Proposition

Soit f_n une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur un intervalle J, on suppose que

(i) Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur J ;

(ii) La série f'_n converge uniformément sur J vers une fonction g.

(iii) Il existe un point a de J tel que la suite $f_n(a)$ possède une limite finie α.

Alors la suite f_n converge uniformément sur J vers la fonction f de classe C^1 telle que

$$f' = g \quad et \quad f(a) = \alpha$$

Remarques

• Il importe de noter que la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas la convergence de la suite des fonctions dérivées : sur $\mathbb{R}$, prenons f_n : x $\longmapsto \dfrac{1}{n}\sin(nx)$. Il est clair que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Pourtant, si on dérive, on obtient $f'_n : x \longmapsto \cos(nx)$. Or la suite numérique $(\cos nx)$ n'admet de limite que pour x congru à 0 modulo 2π . La suite (f'_n) ne converge donc même pas simplement.

• Notons aussi que la convergence uniforme d'une suite de fonctions n'implique pas la dérivabilité de la fonction limite. Sur $\mathbb{R}$, les fonctions (f_n) définies par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ sont dérivables en tout point. Pourtant, elles convergent uniformément vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0. Le premier exemple de fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$, mais dérivable nulle part, était d'ailleurs construit à partir d'une suite de fonctions dérivables uniformément convergentes. Comme d'habitude, lorsqu'on ne dispose pas d'une forme explicite de la fonction limite, le critère de Cauchy est incontournable.

Exercice

On considère la suite de fonction

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{nx^3}{1+nx} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x\epsilon[0,1]$, on a :

$$x^2 - \frac{nx^3}{1+nx} \geq 0$$

3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?
4. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx^3}{1+nx} dx$$

5. Calculer f'_n. La suite (f'_n) converge-t-elle simplement sur $[0,1]$?

2 Séries de Fonctions

Dans cette partie, on va combiner la notion de série et la notion de convergence uniforme. On considère donc une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et l'on forme la suite des sommes partielles (S_n) où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

On étudie encore la convergence de la suite S_n. DOnc de la même manière que nous avions défini les séries numériques à partir des suites numériques, nous allons étudier les séries de fonctions à partir des suites de fonctions. Nous donnons les principaux résultats sur ce type d'objets. La seule nouveauté ici par rapport à la partie sur les suites de fonctions viendra de nouveau du fait que dans le cas d'une série, on n'a le plus souvent pas accès à la fonction limite, ce qui complique l'étude de la convergence uniforme, et conduira ici à la notion de convergence dite normale.

2.1 Les différents types de convergence d'une série de fonctions

Il y a plusieurs types de convergence envisageable pour une série de fonctions :

2.1.1 La convergence simple

La série de terme général f_n converge simplement sur J, si pour tout x de J, la série de terme général $f_n(x)$ converge, c'est à dire si, pour tout x de J, la suite $(S_n(x))$ des sommes partielles possède une limite finie. On notera encore

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{n} f_n(x)$$

Et celà définit une fonction sur J qui sera notée $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Exemple

Montrons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n\,(x+n)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Pour x$\geq$ 0 fixé, on a :

$$\frac{x}{n\,(x+n)} \sim \frac{x}{n^2}$$

or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{n^2}$ est convergente comme série de Riemann et par suite la série converge simplement.

2.1.2 La convergence absolue

La série de terme général f_n converge absolument sur J, si pour tout x de J, la série de terme général $|f_n(x)|$ converge, c'est à dire si, pour tout x de J, la suite $(T_n(x))$ définie par $T_n = \sum_{n=0}^{n} |f_n|$ possède une limite finie.

Exemple

Soit, pour tout $n\epsilon\mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$

On a, pour tout entier n et pour tout réel x,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

et donc, par comparaison avec une série de Riemann convergente, la série $\sum |f_n(x)|$ est absolument convergente. On en déduit ainsi que, pour tout réel x, la série $\sum f_n(x)$ converge, c'est-à-dire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Par contre ici, on n'a pas accés à l'expression de la limite ni même de la suite des sommes partielles et donc on ne peut rien affirmer quant à la nature uniforme de la convergence.

2.1.3 La convergence uniforme

La série de terme général f_n converge uniformément sur J, si la suite des fonctions (S_n)converge uniformément sur J. Donc si l'on note S la limite uniforme, cela signifie que la suite $(\|S_n - S\|_\infty)$ converge vers 0.

Exemple

Soit $\alpha \in]0,1[$. La série $\sum x^n$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$. En effet

$$\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \left| \frac{1}{1-x} - \sum x^n \right| = \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right| \leq \frac{\alpha^{N+1}}{1-\alpha} \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

On peut avoir convergence absolue sans avoir convergence uniforme et convergence uniforme sans avoir convergence absolue.

2.1.4 La convergence absolue uniforme

La série de terme général f_n converge absoluement uniformément sur J, si la suite des fonctions (T_n) converge uniformément sur J. Donc si l'on note T la limite uniforme, cela signifie que la suite $(\|T_n - T\|_\infty)$ converge vers 0. Et la convergence absolue uniforme implique la convergence uniforme.

