Année universitaire 2006-2007

Première année de l' ensem

CFS de mathématiques

M*athématiques pour l'*I*ngénieur - S*2

Analyse complexe

Emmanuel Plaut

Table des matières

Introduction **1**

1 Dérivabilité complexe - Applications conformes **3**

1.1 Rappels généraux sur les nombres complexes . . . 3

1.2 Définitions et notations . . . 5

1.3 Dérivabilité complexe - Holomorphie . . . 6

1.4 Lien entre holomorphie et conformité . . . 8

1.5 Exercices et problèmes . . . 11

Ex. 1.1 : Limites dans le plan complexe . . . 11

Ex. 1.2 : Dérivabilité complexe . . . 12

Ex. 1.3 : Classe de fonctions holomorphes . . . 12

Ex. 1.4 : Détermination d'une fonction holomorphe par sa partie réelle . . . 12

Ex. 1.5 : Réciproque de la proposition 1.5 . . . 12

Ex. 1.6 : Fonctions holomorphes constantes . . . 12

Ex. 1.7 : « Conjuguées » de fonctions holomorphes . . . 12

Ex. 1.8 : Conditions de Cauchy en coordonnées polaires . . . 12

Pb. 1.1 : Transformations homographiques . . . 13

Pb. 1.2 : Transformation de Joukovski . . . 14

2 Théorèmes d'intégration et premières conséquences **15**

2.1 Intégrale curviligne - Théorème de Cauchy . . . 15

2.2 Formule intégrale de Cauchy . . . 18

2.3 Premières conséquences . . . 19

2.3.1 Infinie dérivabilité des fonctions holomorphes . . . 19

2.3.2 Lien entre fonctions holomorphes et harmoniques . . . 20

2.4 Exercices et problème . . . 23

Ex. 2.1 : Calcul d'intégrales curvilignes . . . 23

Ex. 2.2 : Existence de primitives - Théorème de Morera . . . 23

Ex. 2.3 : Sur le lien entre fonctions holomorphes et harmoniques . . . 23

Pb. 2.1 : Fonctions biharmoniques . . . 24

3 Fonctions analytiques **25**

3.1 Séries entières dans $\mathbb{C}$ . . . 25

3.2 Identité entre fonctions holomorphes et analytiques . . . 27

3.3 Propriétés des fonctions analytiques . . . 28

3.3.1 Principe d'identité . . . 28

3.3.2 Propriété de la moyenne et principe du maximum . . . 30

3.3.3 Théorèmes de Liouville et de d'Alembert . . . 31

3.4 Fonctions analytiques usuelles . . . 32

3.4.1 Fonction exponentielle . . . 33

3.4.2 Fonctions hyperboliques . . . 33

3.4.3 Fonctions trigonométriques . . . 34

3.4.4 Fonctions tangente et tangente hyperbolique . . . 36

3.4.5 Détermination principale de la fonction logarithme . . . 36

3.4.6 Fonctions w^α . . . 37

3.5 Exercices et problèmes . . . 37

Pb. 3.1 : Critères de convergence d'une série entière - Applications . . . 38

Ex. 3.1 : Développements explicites en série de Taylor . . . 38

Ex. 3.2 : Fonction erreur . . . 39

Ex. 3.3 : Simplification de $\sqrt{z^2}$ . . . 39

Ex. 3.4 : Fonctions trigonométriques complexes . . . 39

Pb. 3.2 : Sur la fonction arcsinus . . . 39

Pb. 3.3 : Sur la fonction arctangente et le calcul de π . . . 40

Ex. 3.5 : Structure d'une fonction analytique au voisinage d'un point selle . . . 40

Ex. 3.6 : Fonctions holomorphes bornées par une puissance de z . . . 41

Ex. 3.7 : Application du principe du maximum . . . 41

Pb. 3.4 : Résolution d'un problème issu de la thermique . . . 41

Pb. 3.5 : Résolution d'un problème issu de l'électricité . . . 42

Pb. 3.6 : Résolution du problème de Dirichlet à l'intérieur et à l'extérieur d'un cercle . . . 42

Pb. 3.7 : Résolution d'un problème issu de la mécanique des fluides . . . 43

Pb. 3.8 : Polynômes de Legendre . . . 44

4 Séries de Laurent - Résidus **45**

4.1 Séries de Laurent . . . 45

4.2 Théorème des résidus . . . 47

4.3 Application au calcul d'intégrales . . . 49

4.3.1 Intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ . . . 49

4.3.2 Intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(iqx)\,dx$ . . . 50

4.3.3 Intégrales du type $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta$ . . . 53

4.4 Théorème des résidus avec point à l'infini 54
4.5 Exercices et problèmes 55
Ex. 4.1 : Retour sur le théorème de développement en série de Taylor 55
Ex. 4.2 : Développements en séries de Laurent 55
Ex. 4.3 : Multiplication de deux séries de Laurent 55
Ex. 4.4 : Développements en séries de Laurent grâce aux nombres de Bernoulli 56
Ex. 4.5 : Fonctions holomorphes reliées par une inégalité sur leur module 56
Ex. 4.6 : Singularités essentielles 56
Ex. 4.7 : Calcul d'intégrales grâce au théorème des résidus 56
Ex. 4.8 : Étude d'une intégrale dépendant de deux paramètres 57
Pb. 4.1 : Intégrale comptant les zéros et les pôles - Théorème de Rouché 58
Pb. 4.2 : Fonctions de Bessel 59

A Problèmes corrigés **61**

Bibliographie **67**

Introduction

Ce cours constitue le deuxième module de mathématiques pour l'ingénieur à l'ENSEM, ou « MI-2 ». Il propose quelques éléments d'***analyse complexe***, sous-discipline de l'analyse visant à étudier les fonctions « régulières » d'une variable complexe. La définition de la « régularité » exigée viendra très vite, dans la section 1.3, et vous semblera peut-être étonnamment simple. Cependant ce cours tout entier suffira à peine à épuiser toutes les propriétés remarquables qui en découlent, et que nous découvrirons au fur et à mesure.

D'un point de vue ***fondamental***, outre la qualité esthétique de l'analyse complexe liée à ce que nous avons dit[1], son intérêt réside dans ses très nombreux liens à des domaines connexes des mathématiques. Nous mettrons donc en œuvre un certain nombre de méthodes et de notions abordées dans le premier module de mathématiques pour l'ingénieur à l'ENSEM, ou « MI-1 » (Antoine 2006) : nous ferons appel à la théorie des fonctions de plusieurs variables, à l'analyse vectorielle ; nous donnerons des ouvertures sur la topologie et la géométrie différentielle - d'ailleurs les notions de simple connexité par exemple ont été introduite historiquement pour l'analyse complexe - ; nous apprendrons à faire des changements de variable conformes dans une équation aux dérivées partielles ; nous démontrerons l'unicité et en problème l'existence de solutions d'un problème défini par une équation aux dérivées partielles ; etc...

Ces motivations fondamentales et « culturelles » sont bien sûr mélées aux nombreuses possibilités d'***applications*** de l'analyse complexe. Nous ne pouvons en présenter que quelques unes... Naturellement, les nombres complexes constituent un outil de choix pour l'étude des phénomènes oscillants quels qu'ils soient. Cet aspect sera abordé au chapitre 3, où nous présenterons la très utile fonction exponentielle et les très utiles fonctions trigonométriques. Le théorème des résidus et ses applications au calcul intégral seront bien sûr présentés, dans le chapitre 4 ; on reviendra alors sur les fonctions trigonométriques et les intégrales de Fourier en particulier. On peut mentionner qu'en théorie des équations différentielles ordinaires, en automatique et plus particulièrement en régulation-stabilité, les fonctions analytiques et des théorèmes de calcul intégral tels ceux abordés dans le problème 4.1 trouvent de nombreuses applications, en lien avec la caractérisation des systèmes dynamiques par leur fonction de transfert, ou, plus fondamentalement, en lien avec les transformées de Fourier-Laplace (cf. par exemple le cours de Iung 2004). Nous insisterons plutôt ici sur les applications liées aux équations aux dérivées partielles, en l'occurrence à la recherche de fonctions harmoniques ; en ce sens-là les problèmes 3.4 à 3.7 constituent l'un des sommets de ce cours... Un problème de ce type sera d'ailleurs traité en TD Mathematica. Il importe de signaler que le plan pratique de déroulement de ce cours ainsi que quelques consignes sont présentés sur la page web évolutive

www.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/ac

que je vous invite à consulter régulièrement. Une sélection d'exercices ou de problèmes à préparer pour les 4 séances de TDs classiques (1 TD d'1 heure suivi de 3 TDs de 2 heures) est affichée sur cette page ; d'autre part le sujet du TD Mathematica (qui suivra ces TDs classiques et durera 3 heures) sera publié sur cette page courant mars.

[1] S'il est une « belle théorie » mathématique c'est peut-être celle-là, qui part d'un minimum d'hypothèses pour arriver à quantité de résultats extrêmement puissants.

Je remercie Didier Bernardin et Olivier Séro-Guillaume pour leurs remarques, qui m'ont permis d'améliorer ce document.

Nancy, le 27 février 2008.

Emmanuel Plaut.

Chapitre 1

Dérivabilité complexe - Applications conformes

1.1 Rappels généraux sur les nombres complexes

L'ensemble des ***nombres complexes***

$$\mathbb{C} \;=\; \{x+iy \quad \text{avec} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

et i l'***imaginaire pur*** forme, muni des lois d'addition

$$(x+iy) \;+\; (x'+iy') \;=\; (x+x') \;+\; i(y+y') \tag{1.1}$$

et de multiplication

$$(x+iy)\,(x'+iy') \;=\; xx'-yy' \;+\; i(yx'+xy')\;, \tag{1.2}$$

un ***corps commutatif***. En particulier tout élément non nul de $\mathbb{C}$, i.e. tout élément de $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$, possède un inverse donné par

$$\frac{1}{x+iy} \;=\; \frac{x-iy}{x^2+y^2}\;. \tag{1.3}$$

Naturellement la loi (1.2) conduit à l'identité

$$i^2 \;=\; -1\;. \tag{1.4}$$

D'un point de vue géométrique, le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ peut être identifié à $\mathbb{C}$ en faisant correspondre à tout point (ou vecteur) de coordonnées (ou composantes) (x,y) son ***affixe*** $z=x+iy$. On dit aussi que $z=x+iy$ est un point du ***plan complexe*** ; son ***complexe conjugué*** est noté $\overline{z}=x-iy$. La norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ s'identifie au ***module*** complexe

$$|z| \;=\; \sqrt{z\overline{z}} \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\;, \tag{1.5}$$

et ces notions permettent de récrire (1.3) sous la forme

$$\forall z\in\mathbb{C}^*, \quad \frac{1}{z} \;=\; \frac{\overline{z}}{|z|^2}\;. \tag{1.6}$$

Rappelons que la norme du module vérifie par nature les propriétés

$$\text{d'homogénéité,} \qquad \forall z,z'\in\mathbb{C}, \quad |zz'| \;=\; |z|\,|z'|\;, \tag{1.7}$$

$$\text{de séparation,} \qquad \forall z\in\mathbb{C}, \quad |z|=0 \quad\Longleftrightarrow\quad z=0\;, \tag{1.8}$$

$$\text{et l'inégalité triangulaire,} \qquad \forall z,z'\in\mathbb{C}, \quad |z+z'| \;\leq\; |z|+|z'|\;. \tag{1.9}$$

On en déduit

$$\forall z,z'\in\mathbb{C}, \quad |z-z'| \;\geq\; \big||z|-|z'|\big|\;. \tag{1.10}$$

On aura parfois intérêt à introduire les ***coordonnées polaires*** de z soit, en anticipant sur les définitions de la section 3.4 :

$$\begin{array}{rcl} z & = & \rho\, e^{i\theta} \;=\; \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \text{où} \quad \rho & = & |z|\;,\;\; \theta \;=\; \arg(z) \text{ est l'}\textbf{\textit{argument}} \text{ de } z\;. \end{array} \tag{1.11}$$

Cet argument n'est défini univoquement qu'à condition de *choisir* son intervalle de valeurs, par exemple

$$\arg z \;\in\;]-\pi,\pi]\;. \tag{1.12}$$

En effet θ tel que $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est déterminé qu'à 2π près ; en d'autres termes la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité ; on ne peut donc en définir un inverse continu sur tout le cercle unité. La fonction argument définie ici[1] n'est continue que sur $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite $\mathbb{R}^- = \{z = x \text{ avec } x < 0\}$; un tel domaine est aussi appelé une ***coupure*** de $\mathbb{C}$.

Rappelons enfin qu'***il n'existe pas de relation d'ordre totale sur*** $\mathbb{C}$ qui soit compatible avec l'addition et la multiplication, contrairement au cas de $\mathbb{R}$.

Une relation d'ordre $x \le y$ sur $\mathbb{C}$ devrait être réflexive,

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x \le x\;,$$

antisymétrique,

$$\forall x,y \in \mathbb{C}, \qquad [(x \le y) \quad \text{et} \quad (y \le x)] \quad \Longrightarrow \quad (x = y)\;,$$

et transitive

$$\forall x,y,z \in \mathbb{C}, \qquad [(x \le y) \quad \text{et} \quad (y \le z)] \quad \Longrightarrow \quad (x \le z)\;.$$

Sa *compatibilité avec l'addition* voudrait dire que

$$\forall x,y,z \in \mathbb{C}, \qquad x \le y \quad \Longrightarrow \quad x + z \le y + z\;,$$

et sa *compatibilité avec la multiplication* que

$$\forall x,y,z \in \mathbb{C}, \qquad [(x \le y) \quad \text{et} \quad (0 \le z)] \quad \Longrightarrow \quad xz \le yz\;.$$

De la compatibilité avec l'addition on déduirait que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x \le 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le -x\;.$$

De la compatibilité avec la multiplication on déduirait que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad 0 \le x \quad \Longrightarrow \quad 0 \le x^2\;.$$

Enfin de ces deux dernières propriétés on déduirait que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x \le 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le x^2\;.$$

Donc si l'ordre était *total*,

$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad (x \le 0) \quad \text{ou} \quad (0 \le x)\;,$$

tous les carrés seraient « positifs ». Donc $1 = 1^2$ et $-1 = i^2$ seraient « positifs ». De $0 \le 1$ et $0 \le -1$ i.e. $1 \le 0$ on déduirait avec la propriété d'antisymétrie que $0 = 1$, ce qui n'est pas.

Qu'on s'abstienne donc, en conséquence, d'assertions abominables comme « $1 + z^2$ *est toujours strictement positif donc ne s'annule pas sur* $\mathbb{C}$ » !... D'ailleurs on sait que $\mathbb{C}$ est ***algébriquement clos***... et on va en fait le (re)démontrer dans le chapitre 3, cf. le théorème 3.6 p. 32.

[1] On aurait pu choisir un autre intervalle de valeurs de la fonction argument, par exemple $\arg' z \in [0,2\pi[$; la coupure correspondante aurait alors été le plan complexe privé de $\mathbb{R}^+ = \{z = x \text{ avec } x > 0\}$. Nous reviendrons sur ce problème très important de la définition de l'argument au chapitre 3 lorsque, après avoir défini proprement la fonction exponentielle complexe, nous essaierons de définir son inverse, la fonction logarithme complexe (cf. la section 3.4.5).

1.2 Définitions et notations

Un ***chemin*** du plan complexe $\mathbb{C}$ est une courbe paramétrée régulière par morceaux tracée dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ d'un intervalle $[t_1,t_2]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est continue, continûment dérivable par morceaux ; on supposera en plus que la dérivée $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, lorsqu'elle est définie, ne s'annule pas.

On désignera par U un ***ouvert*** du plan complexe $\mathbb{C}$. U sera toujours supposé ***connexe***[2], c'est-à-dire tel que deux points quelconques de U peuvent toujours être reliés par un chemin $z(t)$ entièrement inclus dans U. On s'intéressera aux propriétés des applications f de U dans $\mathbb{C}$. On pourra aussi voir une telle application soit comme une application de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, soit comme un couple d'applications de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$,

$$f(x+iy) \;=\; P(x,y) + iQ(x,y)$$

où P est la ***partie réelle***, Q est la ***partie imaginaire*** de f :

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \mathrm{Re} f(x+iy)\ , \\ Q(x,y) &= \mathrm{Im} f(x+iy)\ . \end{aligned}$$

Rappelons qu'un point z_0 est dit ***adhérent*** à U si il appartient à la ***fermeture*** $\overline{U}$ de U, c'est-à-dire si soit il est intérieur à U, soit il se trouve sur le ***bord*** de U (= la ***frontière*** de U notée ∂U). On désignera par $\epsilon(z)$ toute fonction définie sur un ouvert U auquel 0 est adhérent vérifiant

$$\forall \eta > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall z \in U \;\; |z| < r \Longrightarrow |\epsilon(z)| < \eta\ . \tag{1.13}$$

Ces fonctions nous serviront à définir la notion de ***limite d'une fonction de variable complexe*** : bien évidemment on dira que

$$\epsilon(z) \longrightarrow 0 \;\text{ quand }\; z \to 0$$

et donc par extension si f est définie sur U auquel z_0 est adhérent, on dira que

$$f(z) \longrightarrow l \;\text{ quand }\; z \to z_0$$

si[3]

$$f(z) - l = \epsilon(z - z_0)\ .$$

Il faut bien voir que cette convergence vers zéro doit être « uniforme » sur tout disque centré sur z_0 :

$$\forall \eta > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } \forall z \in U \;\; |z - z_0| < r \Longrightarrow |f(z) - l| < \eta\ .$$

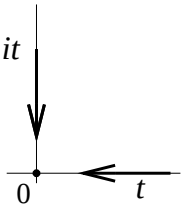
En particulier, pour tout chemin $z(t)$ passant par z_0 ou aboutissant à z_0 à un instant t_0, on doit nécessairement avoir

$$f(z(t)) \longrightarrow l \;\text{ quand }\; t \to t_0\ .$$

L'absence de cette propriété permet de montrer que certaines fonctions n'ont pas de limite en certains points. Par exemple la fonction

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{(x+iy)^3}{x^3+iy^3}\ ,$$

définie sur $U = \mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{C}^*$ ($\mathbb{C}$ privé de 0), n'admet pas de limite quand $z \to 0$.
En effet $f(t) \longrightarrow 1$ quand $t \to 0^+$
alors que $f(it) \longrightarrow -1$ quand $t \to 0^+$.



[2]Plus précisément la définition de la connexité que nous donnons ici est celle de la ***connexité par arcs*** ; on peut aussi définir la ***connexité*** d'une façon ***topologique*** en disant que U est connexe s'il ne peut admettre de sous-ensemble strict non vide à la fois ouvert et fermé. Comme $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel normé, ces deux définitions sont équivalentes.

[3]Ces fonctions ϵ correspondent bien sûr aux classiques « $o(1)$ ». Cependant cette dernière notation me semble peu pratique puisque la variable qui tend vers 0 n'apparaît pas explicitement, cette ambiguité entraînant des risques d'erreur.

1.3 Dérivabilité complexe - Holomorphie

Définition 1.1 *f est dérivable en $z_0 \in U$ si la fonction de $U - \{z_0\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite en z_0. Cette limite est alors la **dérivée** de f en z_0, que l'on notera $f'(z_0)$.*

D'après notre définition de la limite de fonctions de variable complexe, on doit donc avoir

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\ (f'(z_0) + \epsilon(z - z_0)) \tag{1.14}$$

ce que l'on peut traduire sur les parties réelles et imaginaires de f en introduisant aussi les parties réelles et imaginaires de $f'(z_0)$ et $\epsilon(z - z_0)$: $f'(z_0) = a + ib$, $\epsilon(z - z_0) = \epsilon_r(z - z_0) + i\epsilon_i(z - z_0)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} P(x,y) - P(x_0,y_0) &= a\Delta x - b\Delta y + \epsilon_r(z - z_0)\ \Delta x - \epsilon_i(z - z_0)\Delta y \\ Q(x,y) - Q(x_0,y_0) &= b\Delta x + a\Delta y + \epsilon_i(z - z_0)\ \Delta x + \epsilon_r(z - z_0)\Delta y \end{aligned} \tag{1.15}$$

en posant $z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.
On peut montrer facilement[4] que, pour deux fonctions ϵ_1 et ϵ_2 vérifiant (1.13), il existe une fonction ϵ_3 vérifiant (1.13) telle que

$$\epsilon_1(z - z_0)\ \Delta x + \epsilon_2(z - z_0)\ \Delta y \ = \ (|\Delta x| + |\Delta y|)\epsilon_3(z - z_0) \ = \ o(z - z_0)\ . \tag{1.16}$$

En conséquence les équations (1.15) montrent que P et Q sont différentiables en (x_0,y_0), de dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = a,\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -b,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = b,\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) = a\ . \tag{1.17}$$

Réciproquement si P et Q sont différentiables au point (x_0,y_0), de dérivées partielles données par (1.17), on peut écrire que[5]

$$\begin{aligned} P(x,y) - P(x_0,y_0) &= a\Delta x - b\Delta y + \epsilon_1(z - z_0)\ |z - z_0|\ , \\ Q(x,y) - Q(x_0,y_0) &= b\Delta x + a\Delta y + \epsilon_2(z - z_0)\ |z - z_0|\ , \end{aligned}$$

d'où

$$f(z) - f(z_0) \ = \ (a + ib)(z - z_0) + [\epsilon_1(z - z_0) + i\epsilon_2(z - z_0)]\ |z - z_0| \ = \ (a + ib + \epsilon(z - z_0))(z - z_0)$$

qui montre que f admet une dérivée complexe au point z_0, de valeur $a + ib$.

On peut donc énoncer la

Proposition 1.1 *f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ ssi sa partie réelle $P(x,y)$ et imaginaire $Q(x,y)$ sont différentiables au point (x_0,y_0) et leurs dérivées partielles vérifient les **conditions de Cauchy** :*

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}} \tag{1.18}$$

Alors

$$\boxed{f'(z_0) = a + ib = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{1.19}$$

ou encore

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\ . \tag{1.20}$$

En d'autres termes f considérée comme une application de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, et notée en conséquence plutôt $\vec{\mathbf{f}}$, est différentiable en (x_0,y_0), sa matrice jacobienne prenant la forme

[4] Le faire, en réfléchissant au choix de la norme de $\mathbb{R}^2$ utilisée pour expliciter $o(z - z_0)$.

[5] Quelle norme de $\mathbb{R}^2$ a t'on utilisée ici ?

$$\mathrm{Mat}\left[\overrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}\left(\vec{\mathbf{f}}\right)\right](x_0,y_0) \;=\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;. \tag{1.21}$$

Une interprétation géométrique de cette structure de la différentielle de f sera donnée dans la prochaine section.

Une récriture utile de (1.17) ou (1.18) est basée sur le fait qu'une fonction de (x,y) peut aussi être considérée comme une fonction de $(z,\overline{z})$. A partir de

$$x = \frac{z+\overline{z}}{2} \;,\quad y = \frac{z-\overline{z}}{2i} \;,$$

on obtient par le changement de variables $(x,y) \mapsto (z,\overline{z})$:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\Big(a + ib + i(-b+ia)\Big) = 0 \;.$$

Ainsi f doit être indépendante de $\overline{z}$ pour être dérivable par rapport à z. Les conditions de Cauchy peuvent donc se récrire

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0} \tag{1.22}$$

Il est maintenant temps de donner la

Définition 1.2 *f est **holomorphe** sur U si elle est dérivable par rapport à z en tout point de U.*

On remarquera que f est alors continue sur U. Comme la définition 1.1 de la dérivabilité complexe étend naturellement celle de la dérivabilité des fonctions réelles, les règles classiques de calcul des dérivées s'appliquent aux fonctions holomorphes. Ainsi on pourra démontrer facilement à partir de la définition 1.1 les

Proposition 1.2 *si f et g sont holomorphes sur U, λ et μ sont des complexes quelconques, alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont holomorphes sur U, de dérivées complexes*

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)' &= \lambda f' + \mu g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \;. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Proposition 1.3 *si f et g sont holomorphes sur U, et g ne s'annule pas sur U, alors f/g est holomorphe sur U, de dérivée complexe*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \;. \tag{1.24}$$

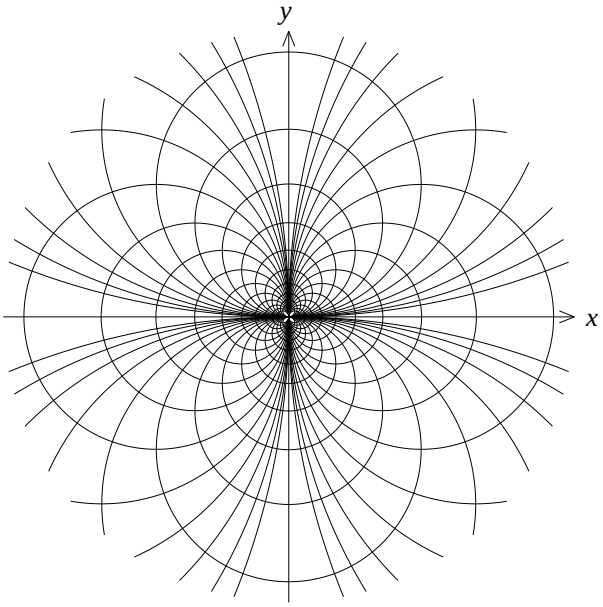
Proposition 1.4 *si f est holomorphe sur U, g est holomorphe sur V tel que $f(U) \subset V$, alors l'application composée $g \circ f$ est holomorphe sur U, de dérivée*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))\; f'(z) \;. \tag{1.25}$$

Comme $f(z) = z$ est évidemment holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée constante égale à 1, on déduit de la proposition 1.2 par une récurrence immédiate que, pour n entier naturel quelconque, $f(z) = z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et de dérivée complexe $f'(z) = nz^{n-1}$.

