• Soit la série $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Le terme général u_n tend bien vers 0 et la condition nécessaire de convergence de la série est remplie. nous allons montrer que cette série converge. En effet, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1 = \sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ Ici, contrairement à l'exemple précédent, une somme infinie de termes positifs est finie.

Mais <u>Attention</u>, cette condition nécessaire de convergence n'est pas suffisante c-à-d la réciproque n'est pas vraie : ce n'est pas parce que le terme général d'une série tend vers 0 que cette série est convergente. Autrement dit, l'addition d'une très grand nombre de toutes petites quantités tendant vers zéro peut ne pas converger voirs tendre vers l'infini. L'exemple le plus célèbre est celui de la "série harmonique".

3.2 Structure algébrique des séries convergentes

Les trois résultats suivants proviennent immédiatement des résultats correspondants sur les suites, appliqués aux suites des sommes partielles :

3.2.1 Somme de séries

Proposition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Si la série de terme général un et la série de terme général v_n convergent, la série de terme général $u_n + v_n$ converge et

$$\sum_{p=n_0}^{\infty} (u_p + v_p) = \sum_{p=n_0}^{\infty} u_p + \sum_{p=n_0}^{\infty} v_p$$

Si l'une des deux séries diverge et si l'autre converge, la série de terme général $u_n + v_n$ diverge.

Corollaire

Si les suites $(\sum_{k=0}^{n} u_n)$ et $(\sum_{k=0}^{\infty} v_k)$ convergent la suite $(\sum_{k=0}^{n} (u_k + v_k))$ converge, et la limite de la somme est égale à la somme des limites.

Remarque

On ne peut rien dire de la série $\sum (u_n + v_n)$ si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. En effet les deux séries $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n \geq 1} \left(-\dfrac{1}{n} \right)$ divergent alors que la série somme est la série nulle donc converge ; par contre, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \right)$ diverge.

3.2.2 Produit d'une série par un scalaire

Proposition

Soit (u_n) une suite numérique et λ un nombre réel ou complexe non nul. Alors la série de terme général λu_n est **de même nature** que la série de terme général u_n et, si elles convergent, en plus

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Preuve

C'est évident à partir de la relation $\sum\limits_{k=0}^{n}(\lambda u_k) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

3.3 Critère de Cauchy

Proposition

Soit (u_n) une suite numérique,. La série de terme général u_n converge si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N, tel que $m > n > N$ implique

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| < \varepsilon$$

On peut retrouver la propriété, vue déjà dans le cours sur la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ qui est duvergente. On a en effet :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \text{ et } S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Cet exemple illustre encore le fait qu'il n'est pas suffisant que le terme général tende vers 0 pour que la série soit convergente.

4 Séries absolument convergentes

Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dira que la série de terme général u_n converge absolument si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes ; si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente, de plus on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve

La série $\sum |u_n|$ étant convergente, elle vérifie le critère de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous n et $m \in \mathbb{N}$,

$$m > n \geq N \Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k| < \varepsilon$$

Or l'inégalité triangulaire nous donne

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |u_k|$$

d'‘où

$$m > n \geq N \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| < \varepsilon$$

et ainsi la série $\sum |u_n|$ converge, toujours d'après le critère de Cauchy. D'autre part, on a également pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |u_k|$$

On obtient alors, quand $m \longrightarrow +\infty$

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|$$

Remarque

Une série peut être convergente sans être absolument convergente ; par exemple on a vu que la sérien $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge mais la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge puisqu'on a

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \to +\infty \quad \text{quand } n \to +\infty$$

Exercice 1

Calculer la somme des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous

$u_n = \ln \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} \quad (n \geq 1) \qquad u_n = \dfrac{3^n}{7^{n-2}} \quad (n \geq 2)$

5 Séries à termes positifs

On se focalise dans cette partie sur le cas où le terme général est une suite dont les termes sont positifs (où à partir d'un certain rang). Dans ce cas, la suite des sommes partielles possède une propriété très particulière qui facilite énormément l'étude de sa convergence. D'autre part, tout ce qui suit pourra être appliqué à une série dont le terme général est une suite de nombres négatifs, en considérant l'opposé de la suite.

