Introduction

Intégrales Généralisées

L'intégrale de Riemann est définie pour des fonctions bornées et sur des segments. On se propose de généraliser cette notion au cas des fonctions non bornées définies sur des intervalles qui ne sont pas nécessairement des ségments.

1 Introduction et premières définitions

On Commence par un état des lieux de nos connaissances sur l'intégrale. On sait pour l'instant définir l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ à l'aide d'une primitive de f lorsque

- a et b sont des réels.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Ceci est malheureusement insuffisant dans beaucoup d'applications. Par exemple, en calcul des probabilités, les valeurs des paramètres dont on calcule la probabilité n'ont aucune raison d'être confinées à un ensemble borné.

Considérons par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur $]0, 1]$: f n'est pas bornée sur $]0, 1]$ donc n'est pas intégrable sur $[0, 1]$, cependant si on considère $\varepsilon \in]0, 1[$, alors f est continue donc intégrable sur $[\varepsilon; 1]$ et on a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2\left(1 - \sqrt{\varepsilon}\right)$$

On constate que $\int_\varepsilon^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ possède une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$. On note alors

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2$$

D'autre part, la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est définie et continue sur tout segment $[1, A]$ où $A > 1$ et on a

$$\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A}$$

On constate que $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{x^2}dx$ possède une limite finie quand $A \to +\infty$. On note alors

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{x^2}dx = 1$$

1.1 Définition des intégrales convergentes

Dans le reste du chapitre, sauf indication contraire, on considère $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle de bornes a et b, non nécessairement fermé et non nécessairement borné. On se propose d'étudier quand on peut donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Lorsque cela sera possible on parlera alors d'intégrale généralisée. Nous allons définir maintenant les notions d'intégrale convergente et d'intégrale divergente en envisageant différentes situations.

Définition

Soit f une fonction définie sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, intégrable sur $[a, b[$: on lui associe la fonction F définie sur $[a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou C définie par

$$\forall x \in [a, b[, \qquad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ a un sens ou est convergente si et seulement si $F(x)$ possède une limite finie quand $x \to b^-$. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'a pas de sens ou est divergente. Lorsque F a une limite (finie ou non) en a, on note

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} [\arctan x]_0^\beta = \lim_{\beta \to +\infty} \arctan \beta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Remarques

• Nous dirons que deux intégrales sont de **même nature**, si elles sont toutes deux divergentes ou toutes deux convergentes.

• La notion de convergence d'une intégrale généralisée ne dépend que de ce qui se passe près de la borne où l'intervalle est ouvert.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge si F n'a pas de limite en a, ou a une limite infinie en a.

Si f est continue sur $[a, b[$ et si G est une primitive de f, on a

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si G possède une limite finie en b. On notera lorsqu'il en est ainsi

$$\int_a^b f(t)dt = [G(x)]_a^b$$

On pourra encore généraliser la notion d'intégrale dans d'autres situations, que l'on ramènera toujours aux deux cas précédents :

Cas 1

Soit f une fonction continue sur $J =]a, b[$ et c dans $]a, b[$. Si les intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

On note

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

lorsque cette somme existe dans $\bar{\bar{\mathbb{R}}}$

Cas 2

Soit f une fonction continue sur $[a, b]\backslash\{c\}$. Si les intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

On note

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

lorsque cette somme existe dans $\bar{\bar{\mathbb{R}}}$

Théorème

Soit $a < c < b$. Si les intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge et dans ce cas

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Si l'une des deux premières intégrales diverge, la dernière diverge. Nous allons nous préoccuper dans la suite de savoir si une intégrale généralisée donnée converge ou non. Comme ce problème revient à savoir si une fonction a une limite finie en un point, on pourra appliquer les théorèmes classiques sur les limites de fonctions.

dans le cas par exemple de l'intervalle $[0, +\infty[$, dire que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = I$$

signifie qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspondent $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que

$$0 < \alpha < \delta \quad \text{et} \quad \beta > M \implies \left| \int_\alpha^\beta f(x)dx - I \right| < \varepsilon$$

Nous donnerons les démonstrations, et parfois les résultats, uniquement dans le cas des intervalles $[a, b[$. Ils se transcrivent sans problèmes dans le cas $]a, b]$.

1.1.1 Linéarité des intégrales convergentes

Soit f et g des fonctions continues sur J, et λ un nombre réel non nul.
• Si les intégrales de f et de g convergent, il en est de même de celle de $f+g$ et

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

• Si une des deux intégrales diverge, l'intégrale de $f+g$ diverge.
L'intégrale de λf converge si et seulement l'intégrale de f converge et alors

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Remarque
On ne peut rien conclure si les deux intégrales divergent.

1.1.2 Intégration par parties

Rappelons que si G est définie sur $[a,b[$, et possède une limite en b, on note

$$\lim_{x\to b} G(x) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Théorème
Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b[$. Alors, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx$ converge, et si uv possède une limite en b, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx$ converge et

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Remarque

Il se peut que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx$ converge mais que uv n'ai pas de limite finie et que $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx$ diverge. Donc là encore on n'écrira la formule d'intégration par parties pour des intégrales généralisées que lorsque cela aura un sens. On aura en général intérêt à écrire la formule dans un ségment avant de passer à la limite.
Exemple
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}dt$ converge et calculer sa valeur.
Solution.
Une intégration par parties en posons $\begin{array}{ll} u(t) = \ln(t) & u(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = \dfrac{1}{1+t} & v(t) = \dfrac{t}{1+t} \end{array}$
(apprès une longue discussion au cours)

Ce qui va donner pour $x \in]0;1]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\ln t}{(1+t^2)}dt = \left[\frac{\ln t}{1+t}\right]_x^1 + \int \frac{dt}{t\,(1+t)} \\ &= \left[\ln\left(\frac{t}{1+t}\right) - \frac{\ln t}{1+t}\right]_x^1 \\ &= -\ln(2) - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{\ln(x)}{1+x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\ln(2) \end{aligned}$$

■

1.1.3 Changement de variable

Soient f une fonction continue sur $[a,b[$ et φ, une application strictement monotone de classe C^1 sur $[\alpha,\beta[$. Posons $b = \lim\limits_{x\to\beta}\varphi(x)$, et a $= \varphi(\alpha)$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$ sont de même nature, et si elles convergent, ou si elles ont une limite infinie :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt$$

Remarque
Un changement de variable peut transformer une intégrale généralisée en intégrale de Riemann. Cela montre dans ce cas que l'intégrale généralisée converge.

Exemple
En prenant $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, f(x)=arctan $\dfrac{1}{x}$, on obtient

$$\int_0^1 \arctan\frac{1}{x}dx = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}dt$$

Mais la fonction qui à x associe arctan $\dfrac{1}{x}$ se prolonge par continuité en 0 (par la valeur $\dfrac{\pi}{2}$). L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \arctan\frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann et converge donc. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}dt$ converge également.

2 Intégrale généralisée d'une fonction positive

Proposition
Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ et positive. Si l'on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

La fonction F est croissante sur $[a,b[$, et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si F est majorée. De plus, pour tout x de $[a,b[$