On déduit d'autre part des propositions 1.2 et 1.3 qu'une fraction rationnelle en z, $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ où f_1 et f_2 sont des polynômes en z, est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé des zéros de f_2.

Exemple : $f(z) = 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. On peut remarquer que les lignes $P = \mathrm{Re} f = x/(x^2+y^2) =$ *constante*, qui sont les cercles centrés sur l'axe réel tangents en zéro à l'axe imaginaire, sont orthogonales aux lignes $Q = \mathrm{Im} f = -y/(x^2+y^2) =$ *constante*, qui sont les cercles centrés sur l'axe imaginaire tangents en zéro à l'axe réel :



Cette propriété d'orthogonalité est en fait générale :

Proposition 1.5 *si $f = P + iQ$ est holomorphe sur U, alors les lignes $P(z) =$ constante sont orthogonales aux lignes $Q(z) =$ constante.*

En effet les lignes $P =$ *constante*, $Q =$ *constante* sont en tout point perpendiculaires respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} P$, $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} Q$ qui sont orthogonaux car les conditions de Cauchy (1.18) impliquent

$$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} P\right) \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} Q\right) \;=\; \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} \;=\; 0\ . \tag{1.26}$$

Enfin on peut démontrer[6] la propriété de dérivation de la fonction réciproque suivante :

Proposition 1.6 *si f est holomorphe et injective sur U, alors :*
(i) f' ne s'annule pas sur U ;
(ii) l'application inverse f^{-1} est holomorphe de $f(U)$ sur U ;
(iii) sa dérivée est donnée par

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \textit{au point} \quad w = f(z)\ . \tag{1.27}$$

1.4 Lien entre holomorphie et conformité

Nous allons maintenant donner une interprétation géométrique de la propriété de dérivabilité complexe, qui équivaut d'après la proposition 1.1 à avoir une forme très précise de la jacobienne de f équation (1.21), soit en introduisant les coordonnées polaires ρ et θ de $f'(z_0)$:

$$\mathrm{Mat}\left[\overrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{f}}\right)\right](x_0,y_0) \;=\; \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}\ . \tag{1.28}$$

On reconnaît la forme générique de la matrice d'une similitude, composée d'une homothétie de rapport ρ et d'une rotation d'angle θ, d'où la

[6] Voir par exemple Valiron (1966).

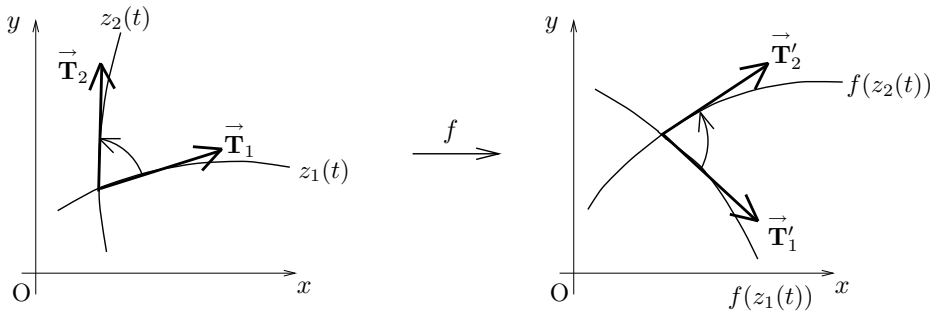


Fig. 1.1 – Transformation conforme de deux chemins et de leur vecteur tangent.

Proposition 1.7 *f est dérivable par rapport à z en $z_0 \in U$ ssi, en tant qu'application de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, elle est différentiable en z_0 et sa différentielle en z_0 est une* ***similitude*** *de $\mathbb{R}^2$.*

Considérons maintenant, comme représenté sur la figure 1.1, un chemin $z(t) = x(t) + iy(t)$ passant par z_0 à $t = t_0$, et définissons un vecteur tangent $\vec{\mathbf{T}}$ à ce chemin en z_0 comme le vecteur d'affixe complexe

$$T = \frac{dz}{dt}(t_0) = z'(t_0) \ ,$$

soit en repassant en réels

$$T_x = x'(t_0) \ , T_y = y'(t_0) \ .$$

De même on peut définir un vecteur tangent $\vec{\mathbf{T}}'$ à l'image de ce chemin par f comme le vecteur de composantes réelles

$$\begin{aligned} T'_x &= \frac{d}{dt}P(x(t),y(t)) = \frac{\partial P}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial P}{\partial y}y'(t) \ , \\ T'_y &= \frac{d}{dt}Q(x(t),y(t)) = \frac{\partial Q}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial Q}{\partial y}y'(t) \ , \end{aligned}$$

ce qui traduit matriciellement

$$\vec{\mathbf{T}}' = \vec{\vec{\boldsymbol{\nabla}}}\left(\vec{\mathbf{f}}\right) \cdot \vec{\mathbf{T}} \ .$$

Si f est dérivable en z_0, de dérivée non nulle, on en déduit que l'angle $(\widehat{\vec{\mathbf{T}}, \vec{\mathbf{T}}'})$ vaut quelque soit le chemin considéré $\theta = \arg(f'(z_0))$. On peut retrouver ce résultat d'une autre manière en calculant l'affixe de $\vec{\mathbf{T}}'$ par composition des dérivées :

$$T' = \frac{d}{dt}f(z(t_0)) = f'(z_0) \ z'(t_0) = \rho e^{i\theta} T \ .$$

Par contre dans le cas $f'(z_0) = 0$, on ne peut conclure sur la direction des vecteurs tangents en utilisant seulement f'. En effet on a alors $\vec{\vec{\boldsymbol{\nabla}}} f = \vec{\vec{\mathbf{0}}}$, donc $\vec{\vec{\boldsymbol{\nabla}}} f \cdot \vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{0}}$ ne définit pas de direction. La direction de la tangente à $f(z(t))$ serait plutôt donnée par la différentielle seconde de f, si elle existe.
Dans le cas $f'(z_0) \neq 0$, si deux chemins $z_1(t)$ et $z_2(t)$ passent par z_0 à $t = t_0$, désignant par $\vec{\mathbf{T}}_1, \vec{\mathbf{T}}_2, \vec{\mathbf{T}}'_1, \vec{\mathbf{T}}'_2$ les vecteurs tangents respectivement à $z_1(t)$ et $z_2(t)$, $f(z_1(t))$ et $f(z_2(t))$ à $t = t_0$, on aura :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\vec{\mathbf{T}}'_1, \vec{\mathbf{T}}'_2}\right) &= \left(\widehat{\vec{\mathbf{T}}'_1, \vec{\mathbf{T}}_1}\right) + \left(\widehat{\vec{\mathbf{T}}_1, \vec{\mathbf{T}}_2}\right) + \left(\widehat{\vec{\mathbf{T}}_2, \vec{\mathbf{T}}'_2}\right) \\ &= -\theta + \left(\widehat{\vec{\mathbf{T}}_1, \vec{\mathbf{T}}_2}\right) + \theta \\ \left(\widehat{\vec{\mathbf{T}}'_1, \vec{\mathbf{T}}'_2}\right) &= \left(\widehat{\vec{\mathbf{T}}_1, \vec{\mathbf{T}}_2}\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

et on dira que f ***conserve les angles avec leur sens au point*** z_0.
On peut donc énoncer la

Proposition 1.8 *si f est dérivable par rapport à z en $z_0 \in U$ et $f'(z_0) \neq 0$, alors f conserve les angles avec leur sens au point z_0.*

Définition 1.3 *f fonction de U dans $\mathbb{C}$ est dite **transformation conforme** de U si elle est différentiable sur U, de différentielle non nulle en tout point de U, et conserve les angles avec leur sens en tout point de U.*

D'après la proposition 1.8, toute fonction holomorphe sur U, dont la dérivée ne s'annule pas sur U, est une transformation conforme de U. Réciproquement si f est conforme sur U, alors en tout point de U sa différentielle est une application linéaire non triviale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui conserve les angles. Un théorème de classification des applications linéaires du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ sur lui même nous dit alors que cette différentielle doit être une similitude de $\mathbb{R}^2$. On peut démontrer ce résultat pédestrement : si l'application linéaire de matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non nulle conserve les angles, alors en particulier tout couple de vecteurs orthogonaux est transformé en un couple de vecteurs orthogonaux. En considérant les vecteurs de base $\vec{\mathbf{e}}_x$ et $\vec{\mathbf{e}}_y$, on obtient $ab + cd = 0$, et en considérant les première et deuxième bissectrices de $\vec{\mathbf{e}}_x$ et $\vec{\mathbf{e}}_y$, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$. De cette dernière équation on déduit $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, mais aussi en la multipliant par b^2 :

$$0 = b^2a^2 - b^4 + b^2c^2 - b^2d^2 = c^2d^2 - b^4 + b^2c^2 - b^2d^2 = (b^2 + d^2)(c^2 - b^2)$$

Comme $b^2 + d^2 = a^2 + c^2$ ne peut être nul, forcément $c = \epsilon b$ avec $\epsilon = \pm 1$. Alors $d = \epsilon' a$ avec $\epsilon' = \pm 1$. En notant toujours par un $'$ les vecteurs tangents images, on doit avoir $\vec{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{e}}_x{}' = a$ de même signe que $\vec{\mathbf{e}}_y \cdot \vec{\mathbf{e}}_y{}' = d$, d'où $\epsilon' = +1$ i.e. $d = a$. Enfin on se convaincra que comme $\widehat{(\vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_x{}')} = \widehat{(\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y{}')} - \pi$, $\vec{\mathbf{e}}_y \cdot \vec{\mathbf{e}}_x{}' = b$ doit être de signe opposé à $\vec{\mathbf{e}}_x \cdot \vec{\mathbf{e}}_y{}' = c$, d'où $\epsilon = -1$ et $c = -b$.
On en déduit la

Proposition 1.9 *f est une transformation conforme de U si et seulement si elle est holomorphe sur U, et sa dérivée ne s'annule pas sur U.*

Exemple : $f(z) = z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée $2z$. Cette dérivée s'annulant en zéro, on n'est pas assuré de la conservation des angles des vecteurs tangents à des courbes passant par zéro. Effectivement les demi-droites $z(t) = te^{i\alpha}$ $(t, \alpha > 0)$ sont transformées en les demi-droites $f(z(t)) = t^2e^{2i\alpha}$ ce qui montre que les angles des tangentes aux courbes droites correspondantes sont multipliés par 2. Par contre f est une transformation conforme (non injective) de $\mathbb{C}^*$ sur lui-même, et on peut vérifier que les verticales et horizontales du plan ne passant pas par zéro sont transformées en un réseau de courbes orthogonales (figure 1.2) :

- les droites $x = x_0$ ont pour image les paraboles d'équation $|z| = 2x_0^2 - x$, de foyer O et de directrice $x = 2x_0^2$.
- les droites $y = y_0$ ont pour image les paraboles d'équation $|z| = 2y_0^2 + x$, de foyer O et de directrice $x = -2y_0^2$.

Complément : pour la ***résolution analytique ou numérique d'équations aux dérivées partielles à deux dimensions***, l'utilisation de *changements de variables* associés à des transformations *conformes bijectives* présente un intérêt certain. En effet on est assuré de ce qu'un système de coordonnées orthogonales sera transformé en un nouveau système de coordonnées elles aussi orthogonales[7]. Ceci garanti une certaine simplicité des formules de changement de coordonnées des opérateurs différentiels, tout en permettant de transformer un domaine de géométrie compliqué en un domaine de géométrie simple[8]. À ce sujet on dispose

[7] En général l'un au moins des deux systèmes de coordonnées est *curviligne*.

[8] Des exemples seront traités dans les problèmes 3.4 et 3.5.

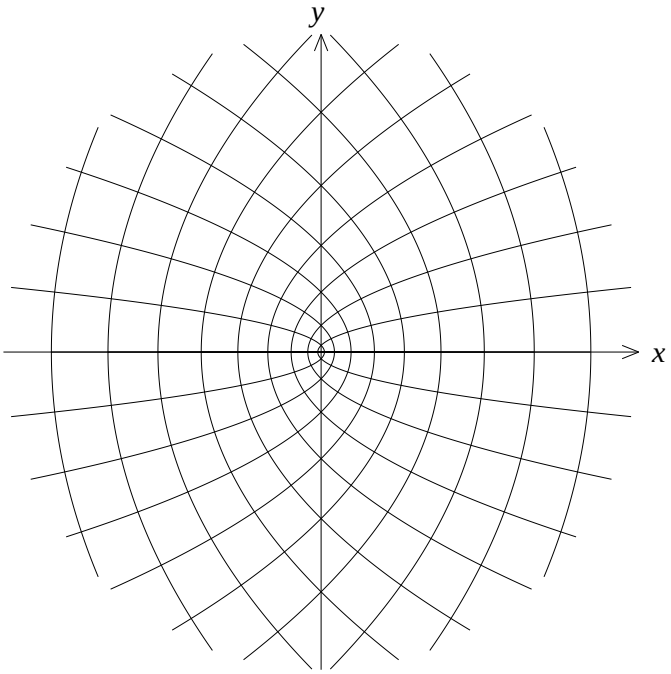


Fig. 1.2 – Transformation de deux réseaux de droites verticales et horizontales par l'application $z \mapsto z^2$. On obtient à cause de la conformité de cette application deux réseaux de courbes qui se coupent à angle droit.

du théorème dit de Riemann[9], qui stipule que, étant donné un ouvert simplement connexe U, il existe toujours une application conforme bijective f qui transforme U en l'intérieur du disque unité. Une extension de ce théorème due à Carathéodory et Osgood[10] montre que si de plus U est borné et sa frontière est une courbe tracée par un circuit injectif de $\mathbb{C}$, alors on peut prolonger f sur la frontière de U, et cette frontière se trouve alors transformée en le cercle unité. Cette dernière extension est capitale puisque un problème physique comporte toujours des conditions aux limites posées sur la frontière de U.

1.5 Exercices et problèmes

Les exercices 1.1 à 1.8 portent sur la notion de dérivabilité complexe et d'holomorphie. Les problèmes qui suivent donnent des exemples de transformations conformes « utiles » au sens du complément précédent ; les transformations homographiques par exemple, introduites dans le problème 1.1, seront utilisées dans les problèmes 3.4 et 3.5.

On note toujours $z = x + iy$ avec x, y réels un point quelconque du plan complexe.

Exercice 1.1 ***Limites dans le plan complexe***

1 La fonction $f(z) = \dfrac{z^3}{x^2 + y^4}$ a t'elle une limite quand $z \to 0$?

2 Même question pour $f(z) = \dfrac{xy}{x + iy}$?

3 La fonction $f(z) = \arctan \dfrac{y}{x}$ admet-elle une limite quand $z \to ia$ où $a \in \mathbb{R}$?

[9] Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration de ce théorème dans Chaterji (1997) ou Valiron (1966) ; la définition de la simple connexité sera quant à elle donnée dans la section 2.1.

[10] On pourra trouver une démonstration partielle dans le cas d'une frontière définie par un circuit polygonal dans Chaterji (1997); Valiron (1966).

Exercice 1.2 ***Dérivabilité complexe***

En quels points de $\mathbb{C}$ les fonctions suivantes sont-elles dérivables ? Que vaut alors leur dérivée complexe ?

1 $f(z) = x^2 + y^2$ **2** $f(z) = x^2 + iy^2$ **3** $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$

4 $f(z) = x^2 + ixy$ **5** $f(z) = x^2 + 2ixy$

Exercice 1.3 ***Classe de fonctions holomorphes***

Soit $f(z) = u(x) + iv(y)$ avec u, v fonctions réelles de variable réelle ; montrez que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.4 ***Détermination d'une fonction holomorphe par sa partie réelle***

Soit $P(x,y) = x^3 - 3\lambda xy^2 + 2x + 1$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que P soit la partie réelle d'une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminez alors f.

Exercice 1.5 ***Réciproque de la proposition 1.5***

Si P et Q, fonctions différentiables de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, sont telles que les lignes $P(x,y) = \textit{constante}$ sont toujours orthogonales aux lignes $Q(x,y) = \textit{constante}$, est-ce que $f = P + iQ$ est forcément holomorphe ?

Exercice 1.6 ***Fonctions holomorphes constantes***

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe U. Montrez que si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1 $\mathrm{Re} f(z)$ est constante ;

2 $\mathrm{Im} f(z)$ est constante ;

3 $|f(z)|$ est constante ;

alors f est constante dans U.

Une fonction de variable complexe à valeurs réelles peut-elle être holomorphe ?

Exercice 1.7 ***« Conjuguées » de fonctions holomorphes***

Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

1 la fonction $z \mapsto \overline{f(z)}$ est-elle holomorphe ?

2 et la fonction $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$?

Exercice 1.8 ***Conditions de Cauchy en coordonnées polaires***

1 Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe sur U ouvert connexe. On fait le changement de variable polaire $(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, et on désigne pour préciser les notations avec un tilde les fonctions P et Q considérées comme fonctions de r et θ :

$$\widetilde{P}(r,\theta) = P(r\cos\theta, r\sin\theta)\ , \quad \widetilde{Q}(r,\theta) = Q(r\cos\theta, r\sin\theta)\ .$$

Montrez que les conditions de Cauchy en termes des fonctions $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ s'écrivent :

$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial \theta} = r\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \theta} = -r\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial r}\ .$$

2 On suppose que U a la géométrie d'une couronne (intersection de l'extérieur d'un petit disque centré sur l'origine avec un plus grand disque centré sur l'origine) éventuellement privée d'un segment. Trouvez les fonctions holomorphes f dont la partie réelle est à symétrie de rotation, i.e. telles que $\widetilde{P}$ ne dépende pas de θ. Commentez sur la nécessité d'une restriction géométrique sur U.

Problème 1.1 ***Transformations homographiques***

[Pour mémoire ; en effet ce sujet a été donné en Devoir Individuel II dans le cadre du module MI-1]

On se propose d'étudier dans cet exercice les propriétés des ***transformations homographiques***, applications définies sur $\mathbb{C}$ privé éventuellement d'un point par

$$z \mapsto f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.30}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

1 Montrez qu'une application de la forme (1.30) avec $ad - bc = 0$ est soit constante, soit jamais définie.

2 Montrez que la composée $f_1 \circ f_2$ de deux transformations homographiques

$$f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \ , \quad f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

est aussi une transformation homographique. Donnez une règle « matricielle » de calcul des coefficients a, b, c, d correspondant à $f_1 \circ f_2$ à partir des coefficients a_1, b_1, c_1, d_1 et a_2, b_2, c_2, d_2.

3 Montrez qu'une transformation homographique (1.30) est une transformation conforme bijective de U sur V avec $U = V = \mathbb{C}$ si $c = 0$ et $U = \mathbb{C} - \{-d/c\}, V = \mathbb{C} - \{a/c\}$ si $c \neq 0$.

4 Montrez que l'équation

$$\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0 \tag{1.31}$$

avec $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, |\beta|^2 > \alpha\gamma$ est l'équation générique d'une droite si $\alpha = 0$ et d'un cercle si $\alpha \neq 0$.

5 Montrez que l'***inversion*** $z \mapsto 1/z$, transformation conforme bijective de $\mathbb{C}^*$ sur lui même, transforme

a une droite passant par 0 en une droite passant par 0

b une droite ne passant pas par 0 en un cercle passant par 0

c un cercle passant par 0 en une droite ne passant pas par 0

d un cercle ne passant pas par 0 en un cercle ne passant pas par 0

6 Montrez que toute transformation homographique peut être décomposée comme la composition de trois types de fonctions :

(i) translations $z \mapsto z + t$ avec $t \in \mathbb{C}$;

(ii) similitudes $z \mapsto tz$ avec $t \in \mathbb{C}^*$;

(iii) inversion $z \mapsto 1/z$.

Déduisez en que toute transformation homographique transforme une droite ou un cercle en une droite ou un cercle.

7 Vérifiez que la ***transformation de Cayley***

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

est une transformation conforme bijective du demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$, $P = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \mathrm{Im} z > 0\}$, sur l'intérieur du disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < 1\}$.

Problème 1.2 ***Transformation de Joukovski***

On considère l'application $f(z) = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$.

1 Montrez que f est une transformation conforme bijective de

$$E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| > 1\}$$

sur $\mathbb{C}$ privé du segment $[-1,1]$ de l'axe réel.
Indication : on aura intérêt à identifier l'image d'un cercle $z = r\ e^{i\theta}$.

2 Montrez que $f = f_1 \circ f_2 \circ f_1$ avec $f_1(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, $f_2(z) = z^2$.
Déduisez en que f est une transformation conforme bijective de

$$V = \Big\{ z \in \mathbb{C} \text{ tels que } \Big|z + \frac{1}{2}\Big| > \frac{3}{2} \Big\}$$

sur un domaine que vous préciserez et dessinerez.

Chapitre 2

Théorèmes d'intégration et premières conséquences

Nous avons vu dans le précédent chapitre que l'holomorphie de f équivaut à imposer que sa différentielle est une similitude en tout point de U. Nous allons montrer ici que l'holomorphie de f a aussi d'importantes conséquences sur les intégrales de chemin de f ou intégrales curvilignes de f.

2.1 Intégrale curviligne - Théorème de Cauchy

On considère dans ce qui suit des ***chemins***[1] ***orientés*** γ^+ de $\mathbb{C}$, définis par un ensemble de paramétrages équivalents au sens suivant : si $t \in [t_1,t_2] \mapsto z(t)$ et $\tau \in [\tau_1,\tau_2] \mapsto \zeta(\tau)$ sont deux paramétrages de γ^+, il existe une bijection h continue continûment dérivable par morceaux et croissante de $[t_1,t_2]$ sur $[\tau_1,\tau_2]$ telle que $\zeta(h(t)) = z(t)$. Si γ^+ est contenu dans U ouvert de définition d'une ***fonction continue*** $f(z)$ à valeurs complexes, l'***intégrale curviligne***[2] de $f(z)$ le long de γ^+ est définie par[3]

$$\boxed{\int_{\gamma^+} f(z)\ dz \ = \ \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\ z'(t)\ dt} \tag{2.1}$$

soit

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^+} f(z)\ dz \ &= \ \int_{\gamma^+} \Big(\big(P(x,y) + iQ(x,y)\big)\ dx \ + \ i\big(P(x,y) + iQ(x,y)\big)dy\Big) \\
\int_{\gamma^+} f(z)\ dz \ &= \ \int_{\gamma^+} \big(P(x,y)\ dx - Q(x,y)\ dy\big) \ + \ i\int_{\gamma^+} \big(Q(x,y)\ dx + P(x,y)\ dy\big)\ .
\end{aligned} \tag{2.2}$$

On vérifie l'indépendance vis à vis du paramétrage en faisant le changement de variable $t \mapsto h(t)$ dans la définition (2.1).

La linéarité de l'intégrale curviligne est évidente. D'autre part si γ^- désigne le chemin γ^+ parcouru en sens inverse, i.e. si on fait un changement de paramétrage avec une fonction h dont on requiert maintenant qu'elle soit décroissante, on a

$$\int_{\gamma^-} f(z)\ dz = -\int_{\gamma^+} f(z)\ dz\ . \tag{2.3}$$

---

[1] La notion de ***chemin*** a été définie p. 5.

[2] Cette notion a déjà été vue dans le chapitre *Intégrales de lignes et de contour* du document MI-1, où le terme équivalent « ***intégrale de ligne*** » a été utilisé.

[3] Dans le cas où $z'(t)$ présente des points de discontinuités, il faut bien sûr décomposer l'intégrale (2.1) en sommes d'intégrales définies sur les segments où $z'(t)$ est continue.

