\hbar\sqrt{2}\,Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar\sin\theta.e^{-i\varphi}$$

D'où:

1 $$\boxed{Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta.e^{-i\varphi}}$$

Problème II (10 points) : Moment cinétique $j=1$ dans un champ magnétique

Le système quantique est de moment cinétique $j=1$. Le sous-espace $\mathcal{E}_1$ à trois dimensions est rapporté à la base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$. L'hamiltonien H_0 du système est :

$$H_0 = a J_z + \frac{b}{\hbar} J_z^2$$

où a et b sont deux constantes positives, ayant les dimensions d'une pulsation.

1. Les niveaux d'énergie du système :

On a :

$$H_0|m\rangle = \left(a J_z + \frac{b}{\hbar} J_z^2\right)|m\rangle = (a m\hbar + b m^2\hbar)|m\rangle$$

Donc :

$$H_0|+1\rangle = \left(a J_z + \frac{b}{\hbar} J_z^2\right)|+1\rangle = (a+b)\hbar|+1\rangle$$

1 $$H_0|0\rangle = \left(a J_z + \frac{b}{\hbar} J_z^2\right)|0\rangle = 0$$

$$H_0|-1\rangle = \left(a J_z + \frac{b}{\hbar} J_z^2\right)|-1\rangle = (-a+b)\hbar|-1\rangle = -(a-b)\hbar|-1\rangle$$

Les niveaux d'énergie de H_0 (hamiltonien non perturbé) sont alors :

1,5 $$\boxed{E_{+1}^{(0)} = (a+b)\hbar\,, \quad E_0^{(0)} = 0 \quad , \quad E_{-1}^{(0)} = -(a-b)\hbar}$$

2. a. Expression de W en fonction des opérateurs J_+, J_- et J_z :

L'hamiltonien d'interaction du champ $\vec{B}$ avec le moment magnétique du système $\vec{M} = \gamma \vec{J}$ est :

0,5 $$W = -\vec{M}.\vec{B} = -B\gamma \vec{J}.\vec{u} = \omega J_u$$

$\omega = -\gamma B$ la pulsation de Larmor.

On a :

$$\vec{J} = J_x \vec{e}_x + J_y \vec{e}_y + J_z \vec{e}_z$$
$$\vec{u} = \sin\theta\cos\varphi.\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi.\vec{e}_y + \cos\theta.\vec{e}_z$$

Donc :

$$J_u = \vec{J}.\vec{u} = J_x \sin\theta\cos\varphi + J_y \sin\theta\sin\varphi + J_z\cos\theta$$

Ce qui implique :

$$W = \omega\left(J_x \sin\theta\cos\varphi + J_y \sin\theta\sin\varphi + J_z\cos\theta\right)$$

Or :

$$\begin{cases} J_+ = J_x + i J_x \\ J_- = J_x - i J_x \end{cases} \Rightarrow J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad , \quad J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)$$

Donc :

$$W = \omega\left[\frac{1}{2}(J_+ + J_-)\sin\theta\cos\varphi + \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)\sin\theta\sin\varphi + J_z\cos\theta\right]$$

$$= \omega\sin\theta\left[\frac{1}{2}(J_+ + J_-)\cos\varphi + \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)\sin\varphi + L_z\cos\theta\right] + \omega J_z\cos\theta$$

$$= \omega\sin\theta\left[\frac{1}{2}J_+(\cos\varphi - i\sin\varphi) + \frac{1}{2}J_-(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right] + \omega J_z\cos\theta$$

D'où :

1 $$\boxed{W = \omega\left[\frac{1}{2}(J_+ e^{-i\varphi} + J_- e^{i\varphi})\sin\theta + J_z\cos\theta\right]}$$

b. Matrice représentant W dans la base $\{|+1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle\}$:

L'action de W sur les vecteurs $|+1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$ est donnée par :

$$W|+1\rangle = \hbar\omega\cos\theta\,|+1\rangle + \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi}|0\rangle$$

$$W|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta\left[e^{-i\varphi}|+1\rangle + e^{i\varphi}|-1\rangle\right]$$

$$W|-1\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi}|0\rangle - \hbar\omega\cos\theta\,|-1\rangle$$

D'où :

1 $$W = \hbar\omega\begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

3. On suppose que $b = a$ et que $\vec{u} = \vec{e}_x$, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = 0$, dans ce cas :

0,5 $$W = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \omega \ll a$$

Puisque $a = b$, alors les niveaux d'énergie du système sont :

- Niveau fondamental :