Soit donc (u_n) une suite de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$$

Proposition

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs et considérons la suite des sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$; alors la suite (S_n) est croissante et la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée. Dans ce cas, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Preuve

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ donc la suite $(S_n)_n$ est croissante : elle converge donc si et seulement si elle est majorée. De plus dans ce cas, la limite de la suite (S_n) majore tous les termes de la suite.

Lemme

$\sum u_n$ une série à termes positifs. Pour que $\sum u_n$ converge, il faut et il suffit qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq M$$

Preuve

S_n est une suite à termes positifs et croissante, elle est donc convergente si et seuelemt si elle est majorée.

5.1 Théorèmes de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs vérifiant

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Longrightarrow 0 \leq u_n \leq v_n$$

alors

- Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge
- Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge.
- On suppose que, pour tout entier n, $v_n > 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lambda > 0$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de **même nature**.

Exemples

• On se refère à des séries connues comme série de comparaison.

la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \dfrac{2 + \sin n}{3^n}$ converge, en effet

On a

$$\forall n \geq 0, 0 < u_n < \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$$

D'où la série $\sum \dfrac{2 + \sin n}{3^n}$ est convergente.

• La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\ln n + \sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$ diverge, en effet

On a

$$\forall n \geq 1, 0 < \ln n + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n}, \text{ d'où } \frac{1}{\ln n + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

La série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, on en déduit que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{\ln n + \sqrt{n}}$ est divergente.

5.2 Théorème d'équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels, telles que, à partir d'un certain rang v_n soit de signe constant. On suppose que

$$u_n \sim v_n$$

Alors la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.

Exemple

$U_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ pour tout $n \geq 1$, on a $u_n > 0$ et $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ or la série harmonique diverge, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ diverge.

Remarque

Il est important que les suites aient un signe constant comme le montre l'exemple suivant :

Considérons $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$;

on a vu que la série $\sum v_n$ converge et que la série $\sum u_n$ diverge comme étant une série harmonique.

cependant, on a pour tout $n \geq 1$

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{n^{3\backslash 2}} \to 1 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

Et donc $u_n \sim v_n$ quand $n \to +\infty$.

Exercice

Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous

$$u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n} \qquad\qquad u_n = \left(3 + (-1)^n\right)^{-n}$$

Exercice

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$$

5.3 Critère de comparaison série-intégrale

Donons maintenant un résultat qui permet de comparer une série à une intégrale.

Proposition

Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur un intervalle $[N, +\infty[$ $(N \in \mathbb{N})$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La série $\sum f(n)$ converge ;

b) La série $\sum \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$ converge ;

c) La fonction $F(x) = \displaystyle\int_N^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

<u>Preuve</u>

a) $\Longrightarrow$ *b)* : comme f est décroissante sur $[N, +\infty[$, on a pour tout $n \geq N$

$$\forall t \in [n, n+1], f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$

d'où

$$0 \leq, f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)dt \leq \int_n^{n+1} f(n)dt = f(n) \qquad (*)$$

donc, si la série $\sum_{n\geq N} f(n)$ converge, alors la série $\sum_{n\geq N}\int_n^{n+1} f(t)dt$ converge.

$b) \implies c)$: Supposons que la série $\sum_{n\geq N}\int_n^{n+1} f(t)dt$ converge. D'après la relation de charles on a

$$0 \leq f(n+1) = \sum_{k=N}^{n}\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_N^{n+1} f(t)dt = F(n+1)$$

donc la suite $(F(n+1))_{n\geq N}$ possède une limite finie l . Or la fonction f étant positive sur $[N;+\infty[$, la fonction F est croissante sur $[N;+\infty[$ donc possède une limite quand $x \longrightarrow +\infty$ qui ne peut donc être que l.

$c) \implies a)$: Si $F(x)$ admet une limite l en $+\infty$, alors la suite $(F(n+1))_{n\geq N}$ converge vers l, i.e la série $\sum_{n\geq N}\int_n^{n+1} f(t)dt$ converge. On en déduit alors que la série $\sum_{n\geq N} f(n+1)$ converge grâce à l'encadrement $(*)$, donc la série $\sum_{n\geq N} f(n)$ converge également.

