Université Ibn Zohr
Faculté Polydisciplinaire
Ouarzazate, Maroc

جامعة ابن زهر
الكلية متعددة التخصصات
ورزازات، المغرب

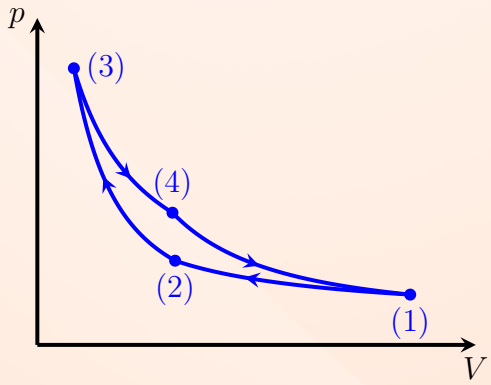
Correction de l'Épreuve de Thermodynamique II *
Responsable : H. Chaib
Filière : TEER, **Semestre** : 3, **Année** : 2014/2015
Date : 23-01-2015 à 10:15, **Durée** : 90 min

Question de Cours

Une transformation isobare est une transformation au cours de laquelle la pression du système reste constante. Alors qu'une transformation monobare est une transformation au cours de laquelle la pression du système peut varier mais la pression du milieu extérieur (c.-à-d. la pression à la surface délimitant le système) reste constante.

Problème 1

1. Les états (1) et (3) sont les états extrêmes de cycle de Carnot. La pression et la température de l'état (1) sont petites par rapport à celles de l'état (3) donc l'état (1) est située en bas par rapport à l'état (3) sur le diagramme de Clapeyron. Pour déterminer les positions des deux autres états, on considère le fait que le sens d'évolution du cycle moteur de Carnot est celui des aiguilles d'une montre (figure ci-dessous).



2. Selon l'équation d'état des gaz parfaits, on peut écrire :

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \tag{1}$$

avec :

$$n = \frac{p_3 V_3}{RT_3} \tag{2}$$

A.N. : $n = 0{,}230$ mol et $V_1 = 5{,}602$ l.

*. La version électronique de l'énoncé et la correction de cette épreuve seront publiés en ligne, quelques heures après la date affichée ci-dessus, sur le site Web : http://196.200.181.135/chaib/teaching/.

3. Les transformations (1)-(2) et (3)-(4) sont des isothermes, alors :

$$T_2 = T_1 \qquad \text{et} \qquad T_4 = T_3 \tag{3}$$

Les transformations (2)-(3) et (4)-(1) sont des isentropes, alors :

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \qquad \text{ou} \qquad T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \tag{4}$$

soit :

$$V_2 = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_3 \tag{5}$$

et :

$$p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} \tag{6}$$

$\gamma = \frac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{V}} = \frac{5}{3}$ pour un gaz parfait monoatomique.
De même :

$$p_4 V_4^\gamma = p_1 V_1^\gamma \qquad \text{ou} \qquad T_4 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \tag{7}$$

soit :

$$V_4 = \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_1 \tag{8}$$

et :

$$p_4 = \frac{nRT_4}{V_4} \tag{9}$$

A.N. : $V_2 = 2{,}385$ l, $p_2 = 2{,}349$ bar, $V_4 = 2{,}349$ l et $p_4 = 4{,}257$ bar.

4. Étant donné que pour une transformation isotherme, la variation de l'énergie interne U est nulle, alors pour la transformation isotherme (1)-(2), la quantité de chaleur est donnée par :

$$Q_{12} = -W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} \tag{10}$$

d'où :

$$Q_{12} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{11}$$

ou encore :

$$Q_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{12}$$

De même, pour la transformation isotherme (3)-(4), la quantité de chaleur est donnée par :

$$Q_{34} = p_3 V_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \tag{13}$$

A.N. : $Q_{12} = -478{,}47$ J et $Q_{34} = 854{,}06$ J.

5. On sait que la variation de l'énergie interne, qui est une fonction d'état, sur un cycle fermé est nulle :

$$\Delta U = \sum_i W_i + \sum_i Q_i = 0 \tag{14}$$

soit :

$$W_\mathrm{u} = \sum_i W_i = -\sum_i Q_i \tag{15}$$

c'est à dire :

$$W_\mathrm{u} = -(Q_{12} + Q_{34}) \tag{16}$$

A.N. : $W_\mathrm{u} = -375{,}59$ J.