0,5 $E_0^{(0)} = E_{-1}^{(0)} = 0$: énergie propre 2 fois dégénérée $\Rightarrow$ états propres : $|0\rangle$ et $|-1\rangle$

- Niveau excité :

$E_{+1}^{(0)} = 2a\hbar$: énergie propre non dégénérée $\Rightarrow$ état propre : $|+1\rangle$

a. **Corrections à l'énergie propre et au vecteur propre du niveau fondamental :**

Ce niveau d'énergie est dégénéré, il faut alors diagonaliser la restriction de la matrice de W au sous – espace engendré par les vecteurs $|0\rangle$ et $|-1\rangle$:

$$\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants sont :

$$\varepsilon_+ = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad : \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |-1\rangle\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_- = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad : \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |-1\rangle\right)$$

Les valeurs propres ε_+ et ε_- sont les corrections à l'ordre 1 à l'énergie : $\varepsilon_+ = E_{0+}^{(1)}$; $\varepsilon_- = E_{0-}^{(1)}$.

Le niveau fondamental dégénéré se divise en deux sous – niveaux d'énergies respectives :

(0,5) $$\boxed{E_{0+} = E_0^{(0)} + \varepsilon_+ = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_{0-} = E_0^{(0)} + \varepsilon_- = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}}$$

Les vecteurs propres associés $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont les états propres à l'ordre zéro :

(0,5) $$\boxed{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |-1\rangle\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |-1\rangle\right)}$$

D'où la levée de la dégénérescence de ce niveau par la perturbation.

b. **Corrections à l'énergie propre du niveau excité :**

Le niveau excité d'énergie $E_{+1}^{(0)} = 2a\hbar$ est non dégénérée, le vecteur propre correspondant est $|+1\rangle$.

- **Au premier ordre de perturbation :**

(0,5) $$\boxed{E_{+1}^{(1)} = \langle +1|W|+1\rangle = 0}$$

Donc, au premier ordre de perturbation, ce niveau n'est pas modifié.

- **Au second ordre de perturbation :**

$$E_{+1}^{(2)} = \frac{1}{E_{+1}^{(0)} - E_0^{(0)}}\left[\left|\langle -1|W|+1\rangle\right|^2 + \left|\langle 0|W|+1\rangle\right|^2\right] = \frac{1}{2a\hbar}\left[0 + \left(\frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{\hbar\omega^2}{4a}$$

Donc :

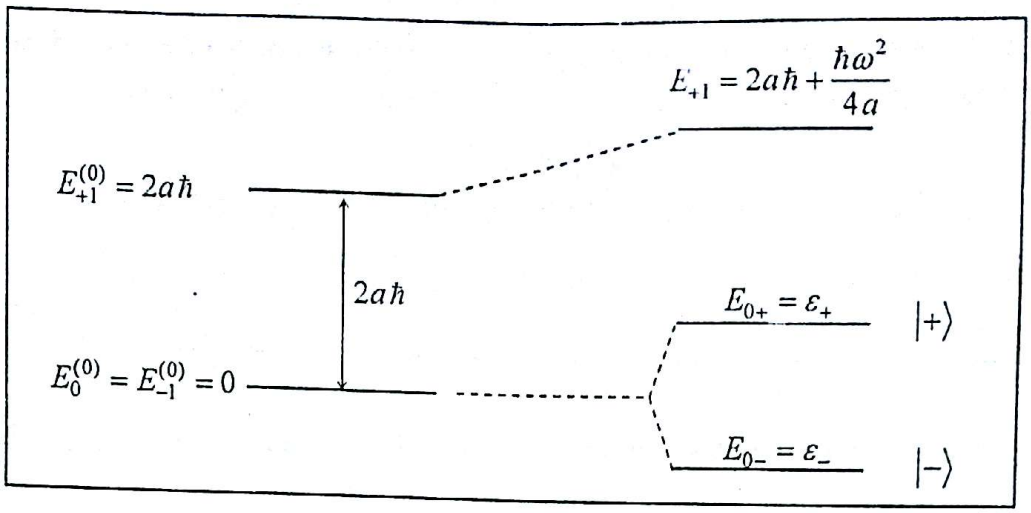
(0,5) $$\boxed{E_{+1}^{(2)} = \frac{\hbar\omega^2}{4a}}$$

Ainsi, au second ordre de perturbation, l'énergie du niveau excité est :