Exemple

Soit $x_n = \dfrac{1}{n}(\ln n! - n\ln n)$. Appliquons le théorème de comparaison à une intégrale, soit

$$\int_1^n \ln t dt \leq \sum_{k=1}^{n}\ln k \leq \int_1^{n+1}\ln t dt$$

donc

$$n\ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1$$

d'où

$$\ln n - 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n!}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1) - 1$$

ou encore

$$-1 + \frac{1}{n} \leq x_n \leq -1 + \left(1+\frac{1}{n}\right)\ln(n+1) - \ln n$$

Comme $\ln(n+1) = \ln n + \circ(1\backslash n)$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} x_n = -1$, d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1\backslash n} = e^{-1}$$

Proposition

Soit f une fonction définie continue sur $[a;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a;+\infty[$ croissante et de limite $+\infty$ telle que la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ converge et la suite $v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\,dt$ converge vers 0. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)$ dt converge.

Exemple

Considérons l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$.

La fonction $f(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ est continue sur $]0;+\infty[$ et prolongeable par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = 0$, donc f est localement intégrable sur $[0;+\infty[$.

Posons $x_n = n\pi$ et $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et de limite $+\infty$. Or avec le changement de variable $u = t - n\pi$, on obtient

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}du$$

De plus, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n| = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}du$$

on constate alors facilement que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \int_0^{\pi} \sin u du = 2\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, et par conséquent la série alternée $\sum u_n$ converge.
D'autre part, considérons pour tout $n \in IN^*$

$$v_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\, dt$$

avec le changement de variable $u = t - n\pi$, on obtient

$$v_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}du = |u_n|$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = 0$. On On déduit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ converge.

5.4 Séries de comparaison

Nous avons déjà rencontrer quelques séries positives : série géométrique (si la raison est positive), série harmonique. En voici deux autres familles.

5.4.1 Séries de Riemann

On appelle série de Riemann toute série dont le terme général est de la forme $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

<u>Preuve</u>
Si $\alpha \leq 0$, la suite $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 donc la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha > 0$, considérons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$: elle est continue, décroissante et positive et si on note $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$, on a

$$F(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ si } \alpha \neq 1 \text{ et } F(x) = \ln x \text{ si } \alpha = 1$$

par conséquent $F(x)$ possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$: on déduit alors que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque la série harmonique et la série de Riemann obtenue si $\alpha = 1$.

5.4.2 b. Séries de Bertrand

La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ nommée série de Bertrand converge si et seulement si l'on a un des deux cas suivants :
i) $\alpha > 1$
ii) $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

<u>Preuve</u>
Si $\alpha \leq 0$, la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum \left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$ diverge.
Si $\alpha = 1$, on pose, pour x≥ 2,

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$$

En calculant la dérivée de f, on constate qu'elle est négative sur un intervalle de la forme $[N, +\infty[$. Donc f est une fonction décroissante positive sur cet intervalle. On obtient facilement une primitive de f :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln \ln x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

Donc l'on constate que F possède une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, et le critère de comparaison série-intégrale montre que la série $\sum \left(\frac{1}{n(\ln n)^\beta}\right)$ converge si et seulement converge si et seulement si $\beta > 1$.
Si $\alpha < 1$, on écrit

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln)^\beta} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^{1-\alpha}}{n (\ln n)^\beta}$$

Mais la suite $\frac{n^{1-\alpha}}{n(\ln n)^\beta}$ admet $+\infty$ comme limite. Donc, pour n assez grand

$$\frac{n^{1-\alpha}}{n (\ln n)^\beta} \geq 1$$

et

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$$

Il résulte alors du critère de comparaison que la série diverge.

