$$F(x) \leq \int_a^b f(t)dt$$

Preuve
La fonction f étant positive sur $[a;b[$, on a pour tous $a \leq u < v < b$

$$F(v) - F(u) = \int_u^v f(t)dt \geq 0$$

Donc la fonction F est croissante sur $[a;b[$; par conséquent elle admet une limite en b^- et cette limite est finie si et seulement si F est majorée. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction F est majorée. De plus

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x) = \sup_{[a,b[} F$$

d'où

$$\forall x \in [a,b[, \quad F(x) \leq \int_a^b f(t)dt$$

sinon elle diverge. Dans ce cas, dire que l'intégrale converge revient à dire que la fonction F est bornée.

Exemple
Montrer que l'intégrale de $f : \ x \longrightarrow e^{-x^2}$ est convergente sur $]-\infty, +\infty[$
En effet, La fonction étant paire, il suffit d'étudier la convergence en $+\infty$:
Pour tout $t \geq 1$ on a $t^2 \geq t$ et :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x e^{-t^2}dt = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t^2}dt \\ &\leq \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^x e^{-t}dt \leq \int_0^1 e^{-t^2}dt + 1 \end{aligned}$$

La fonction f étant positive, il en résulte que F est croissante et majorée, elle admet donc une limite en $+\infty$. On montrera plus loin que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

2.1 Critères de comparaison

Théorème
Soit f, g deux fonctions à valeurs réelles, définies, continues et intégrables sur $[a,b[$.
1) On suppose qu'il existe $c \in [a;b[$ tel que

$$\forall t \in [c,b[, \qquad 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

Alors si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge.

2) On suppose qu'il existe $c \in [a; b[$ tel que g est de signe constant sur [c,b[et

$$f(t) \sim g(t)$$

alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Preuve

Il suffit d'étudier le cas où les fonctions sont positives. (Sinon on applique le résultat à $-f$ et $-g$). On a, au voisinage de b,

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x)$$

où ε tend vers 1 lorsque x tend vers b. Il existe un intervalle $[c, b[$ sur lequel g est positive et

$$\frac{1}{2} \leq \varepsilon(x) \leq 2$$

Alors

$$\frac{g(x)}{2} \leq f(x) \leq 2g(x)$$

• Si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b 2g(x)dx$ converge, et d'après le critère précédent $\int_a^b f(x)dx$ converge.

• Si $\int_a^b f(x)dx$ converge, alors d'après le critère précédent $\int_a^b \frac{g(x)}{2}dx$ converge, et $\int_a^b g(x)dx$ converge. Les deux intégrales sont bien de même nature.

2.2 Intégrales de comparaison

Pour pouvoir utiliser les théorèmes précédents, il faut connaître la nature d'intégrales de fonctions simples, qui serviront d'intégrales de comparaison. Dans les résultats qui suivent on n'a indiqué que la borne où le problème de convergence se pose.

2.2.1 Intégrales de Riemann

a) Soit $a > 0$ et un réel ; l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement $\alpha > 1$.

b) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et un réel ; alors les intégrales $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(b-a)^\alpha}$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple

Justifier la convergence puis calculer l'intégrale $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}}dt$

Solution. On a $f(t) = \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} > 0$ pour tout réel $t \geq 2$ et $f(t) \sim \frac{1}{t\sqrt{t}}$ $(\alpha = \frac{3}{2} > 1)$, d'où la convergence de I.

Le changement de variable $t = u^2$ donne :

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{(t-1)\sqrt{t}} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{\sqrt{2}}^x \frac{2}{u^2-1} du \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) \right]_{\sqrt{2}}^x = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \end{aligned}$$

■

2.2.2 Intégrales de Bertrand

Ces intégrales de comparaisons sont utiles à retenir, non seulement pour le résultat mais aussi pour la méthode utilisée pour l'obtenir qu'on va développer dans ce chapitre.

Théorème
L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge si et seulement si l'on a un des deux cas suivants :
$\alpha > 1$
$\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$
On peut donner un critère analogue en un point a fini. Donnons le pour $a = 0$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$ converge si et seulement si l'on a un des deux cas suivants :
$\alpha < 1$
$\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$

Preuve
On se ramène avec le changement de variable $\varphi(x) = 1/x$ au cas précédent. En effet

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha} (\ln t)^\beta}$$

2.2.3 Intégrales de fonction exponentielle

Soit a et α deux réels ; alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
En effet

$$\int e^{-\alpha x} dx = \begin{cases} -\dfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ x & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Et l'on constate bien que l'on obtient une limite finie si et seulement si $\alpha > 0$.

2.3 Le critère de Cauchy

Le critère de Cauchy est un critère qui permet de savoir si une fonction possède une limite en un point, sans connaître a priori cette limite. Nous rappelons sa formulation pour une fonction quelconque, ce qui permettra de l'appliquer au cas d'une intégrale convergente.

2.3.1 Critère de Cauchy pour une fonction F définie sur un intervalle $[a, b[$

Si b est fini la fonction F admet une limite finie en b si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient x et x' verifiant $b - \alpha < x' < x < b$, on ait

$$\left|F(x) - F(x')\right| < \varepsilon$$

Si $b = +\infty$ la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A tel que, quels que soient x et x' dans D verifiant $A < x' < x$, on ait

$$\left|F(x) - F(x')\right| < \varepsilon$$

Appliquons ce critère à la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$

Alors

$$F(x) - F(x') = \int_{x'}^x f(t)dt$$

On a donc le critère de Cauchy pour une intégrale généralisée :

Soit f continue sur $[a, b[$.

si b est fini l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si, il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient x et x' verifiant $b - \alpha < x' < x < b$, on ait

$$\left|\int_{x'}^x f(t)dt\right| < \varepsilon$$

si $b = +\infty$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si, il existe A tel que, quels que soient x et x' dans D verifiant $A < x' < x$, on ait

$$\left|\int_{x'}^x f(t)dt\right| < \varepsilon$$

2.4 Intégrales absolument convergentes

Définition

Soit f une fonction définie continue sur $[a; b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et . On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, ou est absolument convergente, si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ converge.