Un exemple élémentaire d'intégrale curviligne est fourni par le cas $f = 1$; alors

$$\int_{\gamma^+} dz = \int_{\gamma^+} (dx + idy) = x_1 - x_0 + i(y_1 - y_0) = z_1 - z_0$$

différence des affixes des extrémités de γ.

Donnons aussi un exemple où l'on a besoin d'introduire un paramétrage : si γ^+ est un cercle de centre O orienté dans le sens trigonométrique (ce que signifie le signe +), calculons $\int_{\gamma^+} z^n \, dz$ pour n entier relatif. Un paramétrage du cercle en polaires est obtenu par $\theta \in [0,2\pi] \mapsto z(\theta) = Re^{i\theta}$; on a alors $dz = z'(\theta)d\theta = iRe^{i\theta}d\theta$, d'où :

$$\int_{\gamma^+} z^n \, dz = \int_0^{2\pi} R^{n+1} i e^{(n+1)i\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n+1 \neq 0 \\ R^0 i 2\pi = 2\pi i & \text{si} \quad n+1 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

De manière générale, on peut se demander à quelles conditions sur $f(z)$ ou $P(x,y), Q(x,y)$ ces intégrales ne dépendent que des extrémités de γ^+, ou encore s'annulent si γ^+ est un chemin fermé ou ***circuit***, le + désignant un circuit ***orienté dans le sens trigonométrique***. On supposera toujours un circuit ***injectif*** au sens suivant : s'il est paramétré par $t \in [t_1,t_2] \mapsto z(t)$, on a $z(t_1) = z(t_2)$ mais

$$\forall \; t, t' \; \in]t_1,t_2[\qquad\qquad z(t) = z(t') \implies t = t' \; . \tag{2.5}$$

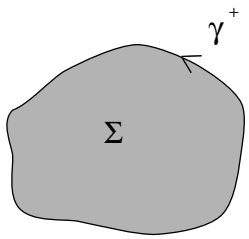


Fig. 2.1 – Un circuit γ^+ injectif orienté dans le sens trigonométrique et son intérieur Σ.

On connaît la réponse dans le cas de fonctions réelles grâce à la ***formule de Green-Stokes***[4]. Si u et v sont des fonctions de U ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, à dérivées partielles continues sur U, et si γ^+ est un circuit de U d'intérieur Σ entièrement contenu dans U, orienté dans le sens trigonométrique (i.e. laissant Σ à sa gauche comme représenté figure 2.1), on a

$$\int_{\gamma^+} (u \; dx + v \; dy) = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \; dy \; . \tag{2.6}$$

Ainsi si u et v vérifient

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.7}$$

en tout point de U, alors

$$\int_{\gamma^+} (u \; dx + v \; dy) = 0$$

pour tout circuit γ^+ d'intérieur contenu dans U. Si $f(z)$ est holomorphe sur U et continûment différentiable sur U, la condition (2.7) appliquée aux parties réelle et imaginaire de $\int_{\gamma^+} f(z) \; dz$ définies par l'eq. (2.2) donne exactement les conditions de Cauchy (1.18). En fait l'hypothèse de continuité de $f'(z)$ sur U peut être levée[5], d'où le

[4] Voir la section *théorème de Stokes* dans le chapitre *Intégrales de surface* du document MI-1.

[5] On consultera Chaterji (1997), Valiron (1966) ou Remmert (1991) pour une démonstration de ce résultat dû au mathématicien français Goursat ; cette démonstration est bien sûr basée sur une approche différente n'utilisant pas la formule de Green-Riemann.

Théorème 2.1 (de Cauchy) *si f est holomorphe sur U et γ^+ est un circuit de U d'intérieur Σ entièrement contenu dans U, alors*

$$\boxed{\int_{\gamma^+} f(z)\ dz = 0} \tag{2.8}$$

L'hypothèse d'injectivité du circuit γ^+ n'est pas cruciale pour avoir (2.8). Elle est seulement plus confortable, car la définition rigoureuse de l'intérieur d'un circuit non injectif est délicate. Cependant en décomposant un tel circuit en sous-circuits injectifs on peut en général étendre (2.8) à des circuits non injectifs comme celui représenté sur la figure 2.2.

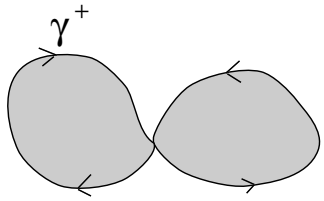


Fig. 2.2 – Ce circuit non injectif est en fait constitué de deux circuits injectifs mis bout à bout.

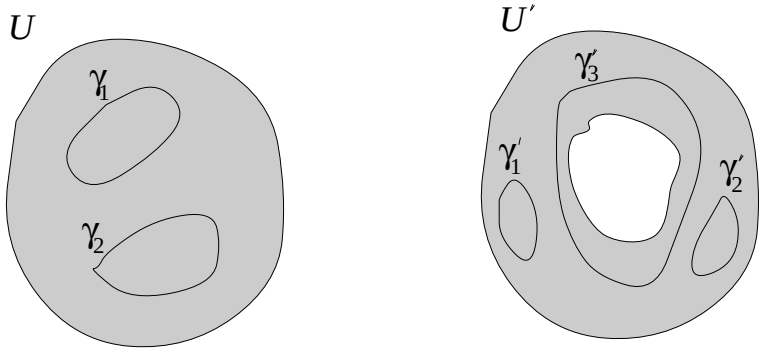
Une reformulation utile du théorème de Cauchy est basée sur la notion d'homotopie :

Définition 2.1 *deux circuits γ_1^+ et γ_2^+ de U, supposés pour fixer les notations paramétrés par $t \in [0,1] \mapsto z_1(t)$ et $t \in [0,1] \mapsto z_2(t)$, sont dits* ***homotopes dans*** *U si on peut passer de l'un à l'autre par déformation continue sans sortir de U, i.e. s'il existe une application continue ϕ de $[0,1]\times[0,1]$ dans U telle que*

$$\forall t \in [0,1] \qquad \phi(t,0) = z_1(t)\ ,\ \phi(t,1) = z_2(t) \ \text{ et } \ \phi(0,t) = \phi(1,t)\ . \tag{2.9}$$

Un circuit γ^+ de U est dit ***homotope à zéro dans*** *U si on peut le réduire par déformation continue à un point de U sans sortir de U, i.e. s'il existe une application ϕ du type précédent qui relie γ^+ à un circuit constant formé par un point.*

Nous admettrons[6] le fait intuitif qu'un circuit est homotope à zéro dans U ssi son intérieur est entièrement contenu dans U.
Par exemple sur la figure suivante les circuits γ_1 et γ_2 de U sont homotopes à zéro, ainsi que les circuits γ_1' et γ_2' de U'. En revanche le circuit γ_3' de U' n'est pas homotope à zéro :



U et U' sont en fait deux ouverts de topologie fondamentalement différente ; en adoptant la

Définition 2.2 *un ouvert U est* ***simplement connexe*** *si tout circuit de U est homotope à zéro dans U*

on a pour les ouverts de la figure précédente que U est simplement connexe mais pas U'.

[6] Des éléments de démonstration peuvent être trouvés dans Remmert (1991).

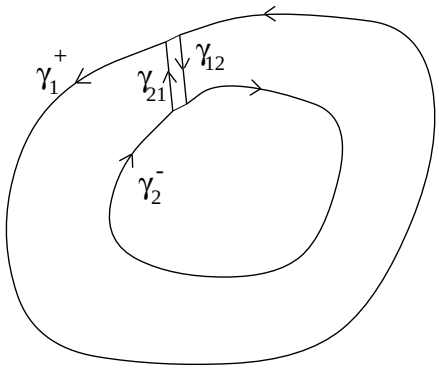
La reformulation annoncée est la suivante :

Théorème 2.2 (de Cauchy pour des circuits homotopes) *si f est holomorphe sur U et γ_1^+ et γ_2^+ sont deux circuits homotopes dans U, alors*

$$\int_{\gamma_1^+} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2^+} f(z)\ dz\ . \tag{2.10}$$

En particulier l'intégrale curviligne de f sur tout circuit homotope à zéro dans U est nulle ; si le domaine de définition U de f est simplement connexe, l'intégrale curviligne de f sur tout circuit de U est nulle.

Notons que la première partie du théorème implique la seconde, puisque l'intégrale d'une fonction sur un circuit réduit à un point est trivialement nulle. La démonstration générale de la première partie du théorème, hors programme, se trouve par exemple dans la section 7.8 de Chaterji (1997). En pratique on peut se contenter de situations géométriques particulières simples où la démonstration devient élémentaire. Traitons par exemple le cas (que nous aurons à exploiter par la suite) où l'un des circuits, soit γ_1, entoure complétement le second, soit γ_2. On peut alors introduire un circuit qui suit γ_1^+ et γ_2^- sauf le long de deux segments infiniment raprochés liant γ_1 à γ_2, soient γ_{12} et γ_{21} :



Comme ce circuit est d'intérieur entièrement contenu dans U, on a

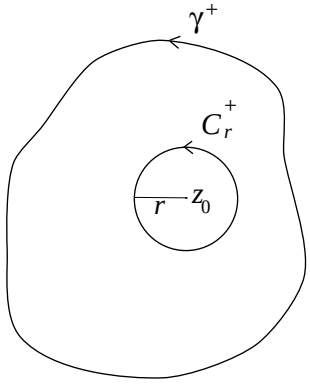
$$\int_{\gamma_1^+} f(z)\ dz + \int_{\gamma_{12}} f(z)\ dz + \int_{\gamma_2^-} f(z)\ dz + \int_{\gamma_{21}} f(z)\ dz = 0$$

d'après notre première version du théorème de Cauchy 2.1. Or si γ_{12} et γ_{21} sont infiniment rapprochés leurs contributions se compensent, d'où le résultat annoncé (2.10).

2.2 Formule intégrale de Cauchy

Nous venons de voir que l'intégrale curviligne d'une fonction f holomorphe sur U, le long d'un circuit γ d'intérieur entièrement contenu dans U, est toujours nulle.
On peut maintenant se demander ce qui se passe pour des fonctions non holomorphes sur tout l'intérieur de γ, ou par exemple si on divise f holomorphe sur U par $z - z_0$ où z_0 est un point de l'intérieur de γ.
Alors $f(z)/(z - z_0)$ sera holomorphe partout dans l'intérieur de γ sauf en z_0.
D'après le théorème 2.2, l'intégrale le long de γ de $f(z)/(z - z_0)$ sera égale à l'intégrale de $f(z)/(z - z_0)$ le long d'un cercle de centre z_0 et de rayon suffisamment petit r,

$$\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\ dz = \int_{C_r^+} \frac{f(z)}{z - z_0}\ dz\ .$$



Par continuité de f en z_0, il vient

$$\int_{C_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \int_{C_r^+} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\, dz + \int_{C_r^+} \frac{\epsilon(z-z_0)}{z-z_0}\, dz\ .$$

Indépendamment de r suffisamment petit, la première intégrale vaut $2\pi i f(z_0)$ d'après la formule (2.4). En utilisant le paramétrage polaire $\theta \in [0,2\pi] \mapsto z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ du cercle C_r la deuxième intégrale s'écrit

$$i \int_0^{2\pi} \epsilon(re^{i\theta})\, d\theta\ .$$

D'après la définition (1.13) des fonctions ϵ, cette intégrale tend vers 0 quand r tend vers 0.
On peut donc énoncer :

Théorème 2.3 (formule intégrale de Cauchy) *si f est holomorphe sur U, γ est un circuit de U d'intérieur Σ entièrement contenu dans U, et z_0 est un point de Σ, alors*

$$\boxed{\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i\ f(z_0)} \tag{2.11}$$

L'injectivité du circuit γ^+ est importante pour avoir (2.11). On peut introduire une formule plus générale valable aussi pour des circuits non injectifs, mais à condition d'introduire un facteur d'indice du circuit par rapport au point intérieur considéré, ce facteur d'indice comptant le nombre de tours faits par le circuit autour du point. Nous n'entrerons pas ici dans ces rafinements[7].

2.3 Premières conséquences

De la formule intégrale de Cauchy découlent nombre de propriétés très fortes des fonctions holomorphes ; nous allons en passer en revue quelques unes dès maintenant. Cependant il faut garder à l'esprit le fait que les conséquences ultimes de cette formule ne seront exploitées qu'aux chapitres 3 et 4.

2.3.1 Infinie dérivabilité des fonctions holomorphes

La formule intégrale de Cauchy (2.11) montre que $f(z_0)$ peut s'exprimer comme une intégrale où la dépendance en z_0 se fait via une fraction rationnelle très simple $z_0 \mapsto 1/(z-z_0)$. Cette expression pourra se dériver sans difficultés sous le signe somme, autant de fois que l'on veut. On va en déduire que f sera en fait infiniment dérivable.

Lemme 2.1 (de dérivation sous le signe somme) *soient φ une fonction continue de z sur U, γ un circuit de U d'intérieur Σ entièrement contenu dans U, n un entier naturel strictement positif. Alors ϕ définie sur Σ par*

$$\phi(z) = \int_{\gamma^+} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\, d\zeta$$

est dérivable pour tout $z \in \Sigma$, de dérivée

$$\phi'(z) = n \int_{\gamma^+} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta\ .$$

En effet pour $z_0 \in \Sigma$ la différence

$$\psi(z_0,z) = \frac{\phi(z_0+z)-\phi(z_0)}{z} - n \int_{\gamma^+} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

[7] Voir par exemple Chaterji (1997) ou Remmert (1991) pour une définition mathématique de l'indice, et pour la formule de Cauchy généralisée correspondante.

prend, en introduisant $\xi = \zeta - z_0$, la forme

$$\begin{aligned}\psi(z_0,z) &= \int_{\gamma^+} \varphi(\zeta)\ \Big[\frac{1}{z(\xi-z)^n} - \frac{1}{z\xi^n} - n\frac{1}{\xi^{n+1}}\Big]\ d\zeta \\ &= \int_{\gamma^+} \frac{\varphi(\zeta)}{z(\xi-z)^n\xi^{n+1}}\ \Big[\xi^{n+1} - \xi\ (\xi-z)^n - nz(\xi-z)^n\Big]\ d\zeta\ .\end{aligned}$$

La formule du binôme permet de récrire le polynôme entre crochets comme

$$\begin{aligned}&\xi^{n+1} - \xi\ \Big(\xi^n - nz\xi^{n-1} + \sum_{p=2}^{n} \mathrm{C}_n^p \xi^{n-p}(-z)^p\Big) - nz\ \Big(\xi^n + \sum_{p=1}^{n} \mathrm{C}_n^p \xi^{n-p}(-z)^p\Big) \\ = \quad & -\xi \sum_{p=2}^{n} \mathrm{C}_n^p \xi^{n-p}(-z)^p - nz \sum_{p=1}^{n} \mathrm{C}_n^p \xi^{n-p}(-z)^p\end{aligned}$$

soit $z^2 P(z,z_0,\zeta)$ où P est un polynôme en tous ses arguments. Ainsi

$$\psi(z_0,z) = z\ \int_{\gamma^+} \frac{\varphi(\zeta)\ P(z,z_0,\zeta)}{(\zeta - z_0 - z)^n(\zeta - z_0)^{n+1}}\ d\zeta\ .$$

Reste à voir que comme z_0 se trouve dans l'intérieur de γ, si z est de module suffisamment petit, alors pour tout $\zeta \in \gamma$, $|\zeta - z_0|$ et $|\zeta - z_0 - z|$ restent plus grand que $r/2$ où $r > 0$ est la distance de z_0 à γ. En introduisant $M = \sup|\varphi(\zeta)|$ lorsque ζ décrit γ et $M' = \sup|P(z,z_0,\zeta)|$ lorsque z décrit un voisinage de l'origine et ζ décrit γ, on obtient pour $|z|$ suffisamment petit

$$|\psi(z_0,z)| \le |z|\ \int_{\gamma^+} \frac{MM'}{(r/2)^{2n+1}}\ d\zeta$$

ce qui prouve que $\psi(z_0,z) \longrightarrow 0$ quand $z \to 0$. CQFD.

Théorème 2.4 (formule intégrale de Cauchy d'ordre supérieur) *si f est holomorphe sur U alors elle est indéfiniment dérivable sur U, sa dérivée $n^{ème}$ étant donnée pour $z \in U$ et γ^+ circuit entourant z homotope à zéro dans U par*

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i}\ \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\ d\zeta\ . \tag{2.12}$$

La formule intégrale de Cauchy (2.11)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\ \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ d\zeta$$

nous donne en effet la preuve de (2.12) à l'ordre 0. Si f est $n-1$ fois dérivable avec $n-1 \ge 0$ et (2.12) est vérifiée à l'ordre $n-1$, alors en appliquant le lemme 2.1 à $\varphi = f$ qui est continue sur U, on obtient que $f^{(n-1)}$ est dérivable et que $f^{(n)}$ est donnée par (2.12) à l'ordre n.

2.3.2 Lien entre fonctions holomorphes et harmoniques

Une fonction holomorphe étant en particulier deux fois continûment différentiable, on peut se demander quelle sera la forme de sa différentielle seconde compte tenu des restrictions imposées par les conditions de Cauchy sur sa différentielle première. Plus simplement, on peut se contenter de dériver les conditions de Cauchy (1.18) pour s'apercevoir qu'elles impliquent compte tenu du théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{2.13}$$

soit $\Delta P = \Delta Q = 0$ où Δ est l'***opérateur laplacien***

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \ . \tag{2.14}$$

En posant

Définition 2.3 *une fonction φ de U dans $\mathbb{C}$ est* ***harmonique*** *dans U si elle est deux fois continûment différentiable dans U et si son laplacien est nul dans U i.e. si elle est solution de l'****équation de Laplace*** $\Delta\varphi = 0$ *dans U*

on va pouvoir montrer le

Théorème 2.5 *une fonction f holomorphe dans U est, ainsi que ses parties réelles et imaginaires, harmonique dans U. Réciproquement si U est simplement connexe et si P est une fonction harmonique dans U à valeurs réelles, il existe une autre fonction Q harmonique dans U à valeurs réelles dite* ***fonction harmonique conjuguée*** *de P telle que la fonction $f = P + iQ$ soit holomorphe dans U. De telles fonctions Q sont définies à une constante (réelle) près.*

La partie directe du théorème découle de (2.13) ; on aurait pu aussi la déduire, en considérant à nouveau une fonction de variable complexe comme une fonction des variables indépendantes z et $\overline{z}$, du fait que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}} \tag{2.15}$$

s'annule pour f holomorphe d'après la formulation (1.22) des conditions de Cauchy.
La réciproque se montre en construisant la fonction Q à partir de sa différentielle, dont on postule la forme connaissant les conditions de Cauchy (1.18) :

$$dQ = u\ dx + v\ dy = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy \ .$$

Choisissant z_0 dans U, on va tenter de définir $Q(z)$ pour $z \in U$ par

$$Q(z) = \int_{\gamma^+} (u\ dx + v\ dy)$$

où γ^+ est un chemin tracé dans U reliant z_0 à z. A z_0 fixé, ceci définit bien une fonction de z seulement. En effet si deux chemins différents reliant z_0 à z sont choisis dans U, considérons le circuit obtenu en mettant ces chemins bout à bout. Ce circuit est d'intérieur entièrement contenu dans U à cause de la simple connexité de U. Comme u et v vérifient $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$ la formule de Green-Riemann (2.6) montre que l'intégrale de $u\ dx + v\ dy$ sur ce circuit est nulle, d'où l'égalité des intégrales prises sur les deux chemins. D'autre part un changement de point de départ z_0 revient seulement à ajouter une constante réelle à Q. Les fonctions Q ainsi construites vérifient par définition $\partial Q/\partial x = -\partial P/\partial y$ et $\partial Q/\partial y = \partial P/\partial x$. On reconnaît les conditions de Cauchy sur $f = P + iQ$. Enfin si Q, Q' sont deux solutions du problème il découle de ces mêmes conditions de Cauchy que $Q - Q'$ est de dérivées partielles nulles dans U donc est constante dans U.

Ce résultat implique la

Proposition 2.1 *une fonction harmonique P à valeurs réelles définie sur un ouvert U est indéfiniment différentiable sur U.*

En effet si $z \in U$ et D est un disque inclus dans U centré sur z, D est simplement connexe, donc dans D la fonction P est partie réelle d'une fonction holomorphe, indéfiniment dérivable d'après le théorème 2.4.

En pratique pour calculer la fonction harmonique conjuguée d'une fonction harmonique réelle P il peut être commode de calculer directement la fonction holomorphe associée en utilisant (1.20) :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y} \ .$$

Exemple : $P(x,y) = y^3 - 3x^2y$ est harmonique dans $\mathbb{C}$, donc partie réelle d'une fonction holomorphe f définie à une constante imaginaire près par

$$f'(z) = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3i(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3iz^2$$

d'où $f(z) = iz^3 + i\alpha$, $Q(x,y) = x^3 - 3xy^2 + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

De même on peut montrer qu'une fonction holomorphe peut être tout aussi bien définie par sa partie imaginaire donnée comme une fonction harmonique iQ, où Q est à valeurs réelles, sur U ; on calculerait alors f grâce à la deuxième forme de (1.20) :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \ .$$

Compléments : on a souvent à résoudre des équations de Laplace en électricité, en mécanique, et en thermique. Nous nous contenterons de citer deux cas particulier où le lien entre fonctions harmoniques et fonctions holomorphes est particulièrement utile :

- l'***électrocinétique des conducteurs homogènes bidimensionnels***. Sous certaines conditions de symétrie, on obtient que les vecteurs champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ et densité de courant $\vec{\mathbf{j}}$ sont contenus dans le plan (x,y), alors que le pseudo-vecteur champ magnétique est de la forme $\vec{\mathbf{H}} = \psi \vec{\mathbf{e}}_z$. L'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{\mathbf{E}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$ montre l'existence d'un *potentiel électrique* φ tel que $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi$. De l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{\mathbf{H}}\right) = \vec{\mathbf{j}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} = \sigma\vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi$ on déduit alors

  $$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sigma\frac{\partial \varphi}{\partial x} \ , \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sigma\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

  soient les conditions de Cauchy sur $f = \sigma\varphi + i\psi$. Ainsi les fonctions $\sigma\varphi$ et ψ sont harmoniques conjuguées ; en particulier on notera que les lignes $\psi =$ *constante* sont d'après la proposition 1.5 orthogonales aux lignes $\varphi =$ *constante*, donc correspondent aux lignes de courant (lignes du champ $\vec{\mathbf{j}}$). Pour cette raison on appelle ψ la *fonction de courant* du conducteur.

- les ***écoulements irrotationnels bidimensionnels de fluides parfaits incompressibles***. L'équation de la dynamique de la vorticité $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{\mathbf{v}}\right)$ pour un fluide parfait incompressible

  $$\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\omega}}}{\partial t} + \left(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\vec{\boldsymbol{\omega}} = \left(\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\right)\vec{\mathbf{v}}$$

  montre que la vorticité est conservée le long des trajectoires dans un écoulement plan avec $\vec{\mathbf{v}}$ dans le plan x,y et $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ parallèle à z. Si donc il n'y a pas de vorticité à l'instant initial, il n'en apparaîtra jamais : ceci justifie la considération des écoulements irrotationnels bidimensionnels. La condition $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\vec{\mathbf{v}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$ donne l'existence d'un *potentiel des vitesses* φ tel que les composantes du champ de vitesse soient $v_x = \partial\varphi/\partial x, v_y = \partial\varphi/\partial y$. La condition d'incompressibilité $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ montre alors que φ doit être harmonique. Si le domaine d'écoulement U est simplement connexe, le théorème 2.5 implique l'existence d'une fonction holomorphe f sur U dont la partie réelle est φ ; on appelera en général $f = \varphi + i\psi$ le *potentiel complexe* de l'écoulement, et ψ la *fonction de courant* de l'écoulement. On notera que $f'(z) = v_x(z) - iv_y(z)$, et que $v_x = \partial\psi/\partial y, v_y = -\partial\psi/\partial x$, ce qui implique en particulier que les lignes du champ de vitesse sont immédiatement données par les lignes $\psi =$ *constante*. En considérant inversement une fonction holomorphe f sur un ouvert simplement connexe U, on est assuré de l'existence d'un écoulement irrotationnel de fluide parfait incompressible dont le potentiel complexe est f. On peut alors déduire le champ de pression correspondant de l'équation d'Euler ou du

théorème de Bernoulli. Cette technique a été beaucoup utilisée comme point de départ pour l'étude de problèmes d'aérodynamique quasi-bidimensionnels, comme par exemple le calcul de la portance d'un profil d'aile donné.

2.4 Exercices et problème

Les deux premiers exercices présentent des applications des théorème et formule intégrale de Cauchy. L'exercice 2.3 est un exercice élémentaire concernant le lien entre fonctions harmoniques et holomorphes, tandis que le problème 2.1 propose un complément concernant le lien entre fonctions *bi*harmoniques et holomorphes.