Si $\alpha > 1$, soit α' tel que $\alpha > \alpha' > 1$. On écrit

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} = \frac{1}{n^{\alpha'}} \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^{\beta}}$$

Mais la suite $n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^{\beta}$ admet $+\infty$ comme limite. Donc, pour n assez grand

$$\frac{1}{n^{\alpha-\alpha'}(\ln n)^{\beta}} \leq 1$$

et

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \leq \frac{1}{n^{\alpha'}}$$

Il résulte alors du critère de comparaison que la série converge.

5.5 Régles de convergence

En plus des critères de comparaison, on a dans le cas des séries des règles qui permettent de savoir si une série à termes positifs converge ou non. Ces règles sont obtenues par comparaison aux séries géométriques ou aux séries de Riemann.

Proposition

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Alors on a

a) Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge ;

b) Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge.

<u>Preuve</u>

On a pour tout $n \geq n_0 - 1$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \dfrac{v_n}{v_{n-1}} \\ 0 & \leq & \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \dfrac{v_n}{v_{n-1}} \\ & & \cdots \\ 0 & \leq & \dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \leq \dfrac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}} \end{array}$$

alors, en multipliant ces inégalités, on obtient pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

c'est à dire

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}\right) v_n$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le critère de comparaison pour obtenir la proposition.

5.5.1 Régle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ possède une limite $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors on a :
a) Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge ;
b) Si $\ell > 1$ ou $\ell = 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Remarques

• On ne peut pas conclure si $\ell = 1$: en effet si $u_n = \dfrac{1}{n}$ ou $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Mais la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge alors que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge.

• Une série $\sum u_n$ à termes réels strictement positifs peut converger sans que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ ait une limite.

• La règle de d'Alembert s'applique en général pour des séries dont le terme général contient des produits dont le nombre de facteurs dépend de n, des factorielles par exemple.

Exemples

• Soit $\sum u_n$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Or en passant au ln on obtient

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-1} < 1.$$

D'où d'après la régle de d'Alembert $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

• Soit $\alpha > 0$ et soit $\sum u_n$ définie par un $= \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\alpha}$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Donc on ne peut pas conclure. Mais on sait déjà que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Ceci montre que le critère de D'Alembert est beaucoup moins fin que le critère de Riemann. En particulier il ne permet de conclure à la divergence de séries que lorsque leur terme général tend vers l'infini. Idem pour la suivante.

5.5.2 Régle de Cauchy

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Alors on a
a) Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

b) Si $\ell > 1$ ou $\ell = 1^+$, la série $\sum u_n$ diverge.

Remarques

- La règle de Cauchy ne permet pas de conclure quand $\ell = 1$: en effet si $u_n = \dfrac{1}{n}$ ou $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Mais la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge alors que la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge.
- On peut montrer que si $\sum u_n$ est une série à termes réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Par conséquent si on se trouve dans le cas douteux $\ell = 1$ pour la règle de d'Alembert, il est inutile d'essayer la règle de Cauchy.
- Une série $\sum u_n$ à termes réels strictement positifs peut converger sans que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ ait une limite.
- L'emploi du critère de Cauchy est souvent moins facile que celui de D'Alembert. Mais on n'a pas toujours le choix. En effet si les limites des critères existent elles sont égales. Mais l'une peut exister et pas l'autre, mais dans ce cas, ce sera toujours celle de Cauchy qui existe.

Exemple

Soit la série numérique $\sum u_n$ définie par $u_n = \left(a + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $a > 0$.

On a $\sqrt[n]{u_n} = a + \dfrac{1}{n}$, et la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ converge vers a. Donc il résulte de la règle de Cauchy que la série de terme général u_n converge si $0 \leq a < 1$, et diverge si a¿1. Il reste à étudier le cas $a = 1$. Dans ce cas $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et la suite u_n vers e$\neq 0$. Donc la série $\sum u_n$ diverge.