(0,5) $$\boxed{E_{+1} = E_{+1}^{(0)} + E_{+1}^{(1)} + E_{+1}^{(2)} = 2a\hbar + \frac{\hbar\omega^2}{4a}}$$

Diagramme d'énergie :

(0,5)



4. On suppose que $b = 2a$ et que $\omega << a$. Dans ce cas :

$$H_0|m\rangle = \left(aJ_z + \frac{2a}{\hbar}J_z^2\right)|m\rangle = (1+2m)am\hbar|m\rangle$$

Donc :

(0,5)

$$H_0|+1\rangle = 3a\hbar|+1\rangle$$
$$H_0|0\rangle = 0$$
$$H_0|-1\rangle = a\hbar|-1\rangle$$

Les niveaux d'énergie ne sont pas dégénérés et le niveau fondamental a pour énergie propre $E_0^{(0)} = 0$ et pour vecteur propre le ket $|0\rangle$.

A l'ordre 1 de perturbation, le vecteur propre du niveau fondamental s'écrit alors :

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle + \sum_{m\neq 0} \frac{\langle m|W|0\rangle}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}|m\rangle$$
$$= |0\rangle + \frac{\langle +1|W|0\rangle}{E_0^{(0)} - E_{+1}^{(0)}}|+1\rangle + \frac{\langle -1|W|0\rangle}{E_0^{(0)} - E_{-1}^{(0)}}|-1\rangle$$

Or :

$$\langle +1|W|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\varphi} \quad \text{et} \quad \langle -1|W|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

Donc :

(0,5)

$$\boxed{|\psi_0\rangle = |0\rangle - \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sin\theta\left(\frac{e^{-i\varphi}}{3a}|+1\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{a}|-1\rangle\right)}$$

-K1-

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session de rattrapage – 07 Février 2017
Pr. NASSIK

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Durée : 2 h 00 - Aucun document n'est autorisé

Problème : Couplage spin - orbite et effet Zeeman

On considère l'électron $2p$ de l'atome d'hydrogène, caractérisé par un moment cinétique orbital $\vec{L}$ et un moment de spin $\vec{S}$, de nombres quantiques respectifs $(l=1)$ et $(s=1/2)$.

On désigne par $\{|\, l,\, m_l\,\rangle \otimes |\, s,\, m_s\rangle\}$ que l'on notera simplement $\{|\, m_l,\, m_s=\pm\rangle\}$ la base découplée formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, L_z et S_z.

Le moment cinétique total de l'électron $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ est caractérisé par les nombres quantiques J et M. On désignera par $\{|\, l,\, s,\, J, M\,\rangle\}$ que l'on notera simplement $\{|\, J,\, M\rangle\}$ la base couplée formée par les vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, J^2 et J_z.

Partie I (9 points)

1. Préciser les espaces des états $\mathscr{E}_l=\{|\, l,\, m_l\,\rangle\}$ et $\mathscr{E}_s=\{|\, s,\, m_s\rangle\}$ associés à chaque moment cinétique : quels sont leurs vecteurs de base et leurs dimensions ?

2. Quelle est la dimension de l'espace des états $\mathscr{E}=\mathscr{E}_l\otimes\mathscr{E}_s$? Donner les vecteurs de la base découplée $\{|\, m_l,\, m_s=\pm\rangle\}$.

3. Montrer que $\vec{J}$ vérifie les relations de commutation caractéristiques des moments cinétiques.

4. Montrer que $[J^2, J_z]=0$.

5. Quelles sont **les valeurs possibles** prises par les nombres quantiques J et M ?

6. En utilisant **la méthode du rectangle**, reporter les différentes valeurs de m_l et m_s sur un graphe et calculer **le degré de dégénérescence des valeurs de** M.

7. En appliquant les résultats de **la théorie de l'addition des moments cinétiques**, donner les expressions des vecteurs $|\, J,\, M\rangle$ en fonction des vecteurs $|\, m_l,\, m_s=\pm\rangle$.

Partie II (5 points)

L'interaction spin – orbite entre les moments cinétiques orbital et de spin de l'électron est décrite par l'hamiltonien W_{SO} donné par :

$$W_{SO}=a\,\vec{L}.\vec{S}$$

où a est une constante positive (constante de couplage spin – orbite).

L'hamiltonien total du système s'écrit alors :

$$H_1 = H_0 + W_{SO}$$

où H_0 est l'hamiltonien atomique en l'absence du couplage ; il forme un ECOC avec L^2, S^2, L_z et S_z.