Exercice 2.1 ***Calcul d'intégrales curvilignes***

Dans cet exercice γ^+ désigne le cercle unité de $\mathbb{C}$ orienté dans le sens trigonométrique.

1 Calculez, pour $|z| \neq 1$,

$$I(z) = \int_{\gamma^+} \frac{\zeta^{10}}{(\zeta - z)^9}\, d\zeta \ .$$

Indication : appliquez le théorème de Cauchy ou la formule intégrale de Cauchy d'ordre supérieur.

2 Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U ouvert contenant le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Calculez pour $z \in U, |z| \neq 1$,

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \left\{ \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z g(\zeta)}{z\zeta - 1} \right\} d\zeta \ .$$

Indication : ramenez-vous à deux intégrales calculables soit avec le théorème de Cauchy, soit avec la formule intégrale de Cauchy.

3 Soient f holomorphe sur U ouvert contenant le disque unité fermé de $\mathbb{C}$, a et b deux points distincts du disque unité ouvert. Montrez que

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \ .$$

Que pouvez-vous dire de la limite où $a \to b$?

Indication : « décomposez ».

Exercice 2.2 ***Existence de primitives - Théorème de Morera***

1 Montrez qu'une fonction f continue sur U ouvert connexe possède une primitive holomorphe sur U si et seulement si

$$(C) \qquad \text{pour tout circuit } \gamma^+ \text{ de } U, \quad \int_{\gamma^+} f(z)\, dz = 0 \ .$$

2 Déduisez-en le ***théorème de Morera*** (réciproque du théorème de Cauchy) : si f continue sur U ouvert connexe vérifie (C), alors f est holomorphe sur U.

Exercice 2.3 ***Sur le lien entre fonctions holomorphes et harmoniques*** [test $2003 - 2004$]

Peut on affirmer en général que le module $|f|$ ou le module carré $|f|^2$ d'une fonction f holomorphe sur un ouvert connexe U sont harmoniques ?

Problème 2.1 ***Fonctions biharmoniques***

Les fonctions $\varphi(x,y)$ ***biharmoniques*** à valeurs réelles sont définies comme les solutions $C^4(U \to \mathbb{R})$ de l'équation

$$\boxed{\Delta(\Delta\varphi) = 0} \tag{2.16}$$

où $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ est l'opérateur laplacien.
Elles apparaissent naturellement dans des problèmes bidimensionnels de mécanique :

- ***déformations d'un solide homogène élastique isotrope soumis à des « contraintes planes »*** i.e. de tenseur des contraintes $\overrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}}$ invariant par rapport à z et tel que $\sigma_{zz} = 0$. On montre à partir de l'équation de l'équilibre local l'existence d'une ***fonction de contraintes*** ou ***fonction d'Airy*** $\varphi(x,y)$ telle que

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; (\Delta\varphi)\overrightarrow{\overrightarrow{\mathbf{1}}} \;-\; \overrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\varphi\right) \;.$$

  Par combinaison de la loi de Hooke et des équations de compatibilité cinématiques sur le tenseur des déformations, on montre que φ doit vérifier l'équation (2.16).

- ***écoulements bidimensionnels de Stokes d'un fluide visqueux incompressible***. On montre à partir de l'équation de conservation de la masse et de la bidimensionalité x,y l'existence d'une ***fonction courant*** $\varphi(x,y)$ déterminant le champ des vitesses selon

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} \;=\; \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\varphi\,\overrightarrow{\mathbf{e}_z}) \;.$$

  Le rotationnel de l'équation de Stokes montre que φ doit vérifier l'équation (2.16).

Le but de cet exercice est de montrer que les fonctions biharmoniques à valeurs réelles peuvent se déduire en général de potentiels complexes. On supposera toujours l'ouvert de définition U de φ simplement connexe.

1.a Si $\varphi(x,y)$ est biharmonique, et $P(x,y)$ désigne son laplacien

$$P(x,y) = \Delta\varphi(x,y) \;,$$

montrez qu'il existe une fonction $f(z)$ holomorphe sur U telle que $P = \mathrm{Re}\, f$ sur U.

1.b Soit $g : z \mapsto A(z) + iB(z)$ avec A et B à valeurs réelles une primitive holomorphe quelconque de $f/4$. Montrez que la fonction à valeurs réelles définie par

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) - [xA(x,y) + yB(x,y)]$$

peut s'écrire comme la partie réelle d'une fonction holomorphe $h(z)$ sur U.

1.c Concluez-en l'écriture de φ dérivant de potentiels complexes holomorphes g et h,

$$\boxed{\varphi(z) \;=\; \mathrm{Re}[\; \overline{z}g(z) + h(z)\;]} \tag{2.17}$$

2 Réciproquement soient g et h deux fonctions holomorphes sur U. Montrez que $\varphi(z)$ donnée par l'équation (2.17) est biharmonique.

3 Quelle fonction φ déterminent les potentiels complexes

$$g(z) = i\alpha z + \beta \;, \quad h(z) = -\overline{\beta}z$$

pour α constante réelle, β constante complexe ?
A φ donnée, les potentiels complexes g et h tels que l'écriture (2.17) ait lieu sont-ils uniques ?

Chapitre 3

Fonctions analytiques

Après quelques rappels et compléments sur les séries entières dans $\mathbb{C}$, nous pourrons enfin donner dans la section 3.2 le résultat central de ce cours, qui sera ensuite exploité et illustré.

3.1 Séries entières dans $\mathbb{C}$

Une ***série entière*** dans $\mathbb{C}$ est une série de fonctions dont le terme général est un monôme $a_n(z-z_0)^n$ où $z_0 \in \mathbb{C}$ est un « point central ». Un exemple canonique de série entière « centrée » en $z_0 = 0$ est donné par la ***série géométrique*** de terme général z^n. À partir de l'identité algébrique

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z-1)\sum_{n=0}^{p} z^n \;=\; z^{p+1} - 1 \;,$$

on établit immédiatement que cette série converge si et seulement si $|z| < 1$, vers la fonction $-1/(z-1)$:

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \;=\; \frac{1}{1-z}} \;. \tag{3.1}$$

Le fait que le domaine de convergence de la série soit un disque peut se généraliser. Pour cela, en revenant au cas général d'une série de la forme $\sum_n a_n(z-z_0)^n$, on va démontrer le

Lemme 3.1 (Abel) *si $\forall n$, $|a_n|r^n \leq M$, alors la série converge uniformément pour $|z-z_0| \leq R' < r$.*

En effet pour $|z-z_0| \leq R' < r$ il vient

$$|a_n||z-z_0|^n \;\leq\; M(R'/r)^n$$

terme général d'une série géométrique convergente. On en déduit que la suite de fonctions

$$f_p(z) \;=\; \sum_{n=0}^{p} a_n(z-z_0)^n$$

est de Cauchy donc convergente[1]. Le fait que son reste

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

[1]Rappelons qu'une suite g_p de nombres complexes est de Cauchy si

$$\forall \eta > 0 \;, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall p \geq N, \forall q \geq N, \quad |g_p - g_q| < \eta \;.$$

Rappelons aussi que toute suite convergente est de Cauchy, et que la réciproque est vraie car $\mathbb{C}$ est ***complet***.

peut être majoré uniformément en z par le reste de la série géométrique explicitée montre que l'on a convergence uniforme.

On en déduit la

Proposition 3.1 *l'ensemble des nombres réels positifs r tels que la série de terme général $|a_n|r^n$ converge est un intervalle d'origine 0 ; la borne supérieure R de cet intervalle (éventuellement égale à $+\infty$) est le* ***rayon de convergence*** *de la série entière, tel que $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ converge pour $|z-z_0| < R$, uniformément pour $|z-z_0| \leq R' < R$.*

L'ensemble D des nombres complexes z tels que $|z-z_0| < R$ est appelé ***disque de convergence*** de la série entière. En dehors de $\overline{D}$, pour $|z-z_0| > R$, la suite $a_n(z-z_0)^n$ ne peut être bornée, donc a fortiori la série $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ ne peut converger. Par contre il n'existe pas de résultats généraux pour la convergence de la série entière sur la frontière de D.

Nous allons établir le

Théorème 3.1 *une série entière $f(z) = \sum_n a_n(z-z_0)^n$ est holomorphe dans son disque de convergence, de dérivée*

$$f'(z) \;=\; \sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1} \;. \tag{3.2}$$

On se place pour la démonstration dans le cas non trivial où le rayon de convergence R de f est strictement positif. En translatant éventuellement z de z_0 on se ramène à montrer que $g(z) = \sum_n a_n z^n$ est holomorphe dans son disque de convergence $D = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| < R\}$, de dérivée $h(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$. La convergence de cette dernière série est assurée pour $z \in D$; en effet en choisissant alors r tel que $|z| < r < R$, il vient

$$n|z|^{n-1} \;=\; \frac{1}{r} n \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} r^n \leq C r^n$$

puisque pour $\alpha < 1$ la suite $n\alpha^{n-1}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. On en déduit

$$n|a_n||z|^{n-1} \;\leq\; C|a_n|r^n$$

terme général d'une série convergente : $h(z)$ a un rayon de convergence au moins égal[2] à R.
En fixant toujours $0 < r < R$, formons pour u et v de module inférieur à r, $u \neq v$:

$$\frac{g(v)-g(u)}{v-u} - h(u) \;=\; \sum_{n\geq 2} a_n \left[\frac{v^n-u^n}{v-u} - n u^{n-1}\right] . \tag{3.3}$$

En utilisant l'identité

$$\frac{v^n-u^n}{v-u} \;=\; \sum_{p=0}^{n-1} v^{n-1-p}u^p \;,$$

on peut récrire le terme entre crochets dans (3.3) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n-1}[v^{n-1-p}u^p - u^{n-1}] \;&=\; \sum_{p=0}^{n-2}[v^{n-1-p}u^p - u^{n-1-p}u^p] \\
&=\; \sum_{p=1}^{n-1} u^{p-1}\;[v^{n-p}-u^{n-p}] \\
&=\; \sum_{p=1}^{n-1} u^{p-1}\;(v-u) \sum_{k=0}^{n-p-1} v^{n-p-1-k}u^k \;.
\end{aligned}$$

[2]On peut montrer que le rayon de convergence de la série dérivée est en fait strictement le même que celui de la série originale, cf. le problème 3.1 question 4.

Le module de cette expression est au plus égal à

$$|v-u|\sum_{p=1}^{n-1} r^{p-1}(n-p)r^{n-p-1} \;=\; |v-u|\;\frac{1}{2}n(n-1)\;r^{n-2}\;,$$

d'où en reportant dans (3.3) :

$$\Big|\frac{g(v)-g(u)}{v-u}-h(u)\Big| \;\le\; \frac{1}{2}\;|v-u|\;\sum_{n\ge 2} n(n-1)|a_n|\;r^{n-2}\;.$$

La série qui apparaît correspond aux modules de la dérivée seconde de g, elle converge donc puisque $r<R$. On en déduit immédiatement

$$\lim_{v\to u, v\neq u}\frac{g(v)-g(u)}{v-u} \;=\; h(u)\;.\quad \text{CQFD.}$$

Par une récurrence immédiate, on obtient alors le

Théorème 3.2 *une série entière $f(z)=\sum_n a_n(z-z_0)^n$ est indéfiniment dérivable par rapport à z dans son disque de convergence, de dérivée $k^{ième}$*

$$f^{(k)}(z) \;=\; \sum_{n\ge k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\;a_n(z-z_0)^{n-k}\;. \tag{3.4}$$

Remarquons que ceci implique en particulier

$$a_k \;=\; \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \tag{3.5}$$

pour $k\ge 0$.

Nous sommes maintenant mûrs pour la

Définition 3.1 *une fonction $f(z)$ est **analytique** dans son ouvert de définition U si pour tout z_0 dans U elle peut se développer en série entière dans un disque ouvert non vide centré sur z_0 et inclus dans U selon*

$$f(z) \;=\; \sum_n a_n(z-z_0)^n\;. \tag{3.6}$$

D'après le théorème 3.1, une fonction analytique est holomorphe. Nous allons voir dans la section suivante que la réciproque est vraie.

3.2 Identité entre fonctions holomorphes et analytiques

Soit f holomorphe sur U. La propriété qui va permettre le développement en série entière de f autour de z_0 élément quelconque de U est la formule intégrale de Cauchy. Choisissant un cercle γ centré sur z_0 et homotope à zéro dans U, on écrit cette formule (2.11) pour un point quelconque z de l'intérieur de γ :

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\;\int_{\gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\;d\zeta\;. \tag{3.7}$$

Notant r le rayon de γ, on a alors $|z-z_0|<|\zeta-z_0|=r$ ce qui permet d'écrire que

$$\frac{1}{\zeta-z} \;=\; \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} \;=\; \frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \;=\; \frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\;.$$

Cette dernière série étant uniformément convergente pour $\zeta\in\gamma$ d'après

$$\Big|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\Big| \;=\; \frac{|z-z_0|}{r} \;<\; 1\;,$$

on peut passer à la limite sous le signe intégrale dans (3.7), d'où le développement en série escompté.

Comme γ peut être arbitrairement grand du moment qu'il est entièrement inclu dans U ainsi que son intérieur, on obtient le

Théorème 3.3 (développement en série de Taylor) *pour qu'une fonction $f(z)$ définie dans un ouvert U soit analytique dans U, il faut et il suffit que f soit holomorphe dans U. On peut alors la développer en* ***série de Taylor*** *autour de tout point z_0 de U selon*

$$\boxed{f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n} \tag{3.8}$$

le rayon de convergence de cette série étant au moins égal à la distance de z_0 au bord de U. De plus on a pour tout circuit γ de U entourant z_0 et homotope à zéro dans U :

$$\boxed{a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}} \tag{3.9}$$

compte tenu de (2.12).

Ce théorème est extrèmement puissant, comme illustré par exemple dans les exercices 3.1 et 4.1.

3.3 Propriétés des fonctions analytiques

Nous allons tirer ici toutes les conséquences de la propriété très forte d'existence de développement en série entière. En particulier l'étymologie du qualificatif « holomorphe » (du grec *holos* « entier » et *morphê* « forme ») va être justifiée par le principe d'identité, qui stipule qu'une fonction holomorphe est déterminée globalement dès qu'on la connaît dans un disque ouvert, aussi petit soit-il.

3.3.1 Principe d'identité

Proposition 3.2 *soit f holomorphe dans un ouvert connexe U. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(P1) f est identiquement nulle sur U.

(P2) f est identiquement nulle sur un disque ouvert non vide inclus dans U ;

(P3) il existe une suite ζ_n de nombres distincts dans U telle que

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = z_0 \in U \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; f(\zeta_n) = 0 \;;$$

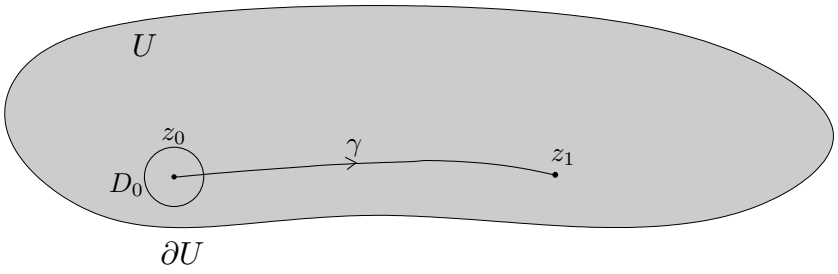
(P4) il existe $z_0 \in U$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$;

Evidemment *(P1)* $\Rightarrow$ *(P2)* $\Rightarrow$ *(P3)*.
Montrons que *(P3)* $\Rightarrow$ *(P4)*. Pour cela supposons *(P3)* et qu'il existe néanmoins $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ alors que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour $n < m$. Par analyticité de f, il va exister un disque D ouvert non vide centré sur z_0 dans lequel on va pouvoir écrire que

$$f(z) = (z - z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots] = (z - z_0)^m \varphi(z)$$

où φ, analytique dans D, vérifie $\varphi(z_0) = a_m = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$. Par continuité de φ en z_0 il existera un sous-disque non vide de D, centré sur z_0, dans lequel φ donc f ne sera jamais nulle. Ceci contredit l'hypothèse *(P3)*.
Montrons maintenant que *(P4)* $\Rightarrow$ *(P2)*. Si *(P4)* est vérifié alors par analyticité de f on pourra la développer en série de Taylor (3.8) dans un disque ouvert D non vide centré sur z_0. D'après le lien (3.9) entre les

coefficients de cette série et les dérivées n^{ièmes} de f, on aura alors $f = 0$ sur D.
Pour démontrer que *(P2)* $\Rightarrow$ *(P1)*[3] on utilise que si U est connexe et s'il existe un disque $D_0 \in U$, de centre z_0, dans lequel $f = 0$, on va pouvoir joindre n'importe quel point z_1 de U à z_0 par un chemin γ de U. D'après le lemme 3.2, le long de γ l'application $z \mapsto d(z,\partial U)$ atteint son minimum. Comme U est ouvert, ce minimum ne peut être que strictement positif : il existe donc un « tube » inclus dans U qui contient le chemin γ.



On peut alors construire une suite de disques $D_0, \cdots, D_n$ inclus dans U et recouvrant γ tels que chaque disque soit centré dans le précédent. Sur chaque disque f est développable en sa série de Taylor donc nulle, d'où $f(z_1) = 0$.

Lemme 3.2 (continuité de la fonction distance au bord d'un ouvert) *la fonction $z \mapsto d(z,\partial U)$ qui à un complexe z associe sa distance au bord de l'ouvert U :*

$$d(z,\partial U) \ = min_{\zeta \in \partial U} |z - \zeta| \tag{3.10}$$

est ***continue*** *de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.*
En effet pour $z' \in U$ on a par inégalité triangulaire

$$\forall \zeta \in \partial U \ , \ \ |z' - \zeta| \ \leq \ |z' - z| + |z - \zeta| \ .$$

On en déduit $d(z',\partial U) \leq |z' - z| + d(z,\partial U)$, d'où, par symétrie des roles de z et z',

$$\big|d(z',\partial U) - d(z,\partial U)\big| \ \leq \ |z' - z| \ .$$

En revenant à la proposition 3.2, le fait que *(P3)* $\Rightarrow$ *(P1)*, qui signifie que toute suite de zéros d'une fonction holomorphe non nulle sur U ne peut avoir de point d'accumulation dans U, s'appelle le ***principe des zéros isolés***.

En appliquant la proposition 3.2 à la différence de deux fonctions analytiques, on obtient la

Proposition 3.3 (principe d'identité) *soient f et g holomorphes dans U ouvert connexe. Si f et g coïncident sur un disque inclus dans U, ou pour une suite de nombres distincts possédant un point d'accumulation dans U, alors $f = g$.*

Ce résultat justifie la notion très importante de ***prolongement analytique***, qui se formule dans les termes suivants : si f holomorphe dans U ouvert connexe est donnée, existe t'il une fonction g analytique définie dans un ouvert connexe V strictement plus grand que U telle que g coïncide avec f sur U ? D'après le principe d'identité, un tel prolongement analytique, s'il existe, est unique.

Exemple : pour $|z| < 1$ on définit $f(z) = \sum_n (-1)^n z^n$; f est analytique sur le disque de centre 0 et de rayon 1. On reconnaît la somme de la série $1/(1+z)$; le prolongement analytique de f sur $\mathbb{C} - \{-1\}$ est donc la fonction $g(z) = 1/(1+z)$.

[3] Une démonstration plus formelle utilisant le fait qu'un connexe ne peut admettre de sous-ensemble strict à la fois ouvert et fermé peut être trouvée dans Chaterji (1997).

3.3.2 Propriété de la moyenne et principe du maximum

Munis des résultats qui précèdent, nous allons pouvoir déduire de la formule intégrale de Cauchy le principe du maximum. Pour cela on commence par récrire cette formule (2.11) dans le cas où γ^+ est un cercle centré sur z_0, en utilisant le paramétrage polaire standard ; on en déduit :

Proposition 3.4 (propriété de la moyenne) *si f est holomorphe sur U, alors pour tout $z_0 \in U$, $f(z_0)$ est la moyenne de f sur tout cercle centré sur z_0 et entièrement contenu dans U ainsi que son intérieur :*

$$\boxed{f(z_0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\; d\theta} \tag{3.11}$$

en notant r le rayon d'un tel cercle.

Cette propriété de la moyenne s'applique évidemment aux parties réelle et imaginaire de f holomorphe ; elle s'applique donc aussi à toute fonction P à valeurs réelles harmonique sur U. En effet d'après le théorème 2.5, en se restreignant à un voisinage simplement connexe $V \subset U$ de z_0 contenant le disque de rayon r, il existe alors Q harmonique sur V telle que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ soit holomorphe sur V. En prenant la partie réelle de (3.11) appliquée à f, on obtient immédiatement

$$P(x_0,y_0) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\; d\theta\ . \tag{3.12}$$

La propriété de la moyenne (3.11) implique en particulier, notant $C(z_0,r)$ un cercle centré sur z_0 tel que le disque associé soit entièrement contenu dans U,

$$|f(z_0)| \;\leq\; \sup_{z\in C(z_0,r)} |f(z)|\ . \tag{3.13}$$

Si f est non constante, l'inégalité précédente est en fait une inégalité stricte :

Proposition 3.5 (principe du maximum) *soit f une fonction holomorphe non constante dans un ouvert connexe U ; alors la fonction $|f(z)|$ ne peut avoir de maximum relatif dans U, i.e. il n'existe pas de point z_0 dans U tel que, pour un cercle $C(z_0,r)$ centré sur z_0 tel que le disque associé soit entièrement contenu dans U,*

$$|f(z_0)| \;=\; \sup_{z\in C(z_0,r)} |f(z)|\ .$$

Supposons en effet qu'un tel point z_0 existe. Si $f(z_0) = 0$, alors $f = 0$ sur le cercle $C(z_0,r)$ de l'hypothèse. D'après le principe d'identité, f est alors nulle sur U donc constante sur U ce qui est contradictoire. Si $f(z_0) \neq 0$, introduisons $g(z) = f(z)/f(z_0)$. La fonction g est holomorphe sur U et vérifie

$$\forall z \in C(z_0,r) \qquad\qquad |g(z)| \;\leq\; |g(z_0)| \;=\; g(z_0) \;=\; 1\ .$$

La propriété de la moyenne (3.11) appliquée à la partie réelle de g (cf. aussi (3.12)) donne alors

$$1 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\; g(z_0 + re^{i\theta})\; d\theta\ .$$

Ainsi la fonction $h : \theta \in [0,2\pi] \mapsto 1 - \mathrm{Re}\; g(z_0 + re^{i\theta})$, continue sur $[0,2\pi]$, positive sur $[0,2\pi]$ d'après

$$\mathrm{Re}\; g(z_0 + re^{i\theta}) \;\leq\; |g(z_0 + re^{i\theta})| \;\leq\; 1,$$

vérifie

$$\int_0^{2\pi} h(\theta)\; d\theta \;=\; 0\ .$$

Elle est donc nulle sur [0,2π]. Ainsi Re $g(z_0 + re^{i\theta}) = 1$ pour tout θ, soit d'après $|g(z_0 + re^{i\theta})| \leq 1$,

$$g(z_0 + re^{i\theta}) \;=\; 1 \quad \forall\theta \;.$$

Le principe d'identité implique alors que $g = 1$ sur U i.e. $f = f(z_0)$ sur U, ce qui contredit l'hypothèse.

Une conséquence immédiate de ce principe est que le module d'une fonction holomorphe ne peut atteindre son maximum que sur la frontière du domaine de définition de f :

Proposition 3.6 *soient U un ouvert connexe borné, f continue non constante sur $\overline{U}$, holomorphe sur U. Alors $|f(z)|$ atteint son maximum sur la frontière de U et nulle part ailleurs.*

En effet comme $\overline{U}$ est compact $|f(z)|$ y atteint son maximum en un point z_0, qui ne peut être à l'intérieur de U d'aprés le principe du maximum.

Citons finalement l'application du principe du maximum aux fonctions harmoniques réelles :

Proposition 3.7 *soit $P(x,y)$ une fonction harmonique à valeurs réelles non constante sur U ouvert connexe ; alors $P(x,y)$ ne peut admettre de maximum ni de minimum local dans U.*

Supposons par exemple l'existence d'un maximum local en $z_0 \in U$. Soit V un ouvert simplement connexe inclus dans U contenant le disque centré sur z_0 sur la frontière duquel on a $P(z) \leq P(z_0)$. On sait d'après le théorème 2.5 que P est la partie réelle d'une fonction f holomorphe sur V. Alors $g(z) = \exp f(z)$ est aussi holomorphe sur V, et $|g(z)| = \exp P(z)$ admet un maximum local en z_0 sans être constante, ce qui contredit le principe du maximum. Le résultat concernant l'absence de minimum local s'obtient en appliquant ce que l'on vient de démontrer à $-P$.