5.5.3 Règle de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n^\alpha u_n)_n$ possède une limite ℓ. Alors on a :

a) Si ℓ est finie non nulle, les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.
b) Si $\ell = 0$ et $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge.
c) Si $\ell = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

<u>Preuve</u>
Si la limite l est finie, à partir d'un certain rang, on a

$$n^\alpha u_n < l + 1$$

et donc

$$u_n < \frac{l+1}{n^\alpha}$$

La série dont le terme général est le membre de droite converge. Donc la série de terme général u_n converge.
Si la limite l n'est pas nulle, à partir d'un certain rang, on a

$$n^\alpha u_n > K$$

Où

$$K = \begin{cases} l/2 & \text{si } l \text{ est finie} \\ 1 & \text{si } l \text{ est infinie} \end{cases}$$

Donc, si $\alpha \leq 1$,

$$u_n > \frac{K}{n^\alpha}$$

La série dont le terme général est le membre de droite diverge. Donc la série de terme général u_n diverge.

Remarques

- Si $\ell = 0$ et $\alpha \leq 1$, on ne peut pas conclure : avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $n^\alpha \frac{1}{n} \to 0$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors que $n^\alpha \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \to 0$ et la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.
- De même on ne peut pas conclure si $\ell = +\infty$ et $\alpha > 1$: avec $\alpha = \frac{7}{4}$, on a $n^\alpha \frac{1}{n} \to +\infty$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors que $n^\alpha \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \to 0$ et la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.
- La règle de Riemann s'applique en général pour des séries dont le terme général croit « beaucoup plus vite » ou « beaucoup moins vite » que des puissances.

Exemples

- Posons $u_n = e^{-n}$: on a $u_n > 0$ et $n^2 u_n \to 0$ donc la série $\sum e^{-n}$ converge.
- Posons $u_n = \frac{1}{\ln n}$ pour tout $n \geq 1$: on a $u_n > 0$ et $n u_n \to +\infty$ donc la série $\sum \frac{1}{\ln n}$ diverge.

Exercice 3

Etudier la nature des séries de termes généraux suivants

$$u_n = 1 - \cos\frac{1}{n} \qquad u_n = \frac{n!}{a^n} \quad (a > 0) \qquad u_n = \left(1 - e^{\frac{1}{n^2}}\right)\sqrt{\ln n}$$

$$u_n = \frac{2^{2n} e^{-2n}}{n} \qquad u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

6 Séries à termes quelconques

A partir de maintenant, on s'interesse aux séries dont le terme général n'est plus de signe constant, en particulier les séries dites alternées ou trigonométriques. Il existe cependant un cas qui permet de se ramener à la partie précédente qui sont les séries absolument convergente étudiées à la section 4.

6.1 Séries semi-convergentes

Définition

On dit qu'une série à termes réels ou complexes est semi-convergente si et seulement si elle est convergente sans être absolument convergente.

Proposition

Si la série de terme général u_n est semi-convergente, et la série de terme général v_n est absolument convergente, alors la série de terme général $u_n + v_n$ est semi-convergente.

<u>Preuve</u>

La série $\sum v_n$ étant absolument convergente est convergente, donc la série $\sum (v_n + u_n)$ est convergente. D'autre part, l'inégalité triangulaire nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq |u_n + v_n| + |v_n|$$

donc, si la série $\sum (v_n + u_n)$ était absolument convergente, la série $\sum u_n$ le serait également : par conséquent la série $\sum (v_n + u_n)$ est semi-convergente.

Remarques

– La somme de deux séries semi-convergentes peut être absolument convergente : soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont semi-convergentes alors que leur somme est la série nulle donc absolument convergente.

Pour montrer qu'une série converge, sans être absolument convergente, on utilise fréquement un critère spécial appelé, critère d'Abel. Nous allons commencer par donner un cas particulier, le critère de Leibniz.

6.2 Critère de Leibniz (dit des séries alternées)

Définition

On dit que la série à termes réels $\sum u_n$ est alternée si ses termes successifs, u_n et u_{n+1}, sont de signe opposé, c'est-à-dire si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n.u_{n+1} \leq 0$.

Quitte à changer de signe aux termes d'une série alternée $\sum u_n$, on peut supposer que les termes d'indice pair sont positifs et les termes d'indice impair sont négatifs, ce qui revient à dire que $u_n = (-1)^n |u_n|$.