Problème 2

1. Pour un gaz parfait, on a :

$$\gamma = \frac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{V}} \qquad \text{et} \qquad C_\mathrm{p} - C_\mathrm{V} = nR \tag{17}$$

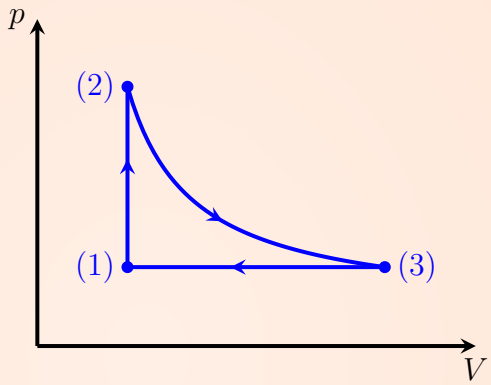
soit :

$$C_\mathrm{p} = \gamma C_\mathrm{V} = C_\mathrm{V} + nR \tag{18}$$

Il en découle :

$$C_\mathrm{V} = \frac{nR}{\gamma - 1} \qquad \text{et} \qquad C_\mathrm{p} = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \tag{19}$$

2. Représentation du cycle sur le diagramme de Clapeyron (figure ci-dessous).



3. À partir de la définition du travail utile, on peut écrire :

$$W_\mathrm{u} = \sum_i W_i = -\sum_i Q_i \tag{20}$$

soit :

$$W_\mathrm{u} = -(Q_{12} + Q_{31}) \tag{21}$$

car la quantité de chaleur Q_{23} échangée au cours de la transformation isentrope (2)-(3) est nulle (c.-à-d. $Q_{23} = 0$). Cependant, pour la transformation isochore (1)-(2), on peut écrire :

$$\delta Q = \mathrm{d}U = C_\mathrm{V}\mathrm{d}T \tag{22}$$

car le travail mis en jeux est nul (c.-à-d. $\delta W = -p\mathrm{d}V = 0$). Alors :

$$Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} C_\mathrm{V}\mathrm{d}T = C_\mathrm{V}(T_2 - T_1) \tag{23}$$

Pour la transformation isobare (3)-(1), on a :

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = \mathrm{d}U + \mathrm{d}(pV) = \mathrm{d}H \tag{24}$$

soit

$$\delta Q = C_\mathrm{p}\mathrm{d}T \tag{25}$$

et par conséquent :

$$Q_{31} = \int_{T_3}^{T_1} C_\mathrm{p}\mathrm{d}T = C_\mathrm{p}(T_1 - T_3) \tag{26}$$

d'où :

$$W_{\mathrm{u}} = -(C_{\mathrm{V}}(T_2 - T_1) + C_{\mathrm{p}}(T_1 - T_3)) \tag{27}$$

ou encore :

$$W_{\mathrm{u}} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) + \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_1) \tag{28}$$

4. L'efficacité thermique de ce cycle est donné par :

$$\eta = \frac{|W_{\mathrm{utile}}|}{|Q_{\mathrm{fournie}}|} \tag{29}$$

Selon le diagramme ci-dessus, on peut constater que $T_1 < T_2$ (car $T_1 = \frac{p_1}{p_2}T_2$ et $p_2 > p_1$) et que $T_1 < T_3$ (car $T_1 = \frac{V_1}{V_3}T_3$ et $V_3 > V_1$). Il en résulte que $Q_{12} > 0$ et $Q_{23} < 0$ c'est à dire $Q_{\mathrm{fournie}} = Q_{12}$ et par conséquent :

$$\eta = \left|\frac{W_{\mathrm{u}}}{Q_{12}}\right| \tag{30}$$

soit :

$$\eta = \left|\frac{C_{\mathrm{V}}(T_2 - T_1) + C_{\mathrm{p}}(T_1 - T_3)}{C_{\mathrm{V}}(T_2 - T_1)}\right| \tag{31}$$

ou aussi :

$$\eta = \left|1 - \gamma\frac{T_3 - T_1}{T_2 - T_1}\right| \tag{32}$$

5. Pour la transformation isobare (1)-(3), on a $\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_3}{V_3}$ d'où :

$$T_1 = \frac{V_1}{V_3}T_3 = a^{-1}T_3 \tag{33}$$

Pour la transformation isentrope (2)-(3), on a $T_2V_2^{\gamma-1} = T_3V_3^{\gamma-1}$ d'où :

$$T_2 = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_3 = a^{\gamma-1}T_3 \tag{34}$$

car $V_2 = V_1$.

6. La nouvelle expression de l'efficacité thermique du cycle s'ecrit :

$$\eta = \left|1 - \gamma\frac{(1 - a^{-1})T_3}{(a^{\gamma-1} - a^{-1})T_3}\right| \tag{35}$$

soit :

$$\eta = \left|1 - \gamma\frac{1 - a^{-1}}{a^{\gamma-1} - a^{-1}}\right| \tag{36}$$

ou encore :

$$\eta = \left|1 - \gamma\frac{a - 1}{a^{\gamma} - 1}\right| \tag{37}$$

7. Le rendement ρ du cycle s'écrit :

$$\rho = \frac{\eta}{\eta_{\mathrm{Carnot}}} \tag{38}$$

avec $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - a^{-\gamma}$. Alors :

$$\rho = \frac{1}{1 - a^{-\gamma}} \left| 1 - \gamma \frac{a-1}{a^\gamma - 1} \right| \tag{39}$$

soit aussi :

$$\rho = \frac{a}{a-1} \left| 1 - \gamma \frac{a-1}{a^\gamma - 1} \right| \tag{40}$$

ou encore :