On suppose que les kets $|m_l, m_s = \pm\rangle$ sont tous vecteurs propres de H_0 avec la même valeur propre E_0 ; c'est l'énergie de l'état $2p$: $E_0 = E(2p)$.

1. Donner l'expression de l'hamiltonien W_{SO} en fonction des observables J^2, L^2 et S^2.
2. Montrer que les vecteurs $|J, M\rangle$ sont des vecteurs propres de W_{SO}, et donner les valeurs propres correspondantes.
3. En déduire **les énergies propres** de l'hamiltonien $H_1 = H_0 + W_{SO}$, **les états propres** correspondants et **la dégénérescence** des niveaux.
4. Quelle est alors l'effet du couplage spin – orbite sur les niveaux d'énergie de H_0.

Partie III (6 points)

On applique au système un champ magnétique statique $\vec{B}$, dirigé selon l'axe Oz, de sorte que l'hamiltonien total du système devient :

$$H = (H_0 + W_{SO}) + W_Z = H_1 + W_Z$$

où W_Z est l'hamiltonien d'interaction avec le champ $\vec{B}$ (appelé aussi **hamiltonien Zeeman**).

1. Donner l'expression de l'opérateur **moment magnétique total** $\overrightarrow{M}$ de l'électron. En déduire l'expression de l'hamiltonien Zeeman W_Z.

On posera $\omega = -\gamma_0 B$ (pulsation de Larmor), où γ_0 est le rapport gyromagnétique orbital.

2. Quand **le champ magnétique** B **est très faible**, l'hamiltonien Zeeman W_Z peut s'écrire, dans chaque sous – espace propre, sous la forme suivante :

$$W_Z = \left(\frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2J(J+1)}\right)\omega J_z$$

a. Montrer que les vecteurs $|J, M\rangle$ sont des vecteurs propres de l'hamiltonien Zeeman W_Z, et donner les valeurs propres correspondantes.

b. En déduire **les énergies propres de l'hamiltonien total** $H = H_1 + W_Z$.

c. Quelle est alors l'effet du champ magnétique sur les niveaux d'énergie (**effet Zeeman**).

3. Rassembler les résultats dans un **diagramme des énergies** qui montre **les effets du couplage spin – orbite** et **du champ magnétique** sur les niveaux d'énergie.

UNIVERSITÉ IBN ZOHR
FACULTÉ DES SCIENCES
AGADIR

Année universitaire 2016 - 2017
Session de rattrapage – 07 Février 2017
Pr. NASSIK

Epreuve de Mécanique Quantique 2 – SMP5

Corrigé

Problème : Couplage spin - orbite et effet Zeeman

L'électron $2p$ est caractérisé par un moment cinétique orbital $\vec{L}$ de nombre quantique $(l=1)$ et un moment cinétique de spin $\vec{S}$ $(s=1/2)$.

On désigne par $\{|l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle\}$ que l'on notera simplement $\{|m_l, m_s=\pm\rangle\}$ la base des vecteurs propres communs aux observables L^2, S^2, L_z et S_z.

Partie I

1. **Espaces des états :**

- $l=1 \Rightarrow m=1, 0, -1$, donc :

$$\mathscr{E}_l = \{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\} \text{ et } \dim(\mathscr{E}_l)=3.$$

(0,5) - $s=\frac{1}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, donc :

$$\mathscr{E}_s = \left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right\} \equiv \{|+\rangle, |-\rangle\} \text{ et } \dim(\mathscr{E}_s)=2.$$

2. L'espace des états $\mathscr{E} = \mathscr{E}_l \otimes \mathscr{E}_s$ est donc de dimension 6, et est rapporté à la base découplée :

(0,5) $$\{|m_l, m_s=\pm\rangle\} = \{|1,+\rangle, |1,-\rangle, |0,+\rangle, |0,-\rangle, |-1,+\rangle, |-1,-\rangle\}$$

3. **$\vec{J}$ vérifie les relations de commutation caractéristiques des moments cinétiques :**

$$[J_x, J_y] = [L_x+S_x, L_y+S_y] = [L_x, L_y] + [S_x, S_y] = i\hbar(L_z+S_z) = i\hbar J_z$$

(0,5) Les deux autres relations $[J_y, J_z] = i\hbar J_x$ et $[J_z, J_x] = i\hbar J_y$ s'obtiennent de la même façon.

Ce qui montre que $\vec{J}$ est un moment cinétique.

4. **Montrons que :** $[J^2, J_z]=0$.