Théorème (Règle de Leibniz)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, tendant vers 0 (donc à termes positifs). Alors la série (dite alternée) $\sum (-1)^n u_n$ est convergente, de plus la majoration du reste suivante :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}$$

preuve

On peut supposer la suite (v_n) décroissante positive (sinon on considère $-v_n$). On considère la suite (S_n) des sommes partielles. Alors

$$S_{2n+2} - S_{2n} = v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad S_{2n+1} - S_{2n-1} = -v_{2n+1} + v_{2n} \geq 0$$

La suite (S_{2n}) est décroissante, et la suite (S_{2n+1}) est croissante. Comme

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -v_{2n+1}$$

la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$ converge vers 0. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont donc adjacentes et ont la même limite finie l. Alors c'est la limite de la suite (S_n), ce qui montre que la série de terme général $(-1)^n v_n$ converge. De plus, pour tout entier n,

$$S_{2n+1} \leq l \leq S_{2n+2} = S_{2n+1} + v_{2n+2}$$

Donc

$$0 \leq l - S_{2n+1} \leq v_{2n+2}$$

De même

$$S_{2n} - v_{2n+1} = S_{2n+1} \leq l \leq S_{2n}$$

donc

$$-v_{2n+1} \leq l - S_{2n} \leq 0$$

On en déduit que, pour tout entier n,

$$|S_n - l| \leq v_{n+1}$$

Le reste d'une série alternée est donc majoré, en valeur absolue, par la valeur absolue du premier terme négligé. On a même, si on le désire, le signe de l'erreur commise en prenant S_n comme valeur approchée de l.

Théorème (Théorème spécial à certains séries alternées)
Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels, tel que :

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ est alternée} \\ u_n \to 0 \\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \end{cases}$$

alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exemples

1) La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi convergente.

2) La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in]0,1]$ est convergente.

Exercice

a) Montrer que la somme suivante est bien définie (autrement dit, que la série correspondante converge).

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9 + 2\sqrt{n}}$$

b) Estimer l'entier N tel que la somme partielle d'ordre N de la série correspondante à la somme ci-dessus est une valeur approchée de S avec une erreur inférieure au nombre $\varepsilon = 1/2009$.

Solution

a) Que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9+2\sqrt{n}}$ converge est une conséquence facile du critère de Libniz sur les séries alternées. En effet , si on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{9+2\sqrt{n}}$ on a

1. u_n est positif pour n pair et négatif pour n impair ; la série donnée est donc une série alternée.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| =. \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{9+2\sqrt{n}} = 0.$

3. Puisque, pour x positif, la fonction $x \to 9 + 2\sqrt{x}$ est croissante, $|u_n|$ est une fonction décroissante de $n \in \mathbb{N}$.

Les hypothèses du critère mentionné sont donc vérifiées, on remarquera que la série donnée ne converge pas

absolument car $|u_n| \sim \frac{1}{2}n^{-1/2}$ pour $n \to \infty$.

b) Soit $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$. Nous avons que

$$|S - S_N| \leq |u_{N+1}|$$

Pour que S_N soit une valeur approchée de S avec une erreur inférieure à $1/2009$ il suffit alors qu'on ait

$$|u_{N+1}| < 1/2009 \ , \ \text{ c.à.d } \ \frac{1}{9 + 2\sqrt{N+1}} < \frac{1}{2009}$$

Cette inégalité est équivalente à $\sqrt{N+1} > 1000$ ou bien $N \geq 1000000$. Compte tenu du fait que le premier terme de la série a un indice $n = 0$, il suffit donc de sommer les premiers 1000001 termes de la série donnée pour obtenir une somme partielle $1/2009$ proche de la somme de la série.

6.3 Critère d'Abel

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante tendant vers 0 et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe vérifiant

$$\exists M > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow |w_n + w_{n+1} + ... + w_m| \leq M$$

Alors la série $\sum v_n w_n$ converge et on a

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} v_k w_k \right| \leq M v_n$$

Exercice 4

Etudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général u_n et donné par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \arctan \dfrac{1}{n}$ $\qquad u_n = (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$

Solution 1. On a

$$|u_n| = \frac{1}{n} \arctan \frac{1}{n}$$

Puisque l'on a au voisinage de 0, $\arctan u \sim u$

On en déduit que

$$|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$$

Comme la série de Riemann de terme général $1/n^2$ converge, il en résulte que la série de terme général $|u_n|$ converge, c'est à dire que la série de terme général u_n converge absolument. Donc elle converge.