On en déduit immédiatement la

Proposition 3.8 *soient U un ouvert connexe borné, $P(x,y)$ une fonction à valeurs réelles continue sur $\overline{U}$, harmonique sur U. Alors il existe z_0 et z_1 sur le bord de U tels que*

$$P(z_0) = \inf_{z\in\overline{U}} P(z) \;, \quad P(z_1) = \sup_{z\in\overline{U}} P(z) \;. \tag{3.14}$$

Ce résultat implique l'unicité des solutions d'un ***problème de Dirichlet plan*** posé sur U ouvert connexe borné :

$$\begin{array}{ll} & \varphi \text{ continue de } \overline{U} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ , deux fois différentiable sur } U \text{ ,} \\ \text{telle que} & \Delta\varphi = 0 \text{ dans } U \\ & \varphi = g \text{ donnée sur le bord de } U \text{ .} \end{array}$$

En effet la différence entre deux solutions est une fonction harmonique dans U, continue sur $\overline{U}$, qui vaut zéro sur le bord de U ; une telle fonction est nulle d'après la proposition 3.8.

3.3.3 Théorèmes de Liouville et de d'Alembert

Prolongeant en quelque sorte la propriété de la moyenne, l'expression (3.9)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \tag{3.15}$$

des coefficients d'une série entière en fonction d'intégrales sur un cercle entourant z_0 va nous permettre de donner une majoration intéressante sur ces coefficients, aboutissant à des théorèmes importants. Nous nous placerons d'emblée dans le cas $z_0 = 0$.

Proposition 3.9 *soit une fonction analytique* $f(z) = \sum_n a_n z^n$ *de rayon de convergence* R*. Pour tout* r*,* $0 < r < R$*, on a*

$$|a_n| \leq \frac{M_r(f)}{r^n} \tag{3.16}$$

où $M_r(f) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

En effet la relation (3.15) donne pour $z_0 = 0$, γ cercle de centre 0 et de rayon r :

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_r(f)}{r^{n+1}}\ r\ d\theta = \frac{M_r(f)}{r^n}\ .$$

Théorème 3.4 (de Liouville) *toute fonction analytique et bornée dans* $\mathbb{C}$ *est constante.*

Soit f analytique dans $\mathbb{C}$ telle que $\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$ soit fini égal à M. Alors la série de Taylor de f en zéro, $f(z) = \sum_n a_n z^n$, a un rayon de convergence infini ; d'après (3.16) on a $|a_n| \leq M/r^n$ pour tout r donc $a_n = 0$ si $n \geq 1$. CQFD.

Théorème 3.5 (de d'Alembert) *tout polynôme* $P(z)$ *à coefficients complexes non constant admet au moins une racine complexe.*

Considérons en effet un polynôme non constant P tel que $P(z) \neq 0\ \forall z$. Alors la fonction $f(z) = 1/P(z)$ serait non constante, analytique et bornée puisque $|P(z)| \to \infty$ quand $|z| \to \infty$. Ceci est impossible d'après le théorème 3.4.

Théorème 3.6 (de complétude algébrique de $\mathbb{C}$**)** $\mathbb{C}$ *est algébriquement clos au sens où toute équation « algébrique » dans* $\mathbb{C}$*, de la forme*

$$P(z) = 0\ ,$$

P *étant un polynôme à coefficients complexes, admet exactement* $n = \deg P$ *racines dans* $\mathbb{C}$*.*

La démonstration se fait par récurrence sur n. Un polynôme de degré 1, de forme générique $P(z) = az+b$ avec $a \neq 0$, admet évidemment pour seule racine $z = -b/a$. Si la propriété est démontrée pour tout polynôme de degré $n \geq 1$, soit P un polynôme de degré $n+1$. P est non constant donc d'après le théorème de d'Alembert il admet au moins une racine complexe z_0. Par division euclidienne[4] de P par $z - z_0$ on a

$$P(z) = (z - z_0)Q(z) + R \tag{3.17}$$

où Q est de degré $n-1$ et R de degré 0 c'est-à-dire constant. Comme $P(z_0) = 0$ on a $R = 0$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence au polynôme quotient Q.

3.4 Fonctions analytiques usuelles

Il est plus que temps de définir et d'étudier les fonctions analytiques usuelles.

[4]Rappelons qu'en général, si A et B sont deux polynômes à coefficients complexes, il existe un unique couple de polynômes (Q,R) à coefficients complexes tel que l'on ait

$$A = BQ + R \ \text{ et } \ \deg R < \deg B\ .$$

Ici on peut se contenter plus « pauvrement » de donner directement la solution de (3.17), à savoir, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$,

$$Q\ =\ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k}\ a_{n-l}\ z_0^{n-1-k-l} z^k\ .$$

3.4.1 Fonction exponentielle

La série entière définie par

$$\boxed{e^z \;=\; \exp z \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} \tag{3.18}$$

est telle que le rapport de deux termes généraux consécutif $z/(n+1)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$; on peut donc la majorer en module, pour z fixé et n suffisamment grand, par une série géométrique convergente. Ainsi son rayon de convergence est $+\infty$. D'après le théorème 3.1 cette fonction ***exponentielle*** est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée complexe (cf eq. (3.2))

$$\frac{d}{dz} \exp z \;=\; \exp z \;; \tag{3.19}$$

d'après le théorème 3.3 elle est en fait analytique sur $\mathbb{C}$. Pour u donné dans $\mathbb{C}$, la fonction $f : v \mapsto \exp(u+v)$ est aussi analytique dans $\mathbb{C}$; son développement de Taylor autour de zéro (3.8) donne

$$f(v) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} v^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(u)}{n!} v^n \;=\; \exp(u)\ \exp(v)$$

soit

$$\exp(u+v) \;=\; \exp(u)\ \exp(v)\ . \tag{3.20}$$

On en déduit en particulier, comme $\exp 0 = 1$, que $\exp(z)\exp(-z) = 1$ pour tout z, donc que exp ne s'annule jamais ; cette dernière égalité implique aussi que

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}\ . \tag{3.21}$$

Comme $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$, on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$\overline{\exp(it)} = \exp(-it) \quad \text{et} \quad |\exp(it)| = 1 \;; \tag{3.22}$$

notons enfin que pour $z \in \mathbb{R}$ la fonction exponentielle (3.18) coïncide évidemment avec la fonction exponentielle que l'on a définie dans les petites classes. C'en est évidemment le prolongement analytique sur $\mathbb{C}$.

3.4.2 Fonctions hyperboliques

Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit les fonctions ***cosinus hyperbolique*** et ***sinus hyperbolique*** par

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh z \;&=\; \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh z \;&=\; \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}} \tag{3.23}$$

Ce sont évidemment des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$, de dérivées

$$\frac{d\ \cosh z}{dz} = \sinh z \quad , \quad \frac{d\ \sinh z}{dz} = \cosh z\ . \tag{3.24}$$

Des calculs élémentaires montrent que

$$\exp z = \cosh z + \sinh z\ , \tag{3.25}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\ , \tag{3.26}$$

$$\cosh(-z) = \cosh z \ , \quad \sinh(-z) = -\sinh z \ . \tag{3.27}$$

À partir de ces informations il est aisé d'établir les identités

$$\cosh(u+v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v \ , \quad \sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v \ , \tag{3.28}$$

ainsi que toutes les identités classiques que l'on connaissait sur les fonctions cosinus et sinus hyperboliques réelles, avec lesquelles les fonctions (3.23) coïncident évidemment lorsque leur argument est réel.

3.4.3 Fonctions trigonométriques

Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit les fonctions ***cosinus*** et ***sinus*** par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos z & = & \cosh(iz) \ = \ \dfrac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} \ = \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin z & = & -i\sinh(iz) \ = \ \dfrac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i} \ = \ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array}} \tag{3.29}$$

Ce sont des fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$, de dérivées

$$\frac{d\ \cos z}{dz} = -\sin z \ , \quad \frac{d\ \sin z}{dz} = \cos z \ . \tag{3.30}$$

Des calculs élémentaires montrent que

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \ , \tag{3.31}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \ , \tag{3.32}$$

$$\cos(-z) = \cos z \ , \quad \sin(-z) = -\sin z \ . \tag{3.33}$$

À partir de ces informations, il est aisé d'établir les identités

$$\cos(u+v) \ = \ \cos u \ \cos v \ - \ \sin u \ \sin v \quad , \quad \sin(u+v) \ = \ \sin u \ \cos v \ + \ \cos u \ \sin v \ , \tag{3.34a}$$

$$\cos(u-v) \ = \ \cos u \ \cos v \ + \ \sin u \ \sin v \quad , \quad \sin(u-v) \ = \ \sin u \ \cos v \ - \ \cos u \ \sin v \ , \tag{3.34b}$$

ainsi que toutes les identités classiques que l'on connaissait sur les fonctions cosinus et sinus réelles, avec lesquelles les fonctions (3.29) coïncident évidemment lorsque leur argument est réel. On montre par exemple que

$$\cos u \ \cos v \ = \ \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)] \ , \tag{3.35a}$$

$$\sin u \ \sin v \ = \ \frac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)] \ , \tag{3.35b}$$

$$\sin u \ \cos v \ = \ \frac{1}{2}[\sin(u+v) + \sin(u-v)] \ , \tag{3.35c}$$

d'où, grâce à des changements de variables du type $p = u+v$, $q = u-v$,

$$\cos p + \cos q \ = \ 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad , \quad \cos p - \cos q \ = \ -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \ , \tag{3.36a}$$

$$\sin p + \sin q \ = \ 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad , \quad \sin p - \sin q \ = \ 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \ . \tag{3.36b}$$

D'autre part, en faisant $u = v$ dans (3.35), on obtient

$$\cos^2 u \ = \ \frac{1+\cos(2u)}{2} \ , \quad \sin^2 u \ = \ \frac{1-\cos(2u)}{2} \ , \quad \sin(2u) \ = \ 2\sin u \ \cos u \ . \tag{3.37}$$

Ces formules peuvent aussi se déduirent des ***formules de Moivre***

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad (\cos u + i \sin u)^n \ = \ \cos(nu) + i \sin(nu) \ , \tag{3.38}$$

qui découlent elles-mêmes de l'identité déduite par récurrence immédiate de (3.20),

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad (\exp z)^n \ = \ \exp(nz) \ . \tag{3.39}$$

En utilisant les formules du binôme et en raisonnant d'abord sur u réel, ce qui permet d'extraire $\cos(nu)$ et $\sin(nu)$ de (3.38) en prenant parties réelle et imaginaire, puis en prolongeant analytiquement le résultat à $u \in \mathbb{C}$ tout entier, on obtient par exemple

$$\cos(3u) \ = \ \cos^3 u \ - \ 3 \cos u \ \sin^2 u \quad , \quad \sin(3u) \ = \ 3 \cos^2 u \ \sin u \ - \ \sin^3 u \ , \tag{3.40a}$$

$$\cos(4u) \ = \ \cos^4 u \ - \ 6 \cos^2 u \ \sin^2 u \ + \ \sin^4 u \quad , \quad \sin(4u) \ = \ 4 \sin u \ \cos u \ (\cos^2 u - \sin^2 u) \ . \tag{3.40b}$$

En se souvenant du résultat élémentaire de trigonométrie[5]

$$\forall y \in \mathbb{R} \ , \quad \cos y = 1 \ \text{ et } \ \sin y = 0 \iff y = 2n\pi \text{ où } n \in \mathbb{Z} \ ,$$

on démontre que les périodes de la fonction exponentielle sont $2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$, i.e.

$$\forall z, \ \exp(z + \tau) = \exp z \iff \exp \tau = 1 \iff \tau = 2n\pi i, n \in \mathbb{Z} \tag{3.41}$$

et que les périodes des fonctions sinus et cosinus sont $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, i.e.

$$\forall z, \ \cos(z + \tau) = \cos z \iff \cos \tau = 1 \iff \tau = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \ , \tag{3.42}$$

$$\forall z, \ \sin(z + \tau) = \sin z \iff \tau = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \ . \tag{3.43}$$

À partir de

$$\cosh z = \cos(iz) \quad , \quad \sinh z = -i \sin(iz) \ , \tag{3.44}$$

qui signifie que les fonctions hyperboliques se déduisent des fonctions trigonométriques par compositions appropriées avec des rotations d'angle $\pm\pi/2$, on déduit en particulier que les périodes des fonctions sinus et cosinus hyperbolique sont $2n\pi i, n \in \mathbb{Z}$.

Notons que si $z = x + iy$ avec x et y réels on a

$$\cos z \ = \ \cos(x + iy) \ = \ \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \ = \ \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \ , \tag{3.45}$$

$$\sin z \ = \ \sin(x + iy) \ = \ \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \ = \ \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \ , \tag{3.46}$$

d'où

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y} \quad , \quad |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \ , \tag{3.47}$$

ce qui implique que $|\cos z| \to +\infty$ et $|\sin z| \to +\infty$ quand $|\mathrm{Im} z| \to +\infty$.

Avec les mêmes notations on établit que

$$\cosh z \ = \ \cosh(x + iy) \ = \ \cosh x \cosh(iy) + \sinh x \sinh(iy) \ = \ \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \ , \tag{3.48}$$

$$\sinh z \ = \ \sinh(x + iy) \ = \ \sinh x \cosh(iy) + \cosh x \sinh(iy) \ = \ \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \ , \tag{3.49}$$

qui indique maintenant des divergences lorsque $|\mathrm{Re} z| \to +\infty$.

[5] On peut le retrouver en introduisant $t_0 = \inf\{t > 0 \text{ tels que } \cos t = 0\}$; c'est alors un exercice élémentaire que de montrer que $t \mapsto \exp(it)$ est une bijection de $[0, 4t_0[$ sur le cercle unité. Comme par définition du nombre π le périmètre de ce cercle unité est 2π, on déduit de ce paramétrage

$$2\pi = \int_0^{4t_0} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \ dt = 4t_0$$

soit $t_0 = \pi/2$. Les valeurs des zéros de cos et sin ainsi que leur période se déduisent facilement de ce résultat.

3.4.4 Fonctions tangente et tangente hyperbolique

Sur $\mathbb{C}$ privé des zéros de la fonction cosinus, que le lecteur est invité à calculer en exercice (cf. à ce sujet l'exercice 3.4), on définit la fonction tangente trigonométrique par

$$\tan z \;=\; \frac{\sin z}{\cos z}\;. \tag{3.50}$$

Cette fonction est analytique sur son domaine de définition, de dérivée

$$\frac{d}{dz}\tan z \;=\; \frac{\cos z\cos z+\sin z\sin z}{\cos^2 z} \;=\; \frac{1}{\cos^2 z} \;=\; 1+\tan^2 z\;. \tag{3.51}$$

On peut déduire diverses formules valables pour cette fonction tangente des formules trigonométriques démontrées section précédente. Par exemple de (3.34) on déduit

$$\tan(u+v) \;=\; \frac{\tan u+\tan v}{1-\tan u\;\tan v} \tag{3.52}$$

lorsque tous ces nombres existent. De cette formule et de (3.40) on déduit

$$\tan(2u) \;=\; \frac{2\tan u}{1-\tan^2 u}\;, \tag{3.53a}$$

$$\tan(3u) \;=\; \frac{3\tan u-\tan^3 u}{1-3\tan^2 u}\;, \tag{3.53b}$$

$$\tan(4u) \;=\; 4\tan u\;\frac{1-\tan^2 u}{1-6\tan^2 u+\tan^4 u} \tag{3.53c}$$

lorsque tous ces nombres existent.

De même on définit sur $\mathbb{C}$ privé des zéros de la fonction cosinus hyperbolique la fonction tangente hyperbolique

$$\tanh z \;=\; \frac{\sinh z}{\cosh z}\;. \tag{3.54}$$

Cette fonction est aussi analytique sur son domaine de définition, de dérivée

$$\frac{d}{dz}\tanh z \;=\; \frac{\cosh z\cosh z-\sinh z\sinh z}{\cosh^2 z} \;=\; \frac{1}{\cosh^2 z} \;=\; 1-\tanh^2 z\;. \tag{3.55}$$

De plus on a

$$\tan z \;=\; -i\tanh(iz) \quad\text{et}\quad \tanh z \;=\; -i\tan(iz)\;. \tag{3.56}$$

3.4.5 Détermination principale de la fonction logarithme

La fonction exponentielle n'est pas surjective puisqu'elle ne s'annule jamais ; elle n'est pas non plus injective d'après (3.41). On ne peut donc espérer définir une fonction réciproque de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ tout entier. Par contre sur la coupure $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ on peut définir une fonction inverse de l'exponentielle par

$$\boxed{\ln w = \ln|w| + i\arg w} \tag{3.57}$$

en adoptant la convention de définition (1.12) de l'argument, $\arg w\in\,]-\pi,\pi]$. Cette ***détermination principale de la fonction logarithme*** (on pourrait définir une infinité d'autres déterminations en changeant la définition de la fonction argument) vérifie bien

$$\forall w\in\;\mathbb{C}-\mathbb{R}^-\;,\quad \exp(\ln w)=w\;; \tag{3.58}$$

d'après la proposition 1.6 c'est donc une bijection analytique de $\mathbb{C}-\mathbb{R}^-$ sur la bande $\mathbb{R}\times]-\pi,\pi[$ (voir à ce sujet la figure 3.1), et de plus

$$\frac{d\;\ln w}{dw}=\frac{1}{w}\;. \tag{3.59}$$

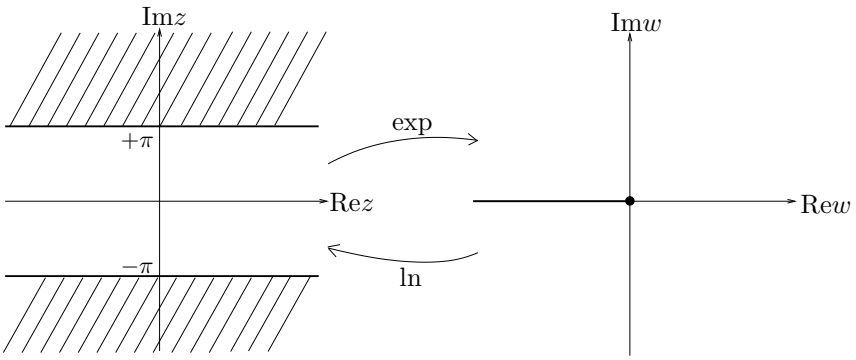


Fig. 3.1 – Gauche : exemple de domaine restreint de définition de l'exponentielle assurant son injectivité. Droite : domaine image par l'exponentielle, sur lequel est définie la détermination principale de la fonction logarithme.

Attention : certaines formules connues pour des variables réelles, qui reposaient sur l'injectivité de l'exponentielle réelle, ne sont plus valables pour le logarithme complexe. Ainsi il est facile de montrer que

$$\ln(\exp z) = z + 2n\pi i \tag{3.60}$$

où n est l'entier tel que $\mathrm{Im} z \in \,]-\pi-2n\pi,\pi-2n\pi]$; ou encore que

$$\ln(w_1 w_2) = \ln w_1 + \ln w_2 + 2\pi\delta i \tag{3.61}$$

où

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2\pi < \arg w_1 + \arg w_2 \leq -\pi \\ 0 & \text{si} \quad -\pi < \arg w_1 + \arg w_2 \leq \pi \\ -1 & \text{si} \quad \pi < \arg w_1 + \arg w_2 \leq 2\pi \end{cases} \tag{3.62}$$

3.4.6 Fonctions w^α

On peut se servir de la détermination principale de la fonction logarithme pour définir pour α nombre complexe quelconque et w dans la coupure $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ la fonction analytique :

$$\boxed{w^\alpha = \exp(\alpha \ln w)}\,. \tag{3.63}$$

On déduit par exemple aisément à partir de (3.60) que

$$(w^\alpha)^\beta = w^{\alpha\beta} \exp(2n\pi\beta i) \tag{3.64}$$

où n est l'entier tel que $\alpha \arg w \in \,]-\pi-2n\pi,\pi-2n\pi]$.

3.5 Exercices et problèmes

Le problème 3.1 est un problème de « révisions-compléments de cours » sur les séries entières. Les exercices et problèmes suivants portent sur les fonctions analytiques, tout d'abord d'un point de vue particulier permettant de se familiariser en douceur avec ces fonctions (exercices 3.1 à 3.4 complétés des problèmes 3.2 et 3.3), puis d'un point de vue général en se penchant sur les propriétés « génériques » de ces fonctions (exercices 3.5 à 3.7). J'insiste sur l'importance des fonctions trigonométriques et de l'exercice 3.4 ; une version étendue de cet exercice est en fait fournie par les problèmes 3.2 et 3.3, dont le corrigé se trouve en annexe A. Profitant d'autre part de ce que l'on sait maintenant l'unicité de la solution d'un problème de Dirichlet, les problèmes suivants 3.4 à 3.7 se proposent de construire la solution de tels problèmes en utilisant l'analyse complexe. On notera que le problème 3.6 (d'un niveau de difficulté plus élevé que la moyenne) fournit la solution *générale* des problèmes de Dirichlet posés à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cercle. Enfin le problème 3.8 introduit et étudie grâce à l'analyse complexe une famille de fonctions spéciales, à savoir celle des polynômes de Legendre.

Problème 3.1 ***Critères de convergence d'une série entière - Applications***

Soit $f(z) = \sum_n a_n (z - z_0)^n$ une série entière complexe donnée.

1 On définit

$$L \;=\; \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} \;=\; \lim_{p\to+\infty} \Big(\sup_{n\geq p} |a_n|^{1/n} \Big) \;\in\; [0, +\infty] \;.$$

Montrez que le rayon de convergence de la série entière est $R = 1/L$ (***critère de Cauchy***).

Commentaires et indications : vous noterez qu'une limite sup existe toujours dans $[0, +\infty]$, car dans le cas non trivial où la suite des sup est majorée on a affaire à une suite décroissante minorée donc convergente. Pour montrer le résultat demandé vous vous ramenerez à montrer que, pour une suite $\{b_n\}$ de réels positifs ou nuls, en posant

$$l \;=\; \limsup_{n\to+\infty} (b_n)^{1/n} \;\in\; [0, +\infty] \;,$$

si $l < 1$, $\sum_n b_n$ converge, alors que si $l > 1$, b_n ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2 On suppose que

$$L' = \lim_{n\to+\infty} \Big| \frac{a_{n+1}}{a_n} \Big|$$

existe dans $[0, +\infty]$. Montrez que $L' = L$ et en déduire que $R = 1/L'$ (***critère de d'Alembert***).

3 Donnez le rayon de convergence des séries entières suivantes :

3.a $\displaystyle\sum_n \frac{z^n}{n!}$ **3.b** $\displaystyle\sum_n n^\alpha z^n$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ **3.c** $\displaystyle\sum_n n! \Big(\frac{z}{n}\Big)^n$

3.d $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n) z^n$ **3.e** $\displaystyle\sum_n \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{2n}$

3.f $\displaystyle\sum_n c_n z^n$ avec $c_{2p} = 6^p$, $c_{2p+1} = 2\ 6^p$

3.g $\displaystyle\sum_n c_n z^{2n}$ avec $c_{3p} = 0$, $c_{3p+1} = 2^{2p+1}$, $c_{3p+2} = 2^{3p+2}$

4 Donnez le rayon de convergence de la série dérivée

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

en fonction de celui de f.

5 Montrez que $f(z)$ admet une primitive holomorphe dans son disque de convergence, et donnez cette primitive sous forme d'une série entière.

Exercice 3.1 ***Développements explicites en série de Taylor***

Dans cet exercice on utilisera (comme toujours en l'absence de spécifications autres) la détermination principale du logarithme.

1 Donnez le développement en série de Taylor de $z \mapsto \ln z$ autour de $z = 1$, en précisant son rayon de convergence.

2 Même question pour l'application $z \mapsto z^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

3 Donnez le développement en série de Taylor de $z \mapsto 1/z(z-1)$ autour de $z = 2$.

Exercice 3.2 ***Fonction erreur***

Montrez que l'on peut définir pour tout z la *fonction erreur*[6]

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2)\ du\ .$$

Montrez que erf est une fonction analytique de z sur $\mathbb{C}$, et donnez son développement de Taylor en zéro.

Exercice 3.3 ***Simplification de*** $\sqrt{z^2}$

Sur quelle partie du plan complexe est définie la détermination principale de la fonction $f : z \mapsto \sqrt{z^2}$? Donnez une (ou des) expression(s) de $f(z)$ en fonction de z n'utilisant plus la fonction racine. On distinguera éventuellement différents cas selon la valeur de z.