(0,5)
$$\begin{aligned}[J^2, J_z] &= [J_x^2, J_z] + [J_y^2, J_z] + [J_z^2, J_z] \\ &= J_x[J_x, J_z] + [J_x, J_z]J_x + J_y[J_y, J_z] + [J_y, J_z]J_y \\ &= -i\hbar J_x J_y - i\hbar J_y J_x + i\hbar J_y J_x + i\hbar J_x J_y \\ &= 0\end{aligned}$$

5. Le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est caractérisé par les nombres quantiques J et M.

Les valeurs possibles prises par les nombres J et M :

Les règles de sélection établies par la théorie d'addition des moments cinétiques sont :

$$|l-s| \leq J \leq l+s \quad , \quad -J \leq M \leq J$$

Ce qui implique les différentes valeurs prises par J et M :

1

J	M	$\lvert J,M\rangle$	Sous - espaces
$\frac{3}{2}$	$\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$	$\left\lvert\frac{3}{2},\pm\frac{3}{2}\right\rangle,\left\lvert\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathcal{E}\left(J=\frac{3}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\left\lvert\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle$	$\mathcal{E}\left(J=\frac{1}{2}\right)$

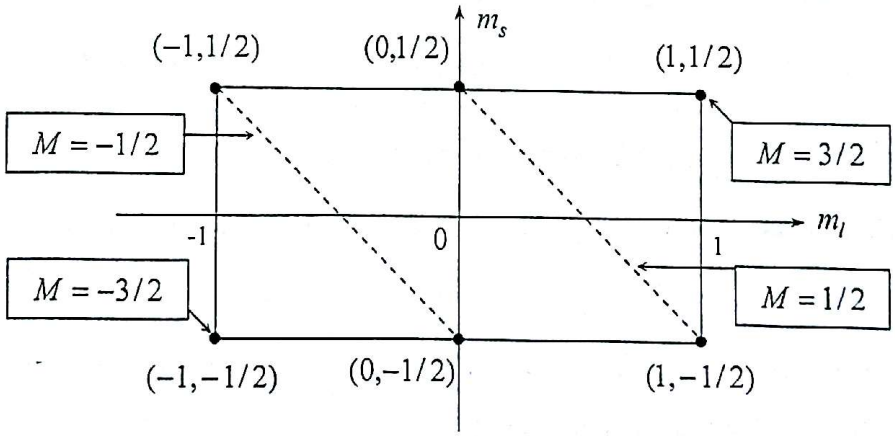
D'où la base commune de vecteurs propres :

$$\{|J,M\rangle\} = \left\{\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle\right\}$$

6. Degré de dégénérescence des différentes valeurs de M :

On utilisera la méthode du rectangle : on reporte les différentes valeurs de m_l et m_s sur un graphe où l'on représente les différents vecteurs $|m_l, m_s\rangle$ par des points de coordonnées (m_l, m_s). Le nombre de points sur une même droite parallèle à la deuxième bissectrice donne le degré de dégénérescence des valeurs de M.

1



Ainsi, les valeurs $M=\pm\frac{3}{2}$ sont non dégénérées, alors que les valeurs $M=\pm\frac{1}{2}$ sont deux fois dégénérées.

7. Expressions des vecteurs $|J, M\rangle$ en fonction des vecteurs $|m_l, m_s=\pm\rangle$:

i. Le sous – espace $\mathcal{E}\left(J=\frac{3}{2}\right)$:

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$:

La valeur maximale $M=\frac{3}{2}$ correspond à la seule combinaison possible $m_l=1$ et $m_s=\frac{1}{2}$. Donc, la valeur $M=\frac{3}{2}$ n'est pas dégénérée impliquant que les vecteurs $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ et $|1,+\rangle$ sont proportionnels :

0,5 $$\boxed{\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle=|1,+\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$:

La valeur minimale $M=-\frac{3}{2}$ correspond à la seule combinaison possible $m_l=-1$ et $m_s=-\frac{1}{2}$.