$$\rho = \left| \frac{a}{a-1} - \frac{\gamma a}{a^\gamma - 1} \right| \tag{41}$$

Problème 3

1. Pour une transformation adiabatique réversible, l'entropie créée est nulle (c.-à-d. $S_\text{c} = 0$). Pour la transformation adiabatique en question, l'entropie créée (qui s'appelle aussi entropie globale) s'écrit :

$$S_\text{c} = \Delta S + \Delta S_\text{ext} \tag{42}$$

où $\Delta S = S_2 - S_1$ représente la variation de l'entropie du système et $\Delta S_\text{ext} = -\frac{Q}{T_\text{ext}}$ représente la variation de l'entropie du milieu extérieur (qui s'appelle aussi entropie échangée avec le milieu extérieur). Cette dernière est nulle, car il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur. Alors :

$$S_\text{c} = S_2 - S_1 \tag{43}$$

D'après le tableau, l'entropie créée au cours de la transformation en question n'est pas nulle (car $S_2 \neq S_1$) et par conséquent la transformation est irréversible.

2. La détente est adiabatique, alors la chaleur échangée $Q = 0$ et par conséquent :

$$W = \Delta U = U_2 - U_1 \tag{44}$$

A.N. : $W = -10{,}69$ kJ.

3. La transformation est considérée comme étant polytrope de coefficient η, alors :

$$p_1 V_1^\eta = p_2 V_2^\eta \tag{45}$$

ce qui implique :

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\eta \tag{46}$$

d'où :

$$\eta = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} \tag{47}$$

A.N. : $\eta = 1{,}238$.

4. Pour une transformation polytrope, on a :

$$\delta W' = -p\mathrm{d}V = -\frac{p_1 V_1^\eta}{V^\eta}\mathrm{d}V \tag{48}$$

soit :

$$W' = -p_1 V_1^\eta \int_{V_1}^{V_2} V^{-\eta}\mathrm{d}V \tag{49}$$

d'où :

$$W' = -\frac{p_1 V_1^{\eta}}{1-\eta}\left(V_2^{1-\eta} - V_1^{1-\eta}\right) \tag{50}$$

ou encore :

$$W' = -\frac{1}{1-\eta}\left(p_2 V_2 - p_1 V_1\right) \tag{51}$$

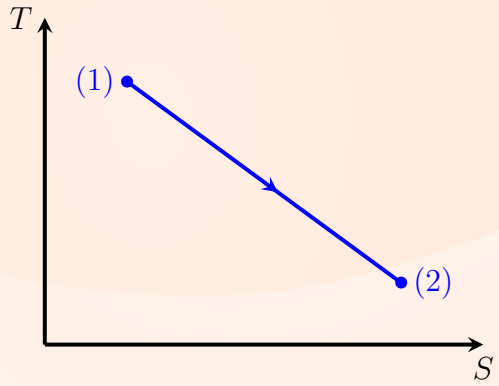
A.N. : $W' = -13{,}275$ kJ.

5. On remarque que le modèle polytrope utilisé donne une description du travail avec une erreur relative $\left(\left|\frac{W'-W}{W}\right|\right)$ de 24,18%. Ceci signifie que ce modèle n'est pas assez efficace pour décrire la détente en question.
6. La nouvelle transformation est représentée sur le diagramme (T, S) par une évolution linéaire (voir figure). Alors, elle est régie par une équation de la forme :

$$T = \alpha S + \beta \tag{52}$$

où la pente α de cette évolution et l'ordonnée β à l'origine des abscisses sont données par :

$$\alpha = \frac{T_2 - T_1}{S_2 - S_1} \qquad \text{et} \qquad \beta = T_1 - \alpha S_1 \tag{53}$$



Selon la définition de l'entropie, on peut écrire :

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q^*}{T} \tag{54}$$

alors :

$$\delta Q^* = T\mathrm{d}S \tag{55}$$

ce qui implique :

$$Q^* = \int_{S_1}^{S_2} T\mathrm{d}S \tag{56}$$

soit, en remplaçant T par son expression :

$$\begin{aligned} Q^* &= \int_{S_1}^{S_2} (\alpha S + \beta)\,\mathrm{d}S \\ &= \left[\frac{\alpha}{2}S^2 + \beta S\right]_{S_1}^{S^2} \end{aligned} \tag{57}$$

d'où :

$$Q^* = \frac{\alpha}{2}\left(S_2^2 - S_1^2\right) + \beta(S_2 - S_1) \tag{58}$$

Le travail mis en jeu au cours de cette transformation s'écrit :

$$W^* = \Delta U - Q^* \tag{59}$$

soit :

$$W^* = U_2 - U_1 - Q^* \tag{60}$$

A.N. : $Q^* = 2{,}865$ kJ et $W^* = -13{,}555$ kJ.

7. Cette deuxième transformation peut être décrite, d'une manière efficace, par le modèle polytrope précédent car l'erreur relative $\left(\left|\frac{W'-W^*}{W^*}\right|\right)$ faite sur le calcul du travail, qui est de 2,066%, et relativement faible.