Exercice 3.4 ***Fonctions trigonométriques complexes***

Pour les fonctions trigonométriques

1 $f(z) = \cos z$ **2** $f(z) = \sin z$ **3** $f(z) = \tan z$

peut-on résoudre explicitement l'équation $f(z) = w$ pour w complexe donné ? Que peut-on en déduire à propos de la surjectivité de f ?

Problème 3.2 ***Sur la fonction arcsinus*** [test 2005 − 2006]

1 Rappelez quel est l'ouvert de départ U de la détermination principale du logarithme, et comment on peut l'utiliser pour définir la fonction racine carrée $\sqrt{\ }$. Quel est l'ouvert de départ U' de cette fonction racine ?

2 Déterminez l'ensemble des z complexes, soit U'', tels que $1 - z^2$ soit dans le domaine de définition U' de cette fonction racine carrée.

3 Montrez que, pour $z \in U''$, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ est dans U.
Indications : montrez dans un premier temps que si $iz + \sqrt{1 - z^2}$ n'est pas dans U, alors z est de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$; déduisez en qu'on ne peut avoir, pour $z \in U''$, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ hors de U.

4 Justifiez le fait de pouvoir définir une fonction g holomorphe de U'' dans $\mathbb{C}$ par

$$g(z) \ = \ -i \ln\Big(iz + \sqrt{1 - z^2}\Big)\ .$$

5 Simplifiez, pour $z \in U''$, l'expression de $\sin g(z)$, et déduisez du résultat obtenu qu'il est légitime de noter

$$\forall z \in U'', \quad g(z) \ = \ \arcsin(z)\ .$$

[6] *'Error function'* en anglais. En théorie des probabilités, une variable aléatoire x centrée, de densité de probabilité gaussienne

$$P(x) \ = \ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)$$

où σ est l'écart type, a une probabilité de se trouver entre $-\lambda\sigma$ et $+\lambda\sigma$ égale à

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda\sigma}^{+\lambda\sigma} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\ dx \ = \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda/\sqrt{2}}^{+\lambda/\sqrt{2}} \exp(-u^2)\ du \ = \ \mathrm{erf}(\lambda/\sqrt{2})\ ,$$

donc l'« erreur » que l'on commet en supposant cela est

$$1 - \mathrm{erf}(\lambda/\sqrt{2})\ .$$

D'ailleurs on définit la *fonction erreur complémentaire* par $\mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z)$.

6 Simplifiez l'expression de la dérivée de la fonction arcsin définie par g.

7.a Représentez graphiquement U''. Quelle est son intersection W avec l'axe des réels ?

7.b Représentez le graphe de la fonction arcsin ainsi définie et restreinte à W.

Problème 3.3 ***Sur la fonction arctangente et le calcul de*** π [examen $2004-2005$]

1 Déterminez le domaine d'holomorphie U de $f(z)=\tan z$.

2.a Tentez de résoudre l'équation $\tan z = w$ pour z inconnu dans U et w donné dans $\mathbb{C}$. Déterminez ainsi $f(U)$.

2.b En revenant sur ce calcul, résolvez en général l'équation $f(z)=f(z')$ pour z et z' dans U.

2.c Définissez un sous-domaine ouvert U_0 de U le plus grand possible, qui soit de forme simple et symétrique, qui contienne 0, et tel que la restriction de f à U_0 soit injective.

2.d Calculez l'image de U_0 par l'application g qui à z associe $\exp(2iz)$.

2.e Déduisez de ce qui précède l'ensemble des points w qui constituent $f(U_0)$, et dessinez cet ensemble.

2.f Donnez une expression de la fonction $f^{-1}=\arctan$ sur $f(U_0)$ reposant sur l'utilisation de la détermination principale du logarithme, et qui vérifie $\arctan 0 = 0$.

3.a Calculez, par la méthode de votre choix, la dérivée par rapport à w de cette fonction $\arctan(w)$.

3.b Donnez un développement en série de Taylor en 0 de $\arctan'(w)$. Quel est le rayon de convergence de ce développement ?

3.c Déduisez-en le développement en série de Taylor en 0 de $\arctan(w)$. Quel est son rayon de convergence ?

4 En utilisant les formules trigonométriques établies section 3.4.4, montrez la validité de la formule de Machin,

$$\pi/4 \;=\; 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)\ .$$

5 Proposez un algorithme permettant un calcul *efficace* de π à partir d'opérations arithmétiques élémentaires. Explicitez cet algorithme en écrivant un *programme* dans un langage informatique de votre choix, que vous préciserez bien entendu.

Exercice 3.5 ***Structure d'une fonction analytique au voisinage d'un point selle***

Soit f analytique sur U ouvert. On dit que f présente un ***point selle*** en $z_0 \in U$ si

$$f'(z_0)=0 \quad \text{et} \quad f''(z_0)\neq 0\ .$$

Par translation des valeurs de f on peut aussi supposer pour simplifier que

$$f(z_0)=0\ .$$

Montrez que, au voisinage de z_0, pour $z=z_0+\rho e^{i\theta}$ avec ρ petit, le signe des parties réelle P et imaginaire Q de f est déterminé uniquement par la valeur de θ. Dessinez l'allure « universelle » (car indépendante de f) des lignes $P=\textit{constante}$ et $Q=\textit{constante}$ au voisinage de z_0. Esquissez la surface $h=P(x,y)$ au voisinage de z_0.

Exercice 3.6 ***Fonctions holomorphes bornées par une puissance de*** z

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le plan $\mathbb{C}$ tout entier telle qu'il existe un entier p et deux nombres réels positifs R, M vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{C}\ , \quad |z| \geq R \quad \Longrightarrow \quad |f(z)| \leq M|z|^p\ .$$

Montrez que $f(z)$ est un polynôme de degré au plus p.

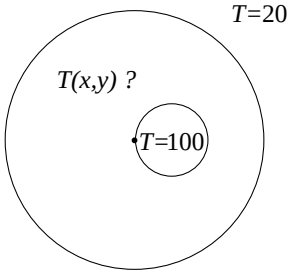
Exercice 3.7 ***Application du principe du maximum***

Soient U un ouvert connexe borné et $f(z)$ une fonction non constante continue sur $\overline{U}$, holomorphe sur U. Montrez que si $|f(z)|$ est constante sur la frontière de U, alors f admet au moins un zéro dans U.

Indication : raisonner par l'absurde en considérant $g(z) = 1/f(z)$.

Problème 3.4 ***Résolution d'un problème issu de la thermique***

On veut calculer en régime stationnaire le champ de température T dans la gaine isolante d'une conduite cylindrique excentrée représentée ci-contre :



Les axes sont tous verticaux (parallèles à z) et le champ de température ne dépend que des variables horizontales x et y. Dans la canalisation intérieure, formée du cylindre de rayon $0.3R$ et de centre de coordonnées $(0.3R,0)$, circule de la vapeur d'eau portée à 100 °C. La gaine isolante, comprise entre ce cylindre et le cylindre extérieur de rayon R et de centre de coordonnées (0,0), est constituée d'un matériau homogène et isotrope. Au niveau du cylindre extérieur, elle est en contact thermique avec une atmosphère à 20 °C.

1 Formulez l'équation aux dérivées partielles que doit satisfaire le champ de température $T(x,y)$ dans la gaine isolante, ainsi que les conditions aux limites associées. Montrez que l'on peut supposer $R = 1$. Peut-on formuler le problème en terme de recherche d'une fonction holomorphe particulière ?

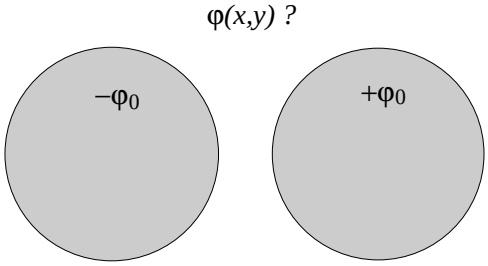
2 Montrez que l'application $h(z) = (z-3)/(3z-1)$ réalise une transformation conforme bijective du domaine supportant la gaine isolante vers un domaine que l'on précisera.

3 Résolvez le problème transporté par h.
Indication : utilisez les conditions de Cauchy en coordonnées polaires (exercice 1.8).

4 Déduisez en la solution du problème de départ.

Problème 3.5 ***Résolution d'un problème issu de l'électricité***

On veut calculer le potentiel électrique φ dans l'espace extérieur à deux cylindres conducteurs d'axes parallèles, de rayon 4 mm, dont les centres sont distants de 10 mm, et qui sont portés respectivement au potentiel $\pm\varphi_0$:



1 À quelle équation doit satisfaire le potentiel électrique $\varphi(x,y)$ dans l'espace extérieur aux conducteurs, constitué d'un milieu électriquement neutre ? Quelles sont les conditions aux limites correspondantes ? Peut-on formuler le problème en terme de recherche d'une fonction holomorphe particulière ?

2 Montrez que l'application $h(z) = (z+3)/(z-3)$ réalise une transformation conforme bijective du domaine extérieur aux conducteurs vers un domaine que l'on précisera.

Indication : décomposez le domaine extérieur aux conducteurs en l'intersection des domaines extérieurs à chaque disque correspondant, et cherchez l'image de chacun de ces domaines en procédant par équivalence :

$z \notin D_1 \iff |z-5| \geq 4 \iff |h^{-1}(w)-5| \geq 4 \iff \ldots \iff$ une inégalité portant sur $w = h(z)$...

3 Résolvez le problème transporté par h puis le problème de départ.

Problème 3.6 ***Résolution du problème de Dirichlet à l'intérieur et à l'extérieur d'un cercle***

1 Soit u une fonction harmonique dans $U = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < R\}$. On sait qu'il existe f holomorphe sur U telle que $u = \mathrm{Re} f$, et que f est unique si on exige de plus $\mathrm{Im} f(0) = 0$. Montrez que pour $0 < r < R$, on peut exprimer $f(z)$ puis $u(z)$ dans le disque $|z| < r$ en fonction des valeurs de u sur le cercle $|z| = r$.

Indication : intégrez terme à terme, pour $t \in [0,2\pi]$ et p entier, le développement de Taylor de $u(re^{it})\ e^{-ipt}$ déduit de celui de $f(re^{it})$.

2 Soit u une fonction réelle continue définie sur le cercle $|z| = r$. Montrez que la ***formule intégrale de Poisson***

$$f(z) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} u(re^{it})\ dt$$

définit une fonction f holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < r\}$ dont la partie réelle φ est solution du problème de Dirichlet à l'intérieur U du cercle associé à u :

$$\begin{array}{ll} & \varphi \text{ continue de } \overline{U} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ , deux fois différentiable sur } U \text{ ,} \\ \text{telle que} & \Delta\varphi = 0 \text{ dans } U \\ & \varphi = u \text{ sur le bord de } U \text{ .} \end{array}$$

Indication : on aura intérêt à introduire, pour $|z| < r$ et $|\zeta| = r$, le ***noyau de Poisson***

$$P(z,\zeta) = \mathrm{Re}\Big(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\Big) = \frac{r^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

et à montrer que, pour $|\zeta_0| = r, |\zeta| = r$ et $0 < \delta < r$, $\lim\limits_{z \to \zeta_0} \sup\limits_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P(z,\zeta) = 0$.

3 Soit v une fonction réelle continue définie sur le cercle $|z| = r$; donnez l'expression de la fonction f holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| < r\}$ dont la partie imaginaire ψ est solution du problème de Dirichlet à l'intérieur U du cercle associé à v.

4 Soit u une fonction réelle continue définie sur le cercle $|z| = r$; en utilisant la transformation homographique $h(z) = r^2/z$, montrez que

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} u(re^{it})\, dt$$

définit une fonction f holomorphe sur $V = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| > r\}$ dont la partie réelle φ est solution du problème de Dirichlet à l'extérieur V du cercle associé à u.

5 Soit v une fonction réelle continue définie sur le cercle $|z| = r$; donnez l'expression de la fonction f holomorphe sur $V = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| > r\}$ dont la partie imaginaire ψ est solution du problème de Dirichlet à l'extérieur V du cercle associé à v.

Problème 3.7 ***Résolution d'un problème issu de la mécanique des fluides***

On veut étudier l'écoulement irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un obstacle constitué par un cylindre d'axe Oz et de rayon r. On suppose que quand $(x,y) \to \infty$, le champ de vitesse $\vec{\mathbf{v}}(x,y)$ devient unidirectionnel, i.e. $\vec{\mathbf{v}}(x,y) \to v_0 \vec{\mathbf{e}}_x$. On suppose de plus que la symétrie $y \mapsto -y$ n'a pas été brisée par l'écoulement et on se restreint en conséquence au domaine

$$U = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| > r \text{ et } \mathrm{Im} z \geq 0\}$$

pour calculer l'écoulement.

1 Montrez l'existence d'un ***potentiel complexe*** $f = \varphi + i\psi$, fonction holomorphe de $z = x + iy$ sur U, tel que $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\varphi$ et les lignes du champ de vitesse sont données par les lignes $\psi =$*constante*. Montrez que l'on peut exprimer la condition aux limites sur la surface de contact $|z| = r$ en exigeant que $\psi(z) = 0$ si $|z| = r$, et que la condition à l'infini s'écrit $f'(z) \to v_0$ quand $|z| \to \infty$.

2 Posant $g(z) = f(z) - v_0 z$ afin d'éliminer la contribution de l'écoulement à l'infini, traduisez le problème en terme de recherche d'une fonction g holomorphe sur U de partie imaginaire donnée sur un demi-cercle, et vérifiant $g'(z) \to 0$ quand $|z| \to \infty$.

3 Trouvez g en vous appuyant sur les résultats du problème 3.6, question 5.

4 Déduisez-en le potentiel complexe f puis le champ de vitesse $\vec{\mathbf{v}}$.

Problème 3.8 ***Polynômes de Legendre***

1 Montrez que, pour z de module suffisamment petit, on a

$$\psi(u,z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-2uz+z^2}} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(u)\; z^n$$

où les P_n sont des polynômes en u que l'on déterminera explicitement.

2 Montrez que

$$P_n(u) \;=\; \frac{1}{2^n n!}\;\frac{d^n}{du^n}(u^2-1)^n \;.$$

3 Déduisez en que, si γ^+ est le circuit paramétré par $t \in [0,2\pi] \mapsto u + e^{it}$, alors

$$P_n(u) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-u)^{n+1}}d\zeta \;.$$

4 Montrez à partir de ce résultat que $f = P_n$ est solution de l'équation de Legendre

$$(1-u^2)f'' - 2uf' + n(n+1)f = 0 \;.$$

Indication : faire apparaître $\displaystyle\int_{\gamma^+} \frac{dg}{d\zeta}\, d\zeta$ pour une fonction holomorphe g adéquate.

5 Montrez que les P_n sont des polynômes orthogonaux pour le produit scalaire

$$\langle P|Q\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} P(u)Q(u)du \;.$$

Chapitre 4

Séries de Laurent - Résidus

4.1 Séries de Laurent

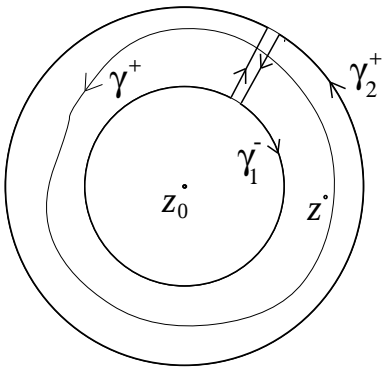
Nous avons vu avec le théorème 3.3 qu'une fonction holomorphe dans un ouvert U peut être développée en série entière autour de tout point de cet ouvert. On peut maintenant se demander ce qui se passe si z_0 est un point non élément de U mais tel qu'il existe un circuit γ de U entourant z_0. De façon à peine plus restrictive on va supposer en fait que U contient une couronne de la forme

$$C = \{z \text{ tels que } r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

avec $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$; on supposera même $\overline{C} \subset U$, et que γ est contenu dans C. L'idée est alors de reprendre les calculs du type de ceux développés pour la démonstration du théorème 3.3, en écrivant pour $z \in C$ la formule de Cauchy (2.11) sous la forme :

$$f(z) \;=\; f_1(z) + f_2(z) \;=\; \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{f_1(z)} \; \underbrace{- \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{f_2(z)}$$

où γ_1, γ_2 sont les cercles de centre z_0 et de rayon r_1, r_2.



Si $\zeta \in \gamma_2$ on écrit que

$$\frac{1}{\zeta - z} \;=\; \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \;=\; \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n ,$$

cette série étant uniformément convergente pour $\zeta \in \gamma_2$ d'après

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \;=\; \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1 \; .$$

On peut donc passer à la limite sous le signe intégrale d'où

$$f_1(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

avec

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta$$

par homotopie de γ_2^+ et γ^+ dans U.
Si $\zeta\in\gamma_1$ on écrit par contre que

$$\frac{1}{\zeta-z} \;=\; \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} \;=\; \frac{-1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} \;=\; \frac{-1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n ,$$

cette série étant uniformément convergente pour $\zeta\in\gamma_1$ d'après

$$\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right| \;=\; \frac{r_1}{|z-z_0|} \;<\; 1\ .$$

On peut donc passer à la limite sous le signe intégrale d'où

$$f_2(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^+} f(\zeta)\frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\,d\zeta \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$$

avec

$$b_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1^+}(\zeta-z_0)^{n-1}\,f(\zeta)\,d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}(\zeta-z_0)^{n-1}\,f(\zeta)\,d\zeta$$

par homotopie de γ_1^+ et γ^+ dans U.
On aboutit ainsi au

Théorème 4.1 (développement en séries de Laurent) *soit f une fonction holomorphe sur U contenant la couronne $C=\{z$ tels que $r_1<|z-z_0|<r_2\}$; elle peut se développer comme la somme de deux séries convergeant simplement dans C et uniformément dans toute sous-couronne $C'=\{z$ tels que $r_1'<|z-z_0|<r_2'\}$ avec $r_1<r_1'<r_2'<r_2$,*

$$\boxed{f(z) \;=\; f_1(z)+f_2(z) \;=\; \sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n\geq 1}b_n(z-z_0)^{-n}} \tag{4.1}$$

*où f_1 est la **partie régulière**, f_2 la **partie singulière** de f, et*

$$\boxed{a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta\ ,\quad b_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}(\zeta-z_0)^{n-1}\,f(\zeta)\,d\zeta} \tag{4.2}$$

γ^+ étant un circuit de C homotope aux cercles $|z-z_0|=$constante contenus dans C.

Cette forme explicite des coefficients a_n et b_n permet d'introduire immédiatement les majorations :

$$\forall r\in\,]r_1,r_2[\qquad |a_n| \;\leq\; \frac{M(r)}{r^n}\ ,\quad |b_n| \;\leq\; r^n M(r) \tag{4.3}$$

où

$$M(r) \;=\; \sup_{|z-z_0|=r}|f(z)|\ . \tag{4.4}$$

Le cas $r_1=0$ correspond à celui d'une fonction holomorphe tout autour d'un point z_0 mais non définie en z_0. L'existence du développement (4.1) montre que la ***singularité isolée*** associée à z_0 ne peut être que de trois types.

Un premier cas est celui où la partie singulière $f_2(z)$ s'annule, i.e. $b_n=0\ \forall n\geq 1$. On est alors en présence d'une ***singularité artificielle*** de f, puisque en la prolongeant par a_0 en z_0 on obtient une fonction holomorphe sur $U\cup\{z_0\}$. Notons que d'après la majoration (4.3) des coefficients b_n on a :

Proposition 4.1 *f holomorphe sur $U - \{z_0\}$ admet une singularité artificielle en z_0 si et seulement si f est bornée sur $U \cap \{z$ tels que $0 < |z - z_0| < r_0\}$ pour un certain $r_0 > 0$.*

Un deuxième cas est celui où la partie singulière $f_2(z)$ ne contient qu'un nombre fini de termes, i.e. il existe $m \geq 1$ tel que $b_m \neq 0$ mais $b_n = 0\ \forall n > m$. On dit alors que z_0 est un ***pôle d'ordre*** m de f ; si $m = 1$ on dit que z_0 est un ***pôle simple*** de f. Notons que :

Proposition 4.2 *f holomorphe sur $U - \{z_0\}$ admet un pôle d'ordre $m > 0$ en z_0 si et seulement si*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \text{ existe et est non nulle finie.} \tag{4.5}$$

Cette limite n'est alors autre que le coefficient b_m du développement de Laurent (4.1) de f en z_0.

Un troisième cas plus rare est celui où la partie singulière $f_2(z)$ contient une infinité de termes, i.e. pour tout $m \geq 1$ il existe $n \geq m$ tel que $b_n \neq 0$. On dit alors que z_0 est une ***singularité essentielle*** de f.

Exemples : la fonction $\dfrac{\sin z}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$ n'admet qu'une singularité artificielle en $z = 0$, puisque le développement de Taylor de $\sin z$ en zéro donne

$$\frac{\sin z}{z} \;=\; 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots \ .$$

Par contre le point zéro est pôle d'ordre 2 de la fonction $\dfrac{\cos z}{z^2}$, puisque par développement de Taylor de $\cos z$ en zéro on a

$$\frac{\cos z}{z^2} \;=\; \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots \ .$$

Enfin la fonction

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) \;=\; 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\ z^2} + \frac{1}{3!\ z^3} + \cdots$$

présente une singularité essentielle en zéro.

Récriture en terme d'une seule série : en posant, pour $n \leq -1$, $a_n = b_{-n}$, il est parfois utile de récrire le théorème 4.1 sous la forme

$$f(z) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \text{avec} \quad a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} (\zeta - z_0)^{-n-1}\ f(\zeta)\ d\zeta \ . \tag{4.6}$$

En utilisant par exemple cette récriture ainsi que le lemme suivant, de démonstration immédiate,

Lemme 4.1 (intégration par parties dans une intégrale de circuit) *si u et v sont holomorphes sur U contenant le circuit γ^+, alors*

$$\int_{\gamma^+} u(\zeta) v'(\zeta) d\zeta \;=\; -\int_{\gamma^+} u'(\zeta) v(\zeta) d\zeta \ . \tag{4.7}$$

il est facile d'établir

Proposition 4.3 (dérivation terme à terme d'une série de Laurent) *si f vérifie les hypothèses du théorème 4.1 alors la série de Laurent de sa dérivée f' s'obtient par dérivation terme à terme de la série de Laurent de f équation (4.1).*

4.2 Théorème des résidus

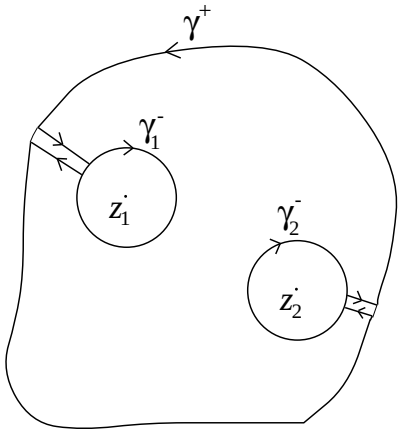
Une application puissante des développements de Laurent (4.1) est le calcul général de l'intégrale curviligne d'une fonction f holomorphe sur U ouvert privé d'un nombre fini de points singuliers[1]. Soit donc γ^+

[1] De manière générale on désigne une fonction holomorphe sur un ouvert V de la forme $V = U - S$ où $S = \{z_1, \cdots, z_p, \cdots\}$ est un ensemble de pôles de f éventuellement infini mais ne possédant pas de point d'accumulation dans U comme ***méromorphe*** sur U.

un circuit de U dont l'intérieur contient les points singuliers $z_1, \cdots, z_p$ de f. Pour calculer

$$\int_{\gamma^+} f(z)\ dz$$

on construit un circuit reliant γ^+ à des petits cercles isolant les points singuliers :



Comme ce grand circuit est d'intérieur entièrement contenu dans le domaine d'holomorphie de f, on obtient d'après le théorème de Cauchy 2.1, en désignant par $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ les cercles entourants $z_1, \cdots, z_p$:

$$\int_{\gamma^+} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{\gamma_k^+} f(z)\ dz\ .$$

Il reste à voir que chaque cercle γ_k se trouve dans une couronne centrée sur z_k satisfaisant aux conditions requises pour écrire autour de z_k le développement de Laurent (4.1). En notant provisoirement $a_n(z_k), b_n(z_k)$ les coefficients correspondants, on a alors d'après la définition même de $b_1(z_k)$ eq. (4.2) :

$$\int_{\gamma_k^+} f(z)\ dz = 2\pi i\ b_1(z_k)$$

et donc

$$\int_{\gamma^+} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} b_1(z_k)\ .$$

On aboutit ainsi au

Théorème 4.2 (des résidus) *soient f une fonction holomorphe sur U ouvert privé d'un nombre fini de points singuliers de f, et γ^+ un circuit de U dont l'intérieur contient les points singuliers $z_1, \cdots, z_p$ de f. Alors*

$$\boxed{\int_{\gamma^+} f(z)\ dz\ =\ 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f,z_k)} \tag{4.8}$$

*où $\mathrm{Res}(f,z_k) = b_1(z_k)$ est le **résidu** de f au point z_k, coefficient de $1/(z - z_k)$ dans le développement de Laurent de f autour de z_k :*

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,z_k)\ =\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k^+} f(z)\ dz} \tag{4.9}$$

pour tout cercle γ_k inclus dans U, centré sur z_k, et ne contenant aucun autre point singulier de f.