Donc :

0,5 $$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=|-1,-\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$:

Appliquons l'opérateur $J_-=L_-+S_-$ sur le ket $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle=(L_-+S_-)|1,+\rangle=\left(L_-|1,1\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+|1,1\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\Rightarrow\ \hbar\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar|1,1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\,|0,+\rangle+\hbar\,|1,-\rangle$$

D'où :

1 $$\boxed{\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|0,+\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,-\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$:

Ce vecteur peut être calculé de deux façons :

$$J_+\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \quad \text{ou} \quad J_-\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

- 1ère méthode : Appliquons l'opérateur $J_+=L_++S_+$ sur le ket $\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$:

$$J_+\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle=(L_++S_+)|-1,-\rangle=\left(L_+|1,-1\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+|1,-1\rangle\otimes\left(S_+\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$\Rightarrow\ \hbar\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar|1,-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\hbar\sqrt{2}\,|0,-\rangle+\hbar\,|-1,+\rangle$$

D'où :

1 $$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,|0,-\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}\,|-1,+\rangle}$$

- 2ème méthode : Appliquons l'opérateur $J_-=L_-+S_-$ sur le ket $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$:

$$J_-\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\,(L_-+S_-)|\,0\,,+\rangle+\frac{1}{\sqrt{3}}(L_-+S_-)|\,1\,,-\rangle$$

$$\Rightarrow\quad 2\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\left(L_-|\,1\,,0\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+|\,1\,,0\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]+$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(L_-|\,1\,,1\rangle\right)\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+|\,1\,,1\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)\right]$$

$$\Rightarrow\quad 2\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\hbar\sqrt{2}|\,1\,,-1\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle+\hbar|\,1\,,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right]+$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\hbar\sqrt{2}|\,1\,,0\rangle\otimes\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle+0\right]$$

$$\Rightarrow\quad 2\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{2}{\sqrt{3}}|-1\,,+\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|\,0\,,-\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|\,0\,,-\rangle$$

D'où le résultat.

ii. Le sous – espace $\mathscr{E}\left(J=\frac{1}{2}\right)$:

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$:

La valeur $M=\frac{1}{2}$ peut être réalisée de deux manières : $\left(m_l=0\,,m_s=\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(m_l=1\,,m_s=-\frac{1}{2}\right)$.

Donc, le vecteur $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ est proportionnel aux vecteurs $|\,0\,,+\rangle$ et $|\,1,-\rangle$:

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=a\,|1,-\rangle+b\,|\,0\,,+\rangle$$

- La condition de normalisation s'écrit : $|a|^2+|b|^2=1$

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ doit être orthogonal avec le vecteur $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$: $\sqrt{2}\,a+b=0$

Ces deux conditions impliquent :

$$a=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{i\theta}\quad,\quad b=\sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\theta}$$

En choisissant le réel $\theta=0$, on obtient :

$$(1)\qquad \boxed{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{3}}|\,0\,,+\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|\,1,-\rangle}$$

Puisque le vecteur est défini à un facteur de phase arbitraire, on accepte aussi l'expression :

$$\boxed{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}|\,0\,,+\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}|\,1,-\rangle}$$

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$:

La valeur $M=-\frac{1}{2}$ peut être réalisée de deux manières : $\left(m_l=0\,,\,m_s=-\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(m_l=-1\,,\,m_s=\frac{1}{2}\right)$.

Donc, le vecteur $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ est proportionnel aux vecteurs $|0\,,-\rangle$ et $|-1,+\rangle$:

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = a\,|0,-\rangle + b\,|-1\,,+\rangle$$

- La condition de normalisation s'écrit : $|a|^2+|b|^2=1$

- Le vecteur $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ doit être orthogonal avec le vecteur $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$: $\sqrt{2}\,a+b=0$

Ces deux conditions impliquent :

$$a=\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{i\theta}\quad,\quad b=-\sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\theta}$$

En choisissant le réel $\theta=0$, on obtient :

(1) $$\boxed{\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\,|0,-\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|-1\,,+\rangle}$$

Puisque le vecteur est défini à un facteur de phase arbitraire, on accepte aussi l'expression :

$$\boxed{\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,|0,-\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\,|-1\,,+\rangle}$$

Partie II

L'hamiltonien d'interaction spin – orbite W_{SO} est :

$$W_{SO}=a\,\vec{L}.\vec{S}$$

où a est une constante positive (constante de couplage spin – orbite).

L'hamiltonien total du système s'écrit alors :

$$H_1=H_0+W_{SO}$$

où $H_0=E_0.\mathrm{I}$ est l'hamiltonien atomique en l'absence du couplage ; l'énergie propre E_0 étant l'énergie de l'état $2p$.