2. On a aussi

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

Donc

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \sim \frac{1}{2n}$$

La série de terme général $|u_n|$ diverge par comparaison à la série harmonique.

Mais la suite $1\backslash\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)$ est une suite décroissante qui converge vers 0. Donc la série de terme général un converge d'après le critère de Leibniz. Il en résulte que cette série est semi-convergente.

6.4 Produit de Séries

Définition et Théorème

Soint $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs convergentes. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

alors la série $\sum w_n$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

La série $\sum w_n$ est appelée produit des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Remarque

La formule ci-dessus généralise la formule du produit de deux sommes finies. D'autre part dans cette formule, si une des séries est nulle, alors la série produit est nulle, même si l'autre série est infinie.

Donnons un exemple de calcul :

Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Effectuons le produit de la série de terme génnéral z^n par elle même. Le coefficient w_n de la série produit vaut

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} = (n+1)\, z^n$$

La série de terme général $(n+1)z^n$ converge donc absolument si $|z| < 1$, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} (n+1)\, z^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Exercice

On considère deux séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$.

1. Donner le terme général c_n du produit de Cauchy $\sum\limits_{n\geq 0} c_n$ de ces deux séries.

2. Application : on considère $a_n = b_n = \frac{(-1)n}{2^n}$ pour tout $n \geq 0$. Calculer c_n et déterminer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Exercice

On considère la série $\sum\limits_{n\geq 3} \dfrac{\ln n}{n}$

1. Quelle est sa nature ?
2. Soit S_N la somme partielle d'ordre N : $S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln n}{n}$. Encadrer S_N par deux intégrales.
3. En déduire un équivalent de la suite (S_N).

7 Annexe

7.1 Extrait du DS N°2 2009-2010

Exercice 1

Déterminer la nature des séries numériques de termes généraux respectifs suivants :

1. $u_n = \dfrac{2^{n^2+n}}{3^{n^2+1}}$, $n \geq 0$
2. $u_n = \left(\dfrac{2n-1}{2(n+1)}\right)^{2n^2}$, $n \geq 1$
3. $u_n = (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}\right)$, $n \geq 2$
5. $u_n = \exp\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1$, $n \geq 1$, où α est un réel strictement positif, on discutera la nature de la série en fonction de α.

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

1) Etudier le signe de u_n en fonction de la parité de n. (1 point)

2) Montrer que la série de terme général u_n est divergente. (2 points)

3) Enoncer le théorème de convergence des séries alternées, Quelle hypothèse de ce théorème n'est pas vérifiée par u_n ? Justifier la réponse. (2 points)

7.2 Extrait du DS N°2 2010-2011

Exercice 1

1) Etudier la convergence des séries suivantes dont le terme général est donné par :

$$a_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n^2} \quad (a>0) \qquad b_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \qquad c_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+(-1)^n} \quad n \geq 2$$

$$u_n = (-1)^n \qquad v_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \qquad w_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

2) Justifier la convergence de la série de terme général $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, pour $n \geq 2$, et calculer la somme de cette série.

7.3 Extrait du DS N°2 2011-2012

Exercice 1

Déterminer la nature des séries numériques de termes généraux respectifs suivants :

1. $u_n = \dfrac{2^{n^2+n}}{3^{n^2+1}}$, $n \geq 0$
2. $u_n = \left(\dfrac{2n-1}{2(n+1)}\right)^{2n^2}$, $n \geq 1$
3. $u_n = (-1)^n \sqrt{n^2+1} - n$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+n+1}\right)$, $n \geq 2$

5. $u_n = \exp\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1$, $n \geq 1$, où α est un réel strictement positif, on discutera la nature de la série en fonction de α.

Exercice 2

Soit $a > 0$ un nombre réel. Etudier, en discutant suivant la valeur de a, la convergence de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n}\right)$$