Pour le ***calcul pratique des résidus***, deux méthodes reposant sur des calculs de dérivées se distinguent selon l'ordre de multiplicité du pôle.

Un pôle simple est typiquement obtenu pour

$$f(z) \;=\; \frac{g(z)}{h(z)}$$

quotient de deux fonctions holomorphes g et h telles que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$. En effet on alors

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) \;=\; \lim_{z\to z_0} (z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

finie non nulle, donc le critère de pôle simple (4.5) est vérifié, et de plus

$$\mathrm{Res}(f,z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \;. \tag{4.10}$$

Un pôle d'ordre m est obtenu lorsque la fonction f admet un développement de la forme

$$f(z) \;=\; (z-z_0)^{-m} \,[b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \cdots + b_1 (z-z_0)^{m-1} + a_0 (z-z_0)^m + a_1 (z-z_0)^{m+1} + \cdots]$$

avec $b_m \neq 0$; introduisant alors $F(z) = (z-z_0)^m f(z)$ on obtient pour $F(z)$ la fonction entre crochets dans l'équation précédente, d'où immédiatement

$$\mathrm{Res}(f,z_0) \;=\; b_1 \;=\; \frac{F^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \;. \tag{4.11}$$

4.3 Application au calcul d'intégrales

De nombreuses intégrales peuvent se calculer très aisément grâce au théorème des résidus ; nous allons le montrer ici pour trois types assez généraux d'intégrales.

4.3.1 Intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\; dx$

Considérons une fonction f holomorphe dans

$$U = \{z \;\text{ tels que }\; \mathrm{Im} z > -c_0\} - \{z_1, \cdots, z_p\}$$

avec $c_0 > 0$, les z_k supposés de partie imaginaire strictement positive étant des points singuliers de f. Supposons de plus que

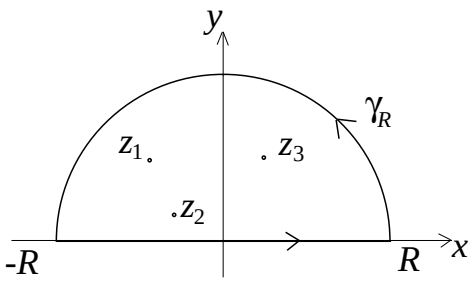
$$\lim_{|z|\to\infty} |z f(z)| \;=\; 0 \;. \tag{4.12}$$

Alors pour $R > 0$, si γ_R^+ est le demi-cercle de centre zéro et de rayon R, on obtient

$$\Big| \int_{\gamma_R^+} f(z)\; dz \Big| \;=\; \Big| \int_0^\pi f(Re^{i\theta})\; iRe^{i\theta}\; d\theta \Big| \;\leq\; \pi \sup_{|z|=R} |z f(z)|$$

donc[2]

$$\int_{\gamma_R^+} f(z)\; dz \longrightarrow 0 \;\text{ quand }\; R \to +\infty \;. \tag{4.13}$$



[2]Ce résultat est désigné comme un « ***lemme de Jordan*** » par certains auteurs.

D'autre part pour R suffisamment grand le demi-disque ayant pour frontière la réunion du segment $[-R,R]$ de l'axe réel et γ_R^+ contient tous les points z_k. D'après le théorème des résidus 4.2 on a donc pour l'intégrale de f le long de la frontière de ce demi-disque :

$$\int_{-R}^{R} f(x)\ dx + \int_{\gamma_R^+} f(z)\ dz \ = \ 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f,z_k)\ .$$

On en déduit la convergence de l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ ***en valeur principale*** (« vp »), c'est-à-dire en utilisant un intervalle d'intégration symétrique[3], et sa valeur :

$$\mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx \ = \ \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ dx \ = \ 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f,z_k)\ . \tag{4.14}$$

Exemple : $f(z) = 1/(1+z^{2n})$ avec n entier strictement positif vérifie bien $|zf(z)| \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, décroissant au moins en $1/z^2$ à l'infini, on peut affirmer que l'intégrale généralisée de f sur $\mathbb{R}$ est bien définie. Les pôles de f sont les racines de $z^{2n} = -1$ i.e. $z^n = \pm i = \exp(\pm i\frac{\pi}{2})$ soient

$$z_k^{\pm} = \exp\Big(\pm i\frac{\pi}{2n}\Big)\exp\Big(\frac{2ik\pi}{n}\Big)$$

pour $0 \le k \le n-1$. Commençons par traiter le cas n pair soit $n = 2p$. Les pôles de partie imaginaire positive sont alors les z_k^+ pour $0 \le k \le p-1$ et les z_k^- pour $1 \le k \le p$. La formule (4.10) donnant en général

$$\mathrm{Res}(f,z_k^{\pm}) = \frac{1}{2n(z_k^{\pm})^{2n-1}} = -\frac{z_k^{\pm}}{2n}$$

on obtient, avec $\alpha = \exp(i\frac{\pi}{2n})$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx &= -\frac{1}{2n}\Big(\alpha\sum_{k=0}^{p-1}\alpha^{4k} + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{p}\alpha^{4k}\Big) \\
&= -\frac{\alpha}{2n}\Big(\sum_{k=0}^{p-1}\alpha^{4k}\Big)\ (1+\alpha^2) \\
&= -\frac{\alpha}{2n}\,\frac{\alpha^{4p}-1}{\alpha^2-1} \\
&= \frac{1}{n}\,\frac{1}{\exp(i\frac{\pi}{2n}) - \exp(-i\frac{\pi}{2n})} \\
&= \frac{1}{2ni\sin\frac{\pi}{2n}}\ .
\end{aligned}$$

Dans le cas n impair, le lecteur intéressé montrera que l'on aboutit en fait au même résultat, d'où pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}\ .$$

4.3.2 Intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(iqx)\ dx$

De telles intégrales dites « de Fourier » se rencontrent communément lors du calcul des transformées du même nom. Distinguons deux cas selon la nature des points singuliers $z_1,\cdots,z_p$ de f, supposée holomorphe dans $\mathbb{C} - \{z_1,\cdots,z_p\}$.

[3] Rappelons que si une intégrale généralisée converge, alors elle converge en valeur principale. Par contre une intégrale peut converger en valeur principale sans que l'intégrale généralisée correspondante converge.

Premier cas : pas de point singulier sur l'axe réel, i.e. $\forall k, \mathrm{Im} z_k \neq 0$.

Alors il suffit de supposer

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0 \tag{4.15}$$

pour obtenir la convergence de l'intégrale de Fourier en valeur principale

$$\hat{f}(q) \;=\; \mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(iqx)\; dx \tag{4.16}$$

dès que $q \neq 0$. En effet pour $q > 0$ par exemple, en utilisant un contour formé du segment $[-R,R]$ de l'axe réel et du demi-cercle γ_R^+ de centre zéro et de rayon R, on obtient d'après le théorème des résidus pour R suffisamment grand

$$\int_{-R}^{R} f(x) \exp(iqx)\; dx \;=\; 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}(f(z) \exp(iqz), z_k) - \int_{\gamma_R^+} f(z) \exp(iqz)\; dz\ . \tag{4.17}$$

La contribution liée à γ_R^+ peut être majorée en module par

$$\sup_{|z|=R} |f(z)| \;\int_0^{\pi} \exp(-qR \sin\theta)\; R\; d\theta$$

où l'intégrale qui apparaît est bornée, puisque l'inégalité $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$ valable pour $\theta \in [0,\pi/2]$ donne

$$\int_0^{\pi} \exp(-qR\sin\theta)\; R\; d\theta \;=\; 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-qR\sin\theta)\; d\theta \;\leq\; 2R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\Big(-\frac{2qR\theta}{\pi}\Big)\; d\theta \;=\; \frac{\pi}{q}\big(1 - e^{-qR}\big)\ .$$

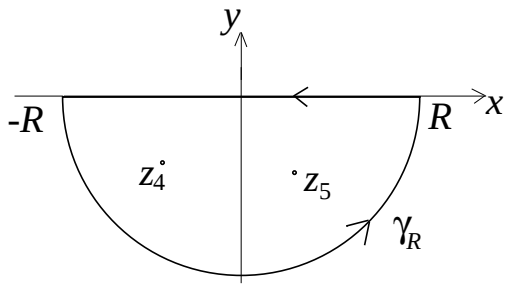
Avec (4.15) on obtient

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) \exp(iqz)\; dz \;=\; 0$$

ce qui entraine d'après (4.17) la convergence de l'intégrale définissant $\hat{f}(q)$ pour $q > 0$, qui vaut alors

$$\hat{f}(q) \;=\; 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}(f(z) \exp(iqz), z_k)\ . \tag{4.18}$$

Pour $q < 0$ un calcul identique peut être mené en utilisant maintenant un demi-cercle du demi-plan inférieur :



On obtient alors

$$\int_{-R}^{R} f(x) \exp(iqx)\; dx \;=\; -2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k < 0} \mathrm{Res}(f(z) \exp(iqz), z_k) + \int_{\gamma_R^+} f(z) \exp(iqz)\; dz$$

où la deuxième intégrale tend vers zéro ; ainsi $\hat{f}(q)$ existe pour $q < 0$ et vaut alors

$$\hat{f}(q) \;=\; -2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k < 0} \mathrm{Res}(f(z) \exp(iqz), z_k)\ . \tag{4.19}$$

Pour $q = 0$, par contre, le facteur exponentiel décroissant pour $\mathrm{Im} z \to \pm\infty$ disparait, et on est ramené à une intégrale du type vu dans la section précédente ; il faut donc supposer (4.12)

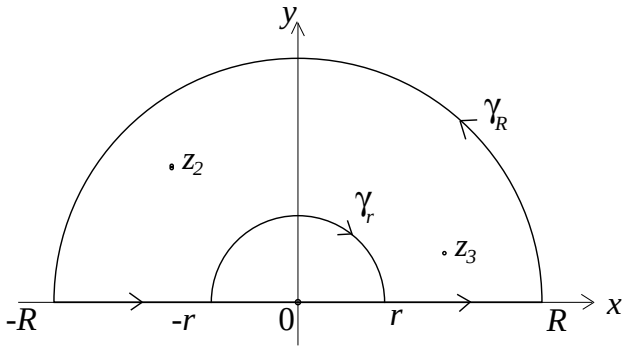
$$\lim_{|z|\to\infty} |z f(z)| = 0$$

pour être assuré de la convergence de $\hat{f}(0)$.

Deuxième cas : il existe un point singulier sur l'axe réel, par exemple $z_1 = 0$, supposé pôle simple de f.

Pour $q > 0$ on applique alors le théorème des résidus à un contour formé des segments $[-R,-r]$ et $[r,R]$ de l'axe réel, mis bout à bout avec deux demi-cercles γ_r^- et γ_R^+ de centre zéro et de rayon r suffisamment petit et R suffisamment grand :

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{-r} f(x)\exp(iqx)\ dx + \int_r^R f(x)\exp(iqx)\ dx \\ = \ & 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k>0} \mathrm{Res}(f(z)\exp(iqz),z_k) - \int_{\gamma_r^-} f(z)\exp(iqz)\ dz - \int_{\gamma_R^+} f(z)\exp(iqz)\ dz\ . \end{aligned} \tag{4.20}$$



Supposant toujours (4.15), on obtient comme dans le premier cas

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R^+} f(z)\exp(iqz)\ dz \ = \ 0\ .$$

L'intégrale liée à γ_r^- se traite quant à elle via un paramétrage polaire, qui donne

$$\int_{\gamma_r^-} f(z)\exp(iqz)\ dz \ = \ -ir\int_0^\pi f(re^{i\theta})\ \exp(-qr\sin\theta + iqr\cos\theta)\ e^{i\theta}\ d\theta\ .$$

La contribution de la partie régulière f_1 de f tend évidemment vers zéro quant r tend vers zéro. Celle de la partie singulière f_2 de f s'écrit d'après l'hypothèse de pôle simple :

$$\int_{\gamma_r^-} f_2(z)\exp(iqz)\ dz \ = \ -ir\int_0^\pi b_1(re^{i\theta})^{-1}\ \exp(-qr\sin\theta + iqr\cos\theta)\ e^{i\theta}\ d\theta\ .$$

Comme sur l'intervalle $[0,\pi]$ la fonction $\exp(-qr\sin\theta + iqr\cos\theta)$ converge uniformément vers 1 lorsque r tend vers zéro, il vient

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r^-} f_2(z)\exp(iqz)\ dz \ = \ -ib_1\int_0^\pi d\theta \ = \ -i\pi b_1 \ = \ -i\pi\mathrm{Res}(f,0)\ .$$

Au bilan (4.20) montre que

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{-R}^{-r} f(x)\exp(iqx)\ dx + \int_r^R f(x)\exp(iqx)\ dx$$

existe pour $q > 0$, sa valeur étant donnée par

$$\hat{f}(q) \ = \ \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(iqx)\ dx \ = \ \pi i\ \mathrm{Res}(f,0) + 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k>0} \mathrm{Res}(f(z)\exp(iqz),z_k)\ . \tag{4.21}$$

En utilisant maintenant des demi-cercles du demi-plan inférieur, on montre facilement que, pour $q < 0$, $\hat{f}(q)$ peut aussi être défini et vaut

$$\hat{f}(q) \ = \ -\pi i\ \mathrm{Res}(f,0) - 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k<0} \mathrm{Res}(f(z)\exp(iqz),z_k)\ . \tag{4.22}$$

Enfin pour $q = 0$ on est obligé de faire l'hypothèse plus forte (4.12) pour obtenir la convergence des contributions du demi cercle à l'infini ; on obtient alors l'existence de $\hat{f}(0)$, sa valeur étant donnée par deux formules qui doivent être équivalentes :

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= \pi i \ \mathrm{Res}(f,0) + 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k > 0} \mathrm{Res}(f,z_k) \\ &= -\pi i \ \mathrm{Res}(f,0) - 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z_k < 0} \mathrm{Res}(f,z_k) \ . \end{aligned} \tag{4.23}$$

La raison qui pourrait paraître mystérieuse de cette double égalité sera éclaircie par le théorème des résidus avec point à l'infini que nous verrons section 4.4.

Exemple 1 : $f(z) = 1/(z^2+1) = 1/(z-i)(z+i)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-i,i\}$ et vérifie (4.12) donc a fortiori (4.15). Ses deux pôles étant imaginaires purs, on se trouve dans le premier cas d'où pour $q > 0$, d'après (4.18), et en utilisant la formule (4.10) pour calculer un résidu en un pôle simple,

$$\hat{f}(q) \ = \ 2\pi i \ \mathrm{Res}\Big(\frac{\exp(iqz)}{z^2+1}, i\Big) \ = \ \pi \exp(-q) \ .$$

Pour $q < 0$ la formule (4.19) donne de même

$$\hat{f}(q) \ = \ -2\pi i \ \mathrm{Res}\Big(\frac{\exp(iqz)}{z^2+1}, -i\Big) \ = \ \pi \exp(q) \ .$$

En s'assurant que le cas $q = 0$ est non singulier, on obtient finalement pour tout q réel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(iqx)}{x^2+1} \ dx \ = \ \pi \exp -|q| \ .$$

Notez que l'on a omis le « vp » devant l'intégrale car il s'agit d'une intégrale généralisée convergente.

Exemple 2 : $f(z) = 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et vérifie (4.15). Comme elle présente un pôle simple en zéro, on se trouve dans le deuxième cas. La formule (4.21) pour $q = 1$ donne alors

$$\hat{f}(1) \ = \ \mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ix)}{x} \ dx \ = \ \pi i \ \mathrm{Res}(f,0) \ = \ \pi i \ ,$$

d'où en prenant la partie imaginaire de cette équation

$$\mathrm{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ dx \ = \ \pi \ .$$

C'est un exercice classique mais non trivial que de démontrer que cette intégrale généralisée converge, ce qui permet là encore d'omettre le « vp ».

4.3.3 Intégrales du type $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) \ d\theta$

De telles intégrales apparaissent lors du calcul des séries de Fourier de fonctions périodiques. L'idée est d'inverser le paramétrage polaire du cercle unité γ^+ caché dans l'écriture d'une telle intégrale. Pour cela on pose $z = \exp(i\theta)$, ce qui implique $dz = iz \ d\theta$, et on introduit

$$f(z) = \frac{1}{iz} F\Big(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\Big) \tag{4.24}$$

supposée holomorphe sur U contenant le cercle unité, sauf en un nombre fini de points singuliers $z_1, \cdots, z_p$ que l'on suppose tous de module strictement inférieur à 1. On obtient alors

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) \ d\theta = \int_{\gamma^+} f(z) \ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f,z_k) \ . \tag{4.25}$$

Exemple : pour calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \exp(\cos\theta)\cos(\sin\theta)\ d\theta\ ,$$

qui est bien définie car la fonction intégrée est continue, on introduit l'intégrale complexe

$$I_c = \int_0^{2\pi} \exp(\cos\theta)\exp(i\sin\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \exp(e^{i\theta})\ d\theta$$

dont I est la partie réelle. On a alors $f(z) = (\exp z)/(iz)$ d'où

$$I_c = 2\pi i\ \mathrm{Res}(f,0) = 2\pi = I\ .$$

4.4 Théorème des résidus avec point à l'infini

La surprenante égalité (4.23), valable lorsque $zf(z)$ tend vers 0 pour $|z|$ tendant vers l'infini, n'est en fait qu'un cas particulier d'une égalité plus générale. Celle-ci peut être introduite pour toute fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points singuliers $z_1, \cdots, z_p$. Ainsi f est holomorphe sur la couronne

$$C\ =\ \{z \text{ tels que } |z| > \sup_k |z_k|\ \}\ ,$$

dans laquelle on peut la développer en série de Laurent suivant[4] :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n} \quad \text{avec} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} z^{-n-1}\ f(z)\ dz\ , \tag{4.26}$$

γ^+ étant un circuit de C homotope au cercle $|z| = \sup_k |z_k| + 1$. Dans ce développement en série de Laurent au voisinage de l'infini, on désigne le coefficient de $1/z$ comme le ***résidu de f à l'infini***,

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,\infty)\ =\ a_{-1}}\ . \tag{4.27}$$

D'après (4.26) ce résidu donne la valeur de l'intégrale de f sur γ^+ selon :

$$\boxed{\int_{\gamma^+} f(z)\ dz\ =\ 2\pi i\ \mathrm{Res}(f,\infty)}\ . \tag{4.28}$$

Comme d'autre part la formule des résidus (4.8) donne

$$\int_{\gamma^+} f(z)\ dz\ =\ 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f,z_k)\ ,$$

il vient par identification avec (4.28)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f,z_k)\ =\ \mathrm{Res}(f,\infty)}\ . \tag{4.29}$$

Dans le cas où $zf(z)$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers l'infini, le calcul effectué pour démontrer (4.13) prouve que

$$\int_{\gamma^+} f(z)\ dz\ =\ 0\ =\ \mathrm{Res}(f,\infty)$$

[4] Se convaincre que l'on peut sans problème avoir $r_2 = +\infty$ dans le théorème 4.1 !... Puis appliquer la récriture (4.6).

d'où $\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Res}(f,z_k) = 0$, ce qui explique (4.23).

Remarque culturelle : certains auteurs préfèrent définir un résidu de f à l'infini $\mathrm{Res}'(f,\infty)$ par une analogie directe avec (4.9) en considérant que c'est plutôt le circuit γ^- qui entoure le point à l'infini en le laissant « dans son intérieur » c'est-à-dire « à sa gauche ». Ils posent donc

$$\mathrm{Res}'(f,\infty) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)dz \;=\; -\mathrm{Res}(f,\infty)\ .$$

4.5 Exercices et problèmes

Exercice 4.1 ***Retour sur le théorème de développement en série de Taylor***

1 Soit une fonction f holomorphe dans un ouvert U de frontière ∂U non vide et constituée exclusivement de points au voisinage desquels f est non bornée (par exemple des singularités isolées non artificielles de f). Montrez que si $z_0 \in U$, le rayon de convergence du développement en série de Taylor de f autour de z_0 est $R = d(z_0,\partial U)$.

2 Quel est le rayon R du plus grand disque centré sur 0 dans lequel la fonction

$$f(z) \;=\; \tanh z$$

peut se développer en série de Taylor ? Vous ne chercherez pas à calculer explicitement les coefficients de ce développement[5]...

Exercice 4.2 ***Développements en séries de Laurent***

1 Soit $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$. Dans les couronnes suivantes, développez f en séries de Laurent autour du point central de la couronne :

1.a $C_a = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } 0 < |z| < 1\}$,

1.b $C_b = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } 0 < |z-1| < 1\}$,

1.c $C_c = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } 1 < |z| < +\infty\}$,

1.d $C_d = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } 1 < |z-1| < +\infty\}$.

2 Développez $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ en séries de Laurent autour de i, dans une couronne contenant 0 que l'on précisera.

Exercice 4.3 ***Multiplication de deux séries de Laurent***

Soient

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n\ , \qquad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$$

deux séries de Laurent dans une couronne $\{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } r_1 < |z-z_0| < r_2\}$. Montrez que dans cette couronne

$$f(z)g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m b_{n-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m a_{n-m} \text{ (séries convergentes pour tout } n)\ .$$

Indication : utilisez les expressions intégrales (4.6) des coefficients de ces séries de Laurent.

[5] Ce calcul long et fastidieux est mené à bien dans l'exercice 4.4.

Exercice 4.4 ***Développements en séries de Laurent grâce aux nombres de Bernoulli***

1 Montrez en considérant $g(z) = f(z) + \dfrac{z}{2}$ et en étudiant sa parité que, sur un domaine de $\mathbb{C}$ que l'on précisera,

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \ .$$

2 Afin de démontrer que les B_{2n} sont des nombres rationnels (***nombres de Bernoulli***), on note provisoirement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

avec $B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_{2n+1} = 0$ pour $n > 0$; en utilisant l'identité $\left(\dfrac{e^z - 1}{z}\right) f(z) = 1$ et les résultats de l'exercice 4.3, obtenez une relation de récurrence sur les B_n. Concluez.

3 En exprimant $\text{cotan} z = \cos z / \sin z$ en fonction de $f(z)$, donnez le développement de $\text{cotan} z$ en séries de Laurent dans une couronne centrée sur zéro que l'on précisera.

4 Pour $z \neq n\pi/2$ où $n \in \mathbb{Z}$, montrez que $\tan z = \text{cotan} z - 2\text{cotan} 2z$. Déduisez-en le développement en série de Taylor de $\tan z$ autour de zéro dans un disque que vous préciserez.

Exercice 4.5 ***Fonctions holomorphes reliées par une inégalité sur leur module***

Soient f et g deux fonctions holomorphes dans le plan $\mathbb{C}$ tout entier telles que

$$\forall z \in \mathbb{C} \ , \quad |f(z)| \leq |g(z)| \ .$$

Montrez qu'il exite un nombre complexe λ de module inférieur ou égal à 1 tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \ , \quad f(z) = \lambda g(z) \ .$$

Indication : considérez $h(z) = f(z)/g(z)$; dans le cas où g admet des zéros, étudiez le type des singularités associées de h.

Exercice 4.6 ***Singularités essentielles***

1 Si f et g sont des fonctions holomorphes (non identiquement nulles) sur U montrez que $h(z) = f(z)/g(z)$ ne peut admettre de singularité essentielle sur U.

2 Soit f une fonction holomorphe sur U privé d'un point z_0 singularité essentielle de f. Montrez que lorsque z tend vers z_0, $f(z)$ peut être rendu arbitrairement voisin de n'importe quel nombre complexe a.
Indication : considérez $1/(f(z) - a)$.

Exercice 4.7 ***Calcul d'intégrales grâce au théorème des résidus***

1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ pour a et b réels strictement positifs. Vous vérifierez l'homogénéité du résultat obtenu en identifiant naturellement x à une longueur.

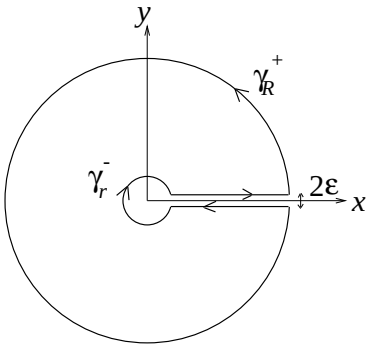
2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$ pour n entier supérieur ou égal à 1.