1. Expression de l'hamiltonien W_{SO} en fonction des observables J^2, L^2 et S^2 :

Le moment cinétique de spin total est : $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$, donc :

$$J^2=(\vec{L}+\vec{S})^2=L^2+S^2+2\,\vec{L}.\vec{S}\quad\Rightarrow\quad\vec{L}.\vec{S}=\frac{1}{2}\left(J^2-L^2-S^2\right)$$

Donc :

1 $$\boxed{W_{SO} = a\,\vec{L}.\vec{S} = \frac{a}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right)}$$

2. Montrons que les vecteurs $|J, M\rangle$ sont des vecteurs propres de W_{SO} :

L'action de W_{SO} sur les vecteurs $|J, M\rangle$ est donnée par :

$$W_{SO}\,|J, M\rangle = \frac{a}{2}\left(J^2 - \frac{11}{4}\hbar^2.\mathrm{I}\right)|J, M\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left(J(J+1) - \frac{11}{4}.\mathrm{I}\right)|J, M\rangle$$

Donc :

$$W_{SO}\left|J = \frac{3}{2}, M\right\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left|J = \frac{3}{2}, M\right\rangle \quad , \quad W_{SO}\left|J = \frac{1}{2}, M\right\rangle = -a\hbar^2\left|J = \frac{1}{2}, M\right\rangle$$

D'où :

2
$$W_{SO}\left|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle$$
$$W_{SO}\left|\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{a\hbar^2}{2}\left|\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$W_{SO}\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle = -a\hbar^2\left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$$

3. Les énergies propres et les états propres de l'hamiltonien total H_1 :

Comme H_0 est proportionnel à la matrice identité, on en conclut que l'hamiltonien total $H_1 = H_0 + W_{SO}$ est diagonal dans la base $\{|S, M\rangle\}$ et que, par conséquent, les vecteurs $|J, M\rangle$ sont vecteurs propres de H_1. Les énergies propres et les états propres de H_1 sont résumés dans le tableau suivant :

1

Energies propres de H_1	Vecteurs propres	Dégénérescence
$E_0 + \frac{a\hbar^2}{2}$	$\left\|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\right\rangle, \left\|\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	4
$E_0 - a\hbar^2$	$\left\|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$	2

4. L'effet du couplage spin – orbite sur les niveaux d'énergie de H_0 :

Le couplage spin – orbite W_{SO} divise le niveau $2p$ d'énergie E_0 en deux sous – niveaux :

1
- un niveau multiplet, noté $2p_{\frac{3}{2}}$, d'énergie $\left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2}\right)$;
- un niveau doublet, noté $2p_{\frac{1}{2}}$, d'énergie $(E_0 - a\hbar^2)$.

Partie III

On applique au système un champ magnétique statique $\vec{B}$, dirigé selon l'axe Oz, de sorte que l'hamiltonien total du système devient :

$$H = H_0 + W_{SO} + W_Z$$

où W_Z est l'hamiltonien Zeeman.

1. Expression de l'opérateur moment magnétique total de l'électron :

L'opérateur moment magnétique total de l'électron est la somme des moments magnétiques associés aux moments cinétiques orbital et de spin :

$$\vec{M} = \gamma_o \vec{L} + \gamma_s \vec{S} = \gamma_o (\vec{L} + g_s \vec{S})$$

Or, pour l'électron $g_s \approx 2$, donc :

(0,5) $$\boxed{\vec{M} = -\gamma_0 (\vec{L} + 2\vec{S})}$$

où γ_0 est le rapport gyromagnétique orbital.

- **Expression de l'hamiltonien Zeeman W_Z :**

Dans un champ magnétique $\vec{B} = B.\vec{e}_z$, l'hamiltonien d'interaction entre ce dernier et le moment magnétique total de l'électron est :

$$W_Z = -\vec{M}.\vec{B} = -\gamma_o \vec{B}.(\vec{L} + 2\vec{S}) = -\gamma_o B.(L_z + 2S_z)$$

Donc :

(0,5) $$\boxed{W_Z = \omega\,(L_z + 2S_z)}$$

où $\omega = -\gamma_0 B$ est la pulsation de Larmor.

2. On suppose que le champ magnétique B est très faible de sorte que l'hamiltonien d'interaction W_Z puisse s'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{W_Z = \left(\frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2J(J+1)}\right)\omega J_z}$$

a. Montrons que les vecteurs $|J, M\rangle$ sont des vecteurs propres de W_Z :

L'action de W_{SO} sur les vecteurs $|J, M\rangle$ est donnée par :

$$W_Z\,|J,M\rangle = \left(\frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2J(J+1)}\right)\omega J_z\,|J,M\rangle = \left(\frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2J(J+1)}\right)M\hbar\omega\,|J,M\rangle$$