Comme $|f|$ est une fonction positive, les critères de comparaison donnés dans le paragraphe 2 peuvent s'appliquer et donnent des critères de convergence absolue. L'intérêt de la notion de convergence absolue résulte du résultat suivant :

Théorème

Soit f une fonction continue sur $J = [a, b[$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge absolument, alors elle converge. De plus

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Preuve

C'est une conséquence immédiate du critère de Cauchy et de la majoration de la valeur absolue d'une intégrale.

Remarque

Ce théorème reste bien sûr vrai pour une intégrale généralisée quelconque. On retiendra donc que la convergence absolue d'une intégrale entaine sa convergence.

Exemple

soit a un nombre réel. Considérons la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f_a(x) = \frac{\sin ax}{x^2}$$

On a

$$|f_a(x)| \leq \frac{|\sin ax|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, il résulte du critère de comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f_a(x)|\, dx$ converge, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_a(x)dx$ converge absolument, et finalement que cette intégrale converge.

Théorème

Soit f une fonction définie continue sur $[a; +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) S'il existe α un réel et un réel non nul k tel que $f(t) \sim \dfrac{k}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$, alors f est de signe constant pour t assez grand, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

b) S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument.

c) S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = \pm\infty$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Remarques

a) Si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ avec $\alpha \leq 1$ on ne peut pas conclure : avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$ on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \frac{1}{t} = 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, alors que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} = 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge.

b) Si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ avec $\alpha > 1$ on ne peut pas conclure : avec $\alpha = \dfrac{7}{4}$ on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \frac{1}{t} = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, alors que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} = +\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ converge.

Théorème

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction définie continue sur $[a; b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) S'il existe un réel α et un réel non nul k tel que $f(t) \sim \dfrac{k}{(b-t)}$ au voisinage de b^-, alors f est de signe constant au voisinage de b^-, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

b) S'il existe un réel $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t \to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument.

c) S'il existe un réel $\alpha \geq 1$ tel que $\lim\limits_{t \to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = \pm\infty$, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

2.5 Intégrales semi-convergentes

Nous dirons qu'une intégrale est semi-convergente lorsqu'elle est convergente sans être absolument convergente. Pour de telles intégrales il faut donc utiliser d'autres moyens que les critères de comparaison. Nous allons commencer par donner un exemple d'une telle intégrale, qui sera une bonne illustration des méthodes utilisées pour montrer qu'une intégrale d'une fonction qui n'est pas de signe constant est convergente et pas absolument convergente.

Soit a un réel non nul, et g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g_a(t) = \frac{\cos at}{t}$$

Une intégration par parties donne

$$\int_1^x g_a(t)dt = \left[\frac{\sin at}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin at}{at^2}dt$$

c'est à dire

$$\int_1^x g_a(t)dt = \frac{\sin ax}{ax} - \frac{\sin a}{a} + \int_1^x \frac{\sin at}{at^2}dt$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin at}{at^2}dt$ converge d'après l'exemple du paragraphe précédent. Par ailleurs $\dfrac{\sin ax}{ax}$ tend vers zéro, quand x tend vers l'infini, puisque c'est le produit d'une fonction bornée, par une fonction tendant vers zéro. Donc $\displaystyle\int_1^x g_a(t)dt$ possède une limite lorsque x tend vers l'infini, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_a(t)dt$ converge, et vaut $-\dfrac{\sin a}{a} + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin at}{at^2}dt$.

Pour montrer que la convergence n'est pas absolue, utilisons la minoration

$$|\cos u| \geq \cos^2 u$$

qui est vraie puisque $|\cos u| \leq 1$. Alors, en utilisant la formule

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

On obtient

$$\frac{|\cos ax|}{x} \geq \frac{1 + \cos 2ax}{2x}$$

et donc

$$\int_1^x |g_a(t)|\, dt \geq \int_1^x \frac{dt}{2t} + \frac{1}{2}\int_1^x g_{2a}(t)dt$$

Mais l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_{2a}(t)dt$ converge d'après le calcul précédent, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^x g_a(t)dt$ diverge.

Donnons le critère d'Abel directement inspiré du calcul précédent.

2.6 Critère d'Abel

Soit f une fonction de classe C^1 décroissante sur $[a, +\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$ vérifiant la propriété suivante : il existe une constante M telle que, quels que soient x et x' dans $[a, +\infty[$ on ait

$$\left|\int_x^{x'} g(t)dt\right| \leq M$$

Alors $\displaystyle\int_a^{\infty} g(t)dt$ converge et, pour tout x de $[a, +\infty[$

$$\left|\int_x^{\infty} f(t)g(t)dt\right| \leq Mf(x)$$

Exemple

Pour étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^3)dt$, et afin d'utiliser la règle d'Abel, on fait d'abord un changement de variable en posant u=t^3 qui permet d'obtenir $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{3u^{\frac{1}{3}}}du$.

On pose $f(u) = \dfrac{1}{3u^{\frac{1}{3}}}$ et $g(u) = \sin u$. On a alors la convergence de l'intégrale par application de la règle d'Abel.