3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^4} \, dx$.

4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}\, dx$. [examen 1998−1999]

5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx$ en considérant $f(z) = \dfrac{1-e^{iz}}{z^2}$ et en utilisant un circuit avec deux demi-cercles, l'un de rayon r petit pour éviter l'origine, l'autre de rayon R grand pour aller à l'infini.

6 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3}\, dx$, en calculant $\displaystyle\int_{\gamma^+} f(z)dz$ pour $f(z) = \dfrac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}$ et le circuit suivant :



On étudiera les limites $r \to 0, \epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, et on utilisera la détermination du logarithme définie par $\arg z \in [0,2\pi[$.

7 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin 7\theta}{2+\sin\theta}\, d\theta$. [examen 1999−2000]

8 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$ pour $a > b > 0$.

9 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta$ pour a complexe de module différent de zéro ou un.

Indications générales : on évitera dans un premier temps les questions 5 et 6 ; les autres intégrales se calculent par des applications directes du cours. D'autre part on accélérera les calculs de certaines intégrales « trigonométriques » réelles - et, mieux, on évitera de faire des calculs faux !... - en les reconnaissant comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une intégrale complexe plus simple. Par exemple, question 3,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ix)}{1+x^4}\, dx \;.$$

Exercice 4.8 ***Étude d'une intégrale dépendant de deux paramètres*** [test 2003 − 2004]

1 Justifiez pour Ω réel strictement positif et ω réel quelconque la convergence de l'intégrale généralisée

$$I(\Omega,\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+2\Omega^2 t^2+\Omega^4 t^4}\, dt \;.$$

2 Par un changement de variable adéquat, montrez que l'on déduire cette intégrale dépendant de deux paramètres d'une intégrale $J(\rho)$ dépendant d'un seul paramètre ρ que vous préciserez.

3 Calculez $J(\rho)$ grâce à l'analyse complexe.
Indication : vous aurez intérêt à faire intervenir la fonction analytique entière « vedette ».

4 Déduisez-en $I(\Omega,\omega)$ pour Ω réel strictement positif et ω réel quelconque.

5 Vérifiez l'homogénéité du résultat obtenu, en assimilant naturellement t à un temps.

6 Que constatez vous lorsque $|\omega| \to +\infty$? Pouvez-vous « expliquer intuitivement » ce phénomène ?

Problème 4.1 ***Intégrale comptant les zéros et les pôles - Théorème de Rouché***

1 Soit f holomorphe sur U simplement connexe, n'admettant qu'un nombre fini de zéros $u_1, \cdots, u_p$ d'ordre de multiplicité respectif $n_1, \cdots, n_p$. Montrez que si γ^+ est un circuit de U ne passant par aucun des u_k, alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

compte le nombre de zéros de f intérieurs à γ^+ avec leur multiplicité.

2 Si maintenant f admet aussi des pôles $v_1, \cdots, v_q$ d'ordre respectif $m_1, \cdots, m_q$, montrez que pour γ^+ circuit de U ne passant par aucun des u_k, v_k,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

est la différence entre le nombre de zéros de f intérieurs à γ^+ et le nombre de pôles de f intérieurs à γ^+ comptés chacun avec leur ordre.

3 Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U simplement connexe ne possédant chacune qu'un nombre fini de zéros simples. On suppose que le long d'un circuit γ^+ de U on a

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \ .$$

Montrez que f et g ont le même nombre de zéros dans l'intérieur de γ^+ (***théorème de Rouché***).

Indication : considérez $h = f/g$.

Problème 4.2 ***Fonctions de Bessel*** [examen 1999 – 2000]

1 Pour u complexe fixé, précisez le domaine d'holomorphie de la fonction

$$z \mapsto f_u(z) = \exp\left(\frac{u}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) .$$

2 Quelle est la nature d'un développement de f_u de la forme

$$f_u(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(u) z^n \ ?$$

Dans quel domaine de valeurs de z ce développement converge t'il ? Donnez une expression intégrale de $J_n(u)$ (***fonction de Bessel d'ordre*** n) utilisant un circuit γ^+, en précisant les hypothèses à vérifier sur ce circuit.

3 Dans cette question on s'intéresse seulement aux fonctions J_n d'ordre $n \geq 0$.

3.a En partant de l'expression intégrale précédente montrez que, pour $u \in \mathbb{C}$,

$$J_n(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{u}{2}\right)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} z^{-n-k-1} \exp\left(\frac{uz}{2}\right) dz \ .$$

3.b En utilisant une formule découlant de la formule intégrale de Cauchy, calculez, pour un circuit γ^+ vérifiant les conditions données en 2, et pour un entier n quelconque,

$$I_n(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} z^{-n-1} \exp(uz) dz \ .$$

3.c Déduisez-en $J_n(u)$ sous forme d'une série entière explicite.

3.d Déterminez en fonction de $n \in \mathbb{N}$ la relation entre $J_n(u)$ et $J_n(-u)$.

4.a En partant toujours de l'expression intégrale générale de $J_n(u)$, et en utilisant un contour γ^+ particulier, montrez que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{C}$,

$$J_n(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(iu\sin t)\exp(-int) dt \ .$$

4.b Montrez que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{C}$,

$$J_{-n}(u) = J_n(-u) \ .$$

4.c Montrez que, pour $n \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{C}$,

$$J_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - u\sin t) dt \ .$$

5 En partant de l'expression trouvée en 3.c, montrez que $J_n(u)$ est solution d'une équation différentielle de la forme[6]

$$J_n''(u) + \frac{J_n'(u)}{u} + \left(1 + \frac{\alpha(n)}{u^2}\right) J_n(u) = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha(n) = -n^2 \ . \tag{4.30}$$

[6]Les équations différentielles de la forme (4.30) interviennent naturellement lorsque l'on s'intéresse à des ***problèmes de diffusion en symétrie cylindrique***. Les solutions en régime stationnaire par exemple apparaissent comme les fonctions $g(r,\theta,z)$ solutions de l'équation de Laplace

$$\Delta(g) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 0 \ .$$

On recherche en général les solutions complexes de ce problème linéaire sous la forme

$$g(r,\theta,z) = G(r)\exp[i(m\theta + qz)]$$

où m est un nombre d'onde azimuthale et q un vecteur d'onde axiale. L'injection dans l'équation de Laplace donne alors

$$G''(r) + \frac{G'(r)}{r} - \left(q^2 + \frac{m^2}{r^2}\right) G(r) = 0 \ .$$

Le changement de variable $u = iqr$ dans l'équation (4.30) prise pour $n = m$ montre que $G(r) = J_m(iqr)$ est solution.

Annexe A

Problèmes corrigés

On donne ici les corrigés des problèmes 3.2 et 3.3. Il est vivement conseillé, après avoir travaillé le cours, de chercher à résoudre ces problèmes seul (et longtemps !) avant de lire leur corrigé...

Problème 3.2 ***Sur la fonction arcsinus***

1 Rappelez quel est l'ouvert de départ U de la détermination principale du logarithme, et comment on peut l'utiliser pour définir la fonction racine carrée $\sqrt{\ }$. Quel est l'ouvert de départ U' de cette fonction racine ?

D'après le cours $U = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, et la fonction racine carrée peut être définie par

$$\forall z \in U' = U \ , \quad \sqrt{z} \ = \ z^{1/2} \ = \ \exp[(1/2)\ln(z)] \ = \ \sqrt{|z|}\ \exp[(i/2)\arg(z)] \ .$$

2 Déterminez l'ensemble des z complexes, soit U'', tels que $1 - z^2$ soit dans le domaine de définition U' de cette fonction racine carrée.

On veut déterminer U'' de sorte que

$$z \in U'' \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - z^2 \in U' = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$$

soit par négation que

$$z \notin U'' \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - z^2 \in \mathbb{R}^- \ . \tag{A.1}$$

Explicitons les solutions de cette dernière condition :

$$\begin{aligned} 1 - z^2 \in \mathbb{R}^- \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad 1 - z^2 = -x \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad z^2 = 1 + x \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad z = \pm\sqrt{1+x} \\ &\Longleftrightarrow \quad z \in \ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\ . \end{aligned}$$

Au bilan (A.1) montre que

$$U'' \ = \ \mathbb{C} \ - \ \big(\ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\ \big) \ . \tag{A.2}$$

3 Montrez que, pour $z \in U''$, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ est dans U.

Indications : montrez dans un premier temps que si $iz + \sqrt{1 - z^2}$ n'est pas dans U, alors z est de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$; déduisez en qu'on ne peut avoir, pour $z \in U''$, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ hors de U.

Soit $z \in U''$. Supposons que $iz + \sqrt{1 - z^2}$ n'est pas dans U, et montrons que l'on aboutit ainsi à une contradiction. Comme $U = \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ n'est pas dans U si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad iz + \sqrt{1 - z^2} = -x \quad &\Longleftrightarrow \quad x + iz = -\sqrt{1 - z^2} \\ &\Longrightarrow \quad x^2 - z^2 + 2ixz = 1 - z^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z = i(x^2 - 1)/(2x) \ , \end{aligned}$$

en observant que le cas $x = 0$ ne peut se produire. Comme x est réel, z est bien de la forme iy comme annoncé dans l'indication. Avec cette notation $z = iy$, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ n'est pas dans U si et seulement si

$$\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad -y + \sqrt{1 + y^2} = -x$$

ce qui est impossible puisque le membre de gauche de cette équation est strictement positif alors que le membre de droite est négatif ou nul. Ainsi, forcément, quand $z \in U''$, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ est dans U.

4 Justifiez le fait de pouvoir définir une fonction g holomorphe de U'' dans $\mathbb{C}$ par

$$g(z) \;=\; -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \;.$$

Si $z \in U''$, d'après le résultat de la question 2, $1 - z^2$ est dans le domaine de définition de la fonction racine carrée, et, d'après le résultat de la question 3, $iz + \sqrt{1 - z^2}$ est dans le domaine de définition de la fonction logarithme. Par composition, la fonction $g(z) = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$ est bien définie et holomorphe sur U''.

5 Simplifiez, pour $z \in U''$, l'expression de $\sin g(z)$, et déduisez du résultat obtenu qu'il est légitime de noter

$$\forall z \in U'', \quad g(z) \;=\; \arcsin(z) \;.$$

Pour $z \in U''$, simplifions

$$\begin{aligned}
\sin g(z) &= (1/2i)\{\exp[ig(z)] - \exp[-ig(z)]\} \\
&= (1/2i)\left\{\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) - 1/\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)\right\} \\
&= (1/2i)\left\{-z^2 + 1 - z^2 + 2iz\sqrt{1 - z^2} - 1\right\} / \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \;.
\end{aligned}$$

Il vient que

$$\forall z \in U'', \quad \sin g(z) = z \;. \tag{A.3}$$

Il est donc légitime de désigner g comme une fonction arcsinus, et de noter

$$\boxed{\forall z \in U'', \quad \arcsin z \;=\; -i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)} \;. \tag{A.4}$$

6 Simplifiez l'expression de la dérivée de la fonction arcsin ainsi définie.

On a, pour $z \in U''$,

$$\boxed{\arcsin'(z) \;=\; g'(z) \;=\; -i\left(i - z/\sqrt{1 - z^2}\right) / \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \;=\; 1/\sqrt{1 - z^2}} \;. \tag{A.5}$$

7.a Représentez graphiquement U''. Quelle est son intersection W avec l'axe des réels ?

L'ouvert U'' défini par (A.2) est la zone blanche de la figure A.1gauche (son complémentaire est représenté en rouge) ; évidemment

$$W \;=\; U'' \cap \mathbb{R} \;=]-1,1[\;.$$

7.b Représentez le graphe de la fonction arcsin ainsi définie et restreinte à W.

En s'aidant de (A.5) on peut mener sans difficulté l'étude de la fonction g restreinte à W, d'où le graphe de la figure A.1droite, avec des tangentes verticales en $x = \pm 1$.

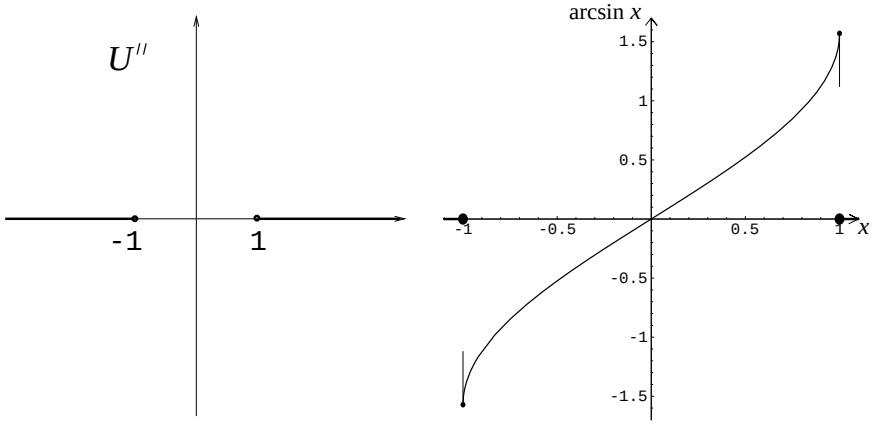


Fig. A.1 – Gauche : l'ouvert U'' de définition de la fonction arcsinus est le plan privé des deux demi-droites épaisses représentées. Droite : graphe de la fonction arcsinus restreinte à $W = U'' \cap \mathbb{R} =]-1,1[$.

Problème 3.3 *Sur la fonction arctangente et le calcul de* π

1 Déterminez le domaine d'holomorphie U de $f(z) = \tan z$.

La fonction $f(z) = \tan z = \sin z / \cos z$, quotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$, est holomorphe d'après le cours sur $\mathbb{C}$ privé des zéros de son dénominateur. Or, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = 0 \iff \exp(iz) = -\exp(-iz) \iff \exp(2iz) = -1 \iff 2iz = i\pi + 2in\pi \iff z = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $U = \mathbb{C} - \{\pi/2 + n\pi,\, n \in \mathbb{Z}\}$.

2.a Tentez de résoudre l'équation $\tan z = w$ pour z inconnu dans U et w donné dans $\mathbb{C}$. Déterminez ainsi $f(U)$.

En posant $X = \exp(iz)$ il vient

$$\tan z = w \iff \frac{1}{i}\frac{X - X^{-1}}{X + X^{-1}} = w \iff X^2 - 1 = iw(X^2 + 1) \iff (1 - iw)X^2 = 1 + iw\ .$$

Si $iw = 1$ il vient $0 = 2$ ce qui n'est pas, donc $w = -i$ n'a pas d'antécédent par f. Si $w \neq -i$ il vient

$$X^2 \;=\; \exp(2iz) \;=\; \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

qui n'a de solution que si $iw \neq -1$, soit par exemple localement

$$z \;=\; \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

en utilisant une détermination du logarithme dont la coupure évite un voisinage de $(1+iw)/(1-iw)$. Au bilan w a au moins un antécédent par f si $w \neq \pm i$. Ceci signifie que $f(U) = \mathbb{C} - \{\pm i\}$.

2.b En revenant sur ce calcul, résolvez en général l'équation $f(z) = f(z')$ pour z et z' dans U.

De ce qui précède on déduit que, pour z et z' dans U,

$$f(z) = f(z') \iff \exp(2iz) = \exp(2iz') \iff 2iz - 2iz' = 2in\pi \iff z - z' = n\pi$$

avec $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi la fonction tangente est périodique de période π dans U.

2.c Définissez un sous-domaine ouvert U_0 de U le plus grand possible, qui soit de forme simple et symétrique, qui contienne 0, et tel que la restriction de f à U_0 soit injective.

f sera injective sur un sous-domaine U_0 de U ssi U_0 ne contient aucun segment horizontal (i.e. parallèle à l'axe des réels) de longueur supérieure ou égale à π. Le plus grand sous-domaine de forme simple et symétrique qui vérifie cette condition et contient 0 est la bande

$$U_0 \;=\; \{x+iy \;\text{ avec }\; -\pi/2 < x < \pi/2 \;\text{ et }\; y \in \mathbb{R}\}\ .$$

2.d Calculez l'image de U_0 par l'application g qui à z associe $\exp(2iz)$.

Si $g(z) = \exp(2iz)$ il vient

$$g(U_0) \;=\; \{\exp(2ix)\exp(-2y) \;\text{ avec }\; -\pi/2 < x < \pi/2 \;\text{ et }\; y \in \mathbb{R}\} \;=\; \{\rho\exp(i\theta) \;\text{ avec }\; \rho > 0 \;\text{ et }\; -\pi < \theta < \pi\}$$

i.e. $g(U_0)$ est la coupure $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$.

2.e Déduisez de ce qui précède l'ensemble des points w qui constituent $f(U_0)$, et dessinez cet ensemble.

D'après **2.a** on a, pour z quelconque dans U_0 et w quelconque dans $\mathbb{C} - \{\pm i\}$,

$$f(z) = w \quad\Longleftrightarrow\quad g(z) = \frac{1+iw}{1-iw}\ .$$

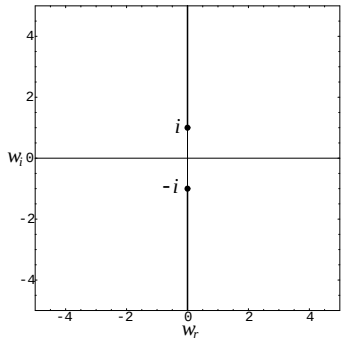
Donc w sera élément de $f(U_0)$ ssi $(1+iw)/(1-iw)$ ne se trouve pas sur $\mathbb{R}^-$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \frac{1+iw}{1-iw} \neq -x \quad\Longleftrightarrow\quad w \neq i\frac{1+x}{1-x}\ .$$

Une étude de la fonction h qui à $x \in \mathbb{R}^+$ associe $(1+x)/(1-x)$ montre que $h(\mathbb{R}^+) =]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$, donc, compte tenu d'autre part de ce que, depuis le début, $w \neq \pm i$, il vient

$$f(U_0) \;=\; \mathbb{C} \;-\; \{iy \;\text{ avec }\; y \in]-\infty,-1] \;\cup\; [1,+\infty[\}\ ,$$

i.e. $f(U_0)$ est le plan complexe privé des demi-droites épaisses ci-après :



2.f Donnez une expression de la fonction $f^{-1} = \arctan$ sur $f(U_0)$ reposant sur l'utilisation de la détermination principale du logarithme.

Si $w \in f(U_0)$ on vient de voir que $(1+iw)/(1-iw)$ est dans la coupure $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ qui est justement le domaine d'holomorphie de la détermination principale du logarithme. On peut donc résoudre $\tan z = w$ i.e.

$$\exp(2iz) \;=\; \frac{1+iw}{1-iw}$$

sous la forme pressentie en **2.a**, mais maintenant clairement valable sur tout $f(U_0)$, selon

$$\boxed{z \;=\; \arctan w \;=\; \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iw}{1-iw}}\ . \tag{A.6}$$

3.a Calculez, par la méthode de votre choix, la dérivée par rapport à w de la fonction $\arctan(w)$ définie en **2.f**.

Première méthode : en partant de l'expression (A.6), on obtient, pour $w \in f(U_0)$,

$$\arctan' w \;=\; \frac{1}{2i}\left(\frac{i}{1+iw}+\frac{i}{1-iw}\right) \;=\; \frac{1}{1+w^2}\ .$$

Deuxième méthode : on applique la formule du cours donnant la dérivée de la réciproque d'une fonction :

$$\left(f^{-1}\right)'(w) \;=\; 1/f'(z)$$

si $w = f(z)$. Ici

$$f'(z) \;=\; \frac{d}{dz}\frac{\sin z}{\cos z} \;=\; \frac{\cos^2 z+\sin^2 z}{\cos^2 z} \;=\; 1+\tan^2 z$$

mène à

$$\boxed{\arctan' w \;=\; \frac{1}{1+w^2}}\ . \tag{A.7}$$

3.b Donnez un développement en série de Taylor en 0 de $\arctan'(w)$. Quel est le rayon de convergence de ce développement ?

On reconnaît une série géométrique de w^2 : dans le disque unité du plan des w, soit $D(0,1)$, on a

$$\arctan' w \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}(-w^2)^n\ .$$

3.c Déduisez-en le développement en série de Taylor en 0 de $\arctan(w)$. Quel est son rayon de convergence ?

Par intégration terme à terme il vient, compte tenu de ce que $\arctan 0 = 0$,

$$\boxed{\forall w \in D(0,1),\quad \arctan w \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{w^{2n+1}}{2n+1}}\ . \tag{A.8}$$

Commentaire : au vu du domaine $f(U_0)$ et de l'existence de singularités de arctan en $\pm i$, on comprend bien la valeur 1 du rayon de convergence.

4 En utilisant les formules trigonométriques établies section 3.4.4, montrez la validité de la formule de Machin,

$$\pi/4 \;=\; 4\arctan(1/5)-\arctan(1/239)\ . \tag{M}$$

Nous allons procéder par équivalence. Comme les deux membres de cette formule sont des nombres inférieurs à $\pi/2$, donc des éléments de U_0 sur lequel tan est injective,

$$\text{(M)} \quad\Longleftrightarrow\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{239}\right) \;=\; \tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right)\ .$$

En utilisant les formules (3.52) et (3.53) on obtient

$$\text{(M)} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1+1/239}{1-1/239} \;=\; \frac{4}{5}\frac{1-1/5^2}{1-6/5^2+1/5^4} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{240}{238} \;=\; 20\frac{24}{476} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{120}{119} \;=\; \frac{120}{119}\ .$$

Cette dernière égalité étant vraie, la formule de Machin est démontrée.

5 Proposez un algorithme permettant un calcul *efficace* de π à partir d'opérations arithmétiques élémentaires. Explicitez cet algorithme en écrivant un *programme* dans un langage informatique de votre choix, que vous préciserez bien entendu.

La formule de Machin combinée au résultat de **3.c** permet de donner π comme la somme d'une série numérique :

$$\pi \;=\; 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239} \;=\; 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{4}{5^{2n+1}} - \frac{1}{239^{2n+1}}\right) .$$

Pour calculer efficacement π à partir de cette série on stockera les valeurs des puissances successives de $1/5^2 = 1/25$ et $1/239^2 = 1/57121$ dans deux variables flottantes. Un programme Mathematica (langage proche du C^{++} pour ce qui nous intéresse ici) implantant cet algorithme est le suivant :

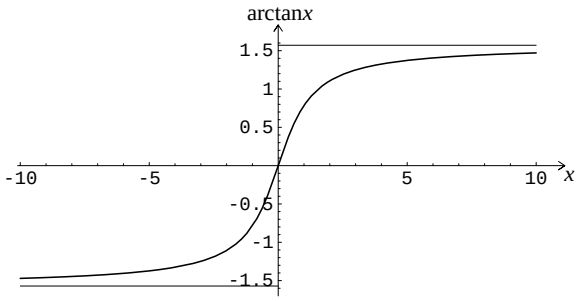
```
p5= 1/5.; p239= 1/239.;
pi= 4 (4 p5-p239);
Do[
   p5*= 1/25; p239*= 1/57121;
   pi+= 4 (-1)^n/(2 n+1) (4 p5-p239);
   Print["n= ",n," -> pi= ",pi," <-> |pi-Pi|= ",Abs[pi-Pi]]
  ,{n,6}]
```

On constate qu'en 6 itérations on a approximé π à mieux que 10^{-10} près.

Commentaire historique : John Machin (1680-1752), mathématicien anglais, utilisa cette formule pour calculer les 100 premières décimales de π. Belle performance en effet pour ce calcul à la main pour lequel il faut quand même sommer jusqu'à des valeurs de n pour lesquelles

$$5^{2n+1} \gtrsim 10^{100} \quad \text{i.e.} \quad n \;\simeq\; 50\ln 10/\ln 5 \;\simeq\; 72\ !...$$

Complément graphique : on peut déduire d'une étude de fonction le graphe de la fonction arctangente restreinte à $\mathbb{R}$, qui présente bien entendu des asymptotes horizontales en $\pm\pi/2$ approchées lorsque l'argument tend vers $\pm\infty$:



Bibliographie

Antoine, X. 2006 *Mathématiques pour l'Ingénieur - S1*. Cours ENSEM 1A.

Chaterji, S. D. 1997 *Cours d'Analyse 2 - Analyse complexe*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Iung, C. 2004 *Régulation*. Cours ENSEM 1A.

Remmert, R. 1991 *Theory of Complex Functions*. Springer-Verlag.

Valiron, G. 1966 *Théorie des fonctions*. Masson.

Ce document vous a plu, au moins dans sa forme ?...

Sachez que je l'ai composé à l'aide du ***traitement de texte scientifique professionnel*** **LaTeX**...

...que vous pouvez vous aussi utiliser, car il est ***portable*** et ***gratuit***.

Pour en savoir plus reportez vous par exemple à

www.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/latex