Donc :

$$W_Z\left|J = \frac{3}{2}, M\right\rangle = \frac{4}{3}M\hbar\omega\left|J = \frac{3}{2}, M\right\rangle \quad , \quad W_Z\left|J = \frac{1}{2}, M\right\rangle = \frac{2}{3}M\hbar\omega\left|J = \frac{1}{2}, M\right\rangle$$

D'où :

$$W_Z\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = 2\hbar\omega\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle \quad , \quad W_Z\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{2}{3}\hbar\omega\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

(1,5)
$$W_Z\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{2}{3}\hbar\omega\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad W_Z\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = -2\hbar\omega\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$W_Z\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{3}\hbar\omega\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad W_Z\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{1}{3}\hbar\omega\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Ainsi, les vecteurs $|J, M\rangle$ sont vecteurs propres de l'hamiltonien W_Z.

b. Les énergies propres de l'hamiltonien total $H = H_1 + W_Z$:

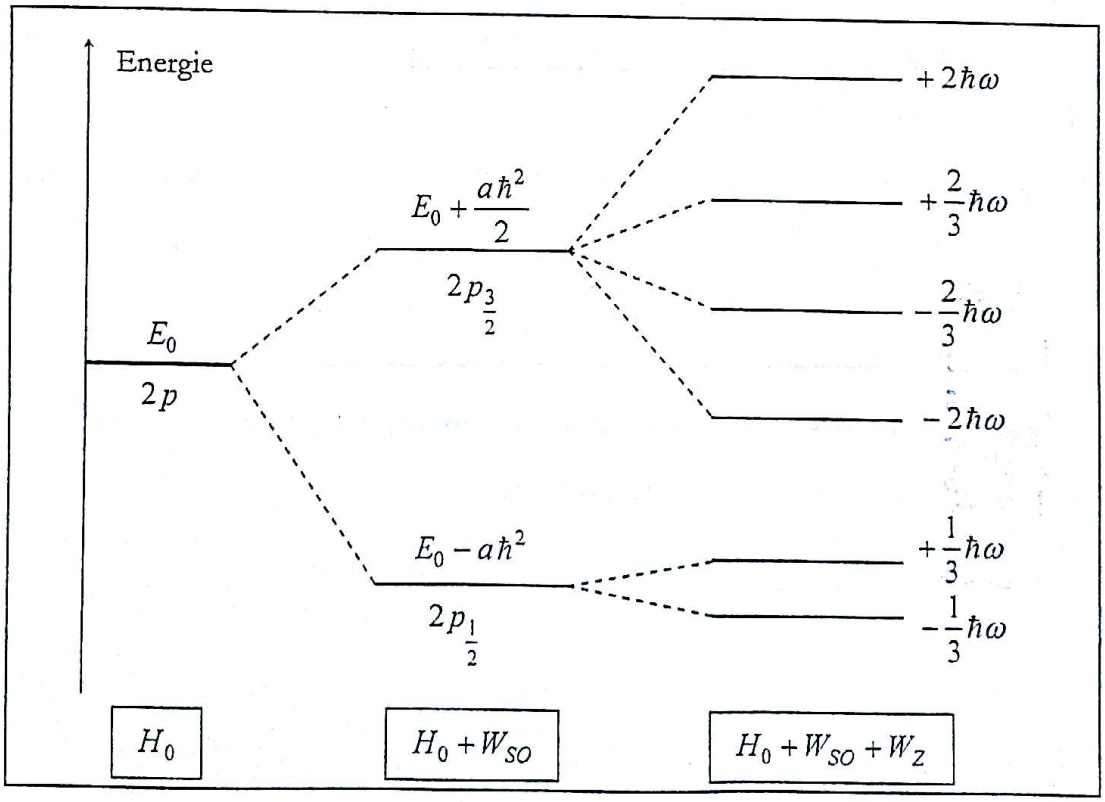
$$H\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2} + 2\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle \quad , \quad H\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2} + \frac{2}{3}\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$$

(1,5)
$$H\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2} - \frac{2}{3}\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad H\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left(E_0 + \frac{a\hbar^2}{2} - 2\hbar\omega\right)\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$H\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left(E_0 - a\hbar^2 + \frac{1}{3}\hbar\omega\right)\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad H\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \left(E_0 - a\hbar^2 - \frac{1}{3}\hbar\omega\right)\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

c. Effet du champ magnétique sur les niveaux d'énergie :

(1) Comme le montrent les résultats résumés ci-dessus, **l'application d'un champ magnétique faible lève complètement la dégénérescence des niveaux d'énergie : c'est l'effet Zeeman.**

3. Diagramme des énergies :

(1)