Remarque

Pour montrer que la convergence normale implique toutes les autres, donnons tout d'abord le critère de Cauchy de convergence uniforme pour les séries, qui est l'application à la suite des sommes partielles du critère de Cauchy de convergence uniforme :

2.1.5 Critère de Cauchy de convergence uniforme

Définition

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un itervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq M$$

<u>Preuve</u>

Il s'agit tout simplement d'écrire le critère de Cauchy uniforme pour la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$

Exemple

En utilisant le critère de Cauchy, démontrer la convergence de la série suivante :

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + ... + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + ...$$

Pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions, on montre en général la convergence uniforme des restes vers zéro. Encore faut-il disposer d'une expression manipulable pour ces restes..., il existe un critère pratique très simple, dû à Weierstrass, pour montrer la convergence uniforme : la notion de convergence normale. On s'en servira constamment dans l'étude des séries entières.

2.1.6 La convergence normale

Comme on l'a dit auparavant, on a besoin d'un critère assurant la convergence uniforme sans pour autant avoir recours à l'expression explicite de la suite des somme partielles. Celui-ci est donné par la notion de convergence normale que l'on définit maintenant.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. On dit que la série de fonctions de terme général (f_n) converge normalement sur I si et seulement si la série numérique de terme général

$$\alpha_n := \sup_{x \in I} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty$$

est convergente.

Il résulte immédiatement du critère de Cauchy que, si la série converge normalement, elle converge absolument uniformément et donc uniformément sur J. En retiendra donc en particulier que : Si une série de fonctions converge normalement, elle converge uniformément.

Exemple

La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En effet, on a

$$\forall x \epsilon \mathbb{R}, \qquad \left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente comme série de Riemann.

Proposition

Une série de fonctions convergeant normalement sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge absolument uniformément sur I.

<u>Preuve</u>

Considérons une série de fonctions $\sum f_n(x)$ convergeant normalement sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; on a pour tout $x \in I$,

$$\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty$$

Alors, comme la série $\sum \|f_k\|_\infty$ converge, on a d'après le critère de Cauchy des séries numériques,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty \leq \varepsilon$$

Donc la série de fonctions $\sum |f_n(x)|$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I : la série $\sum f_n(x)$ converge donc absolument uniformément sur I.

Remarques

• La convergence normale présente l'intérêt de mettre tout le monde d'accord, i.e Si la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur I, alors elle est simplement, absolument et uniformément convergente sur I.

• Toutes les propriétés vues pour les séries de fonctions uniformément convergentes sont encore vraies pour les séries de fonctions normalement convergentes.

• Quel est l'avantage de la convergence normale sur la convergence uniforme ? Il est double : d'une, elle est très simple à vérifier puisqu'il suffit de trouver une bonne série numérique $\sum \alpha_n$ tel que $\|\sum f_n\|_\infty \leq \sum \alpha_n$; de deux, elle ne nécessite pas de connaître la fonction limite (tout comme Cauchy uniforme).

• Notons enfin que la convergence uniforme n'implique pas la convergence normale. La situation typique est celle des séries de fonctions alternées.

On considère la suite de fonction

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}} \end{cases}$$

A x fixé, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge par le critère des séries alternées, donc la série de fonctions converge simplement. De plus, pour tout x, la majoration du reste par son premier terme donne :

$$|R_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}$$

et la convergence des restes vers zéro est uniforme en x, i.e. $\sum f_n$ converge uniformément sur R+. Par contre, elle n'est pas absolument convergente : à x fixé, la série $\sum |f_n(x)|$ est équivalente à la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. A fortiori, elle n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

Notoer qu'au total, le schéma de la figure ci-dessous résume les implications entre les différents types de convergence pour les séries de fonctions.

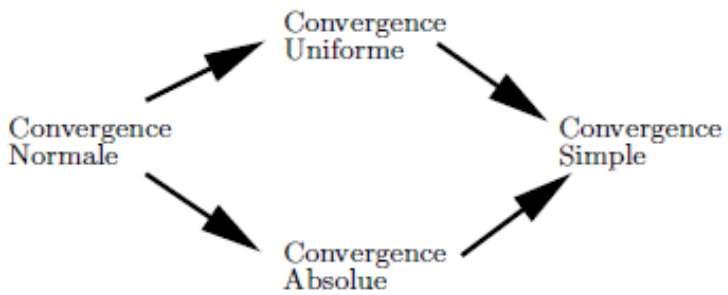

FIGURE 1: Liens entre convergences pour les séries de fonctions.

Exercice

Etudier la convergence simple,uniforme et normale, des séries de fonctions f_n définies sur $[0,1]$ dont le terme général est donné ci-dessous

$$f_n(x) = \frac{1}{n+nx^2} \qquad\qquad f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}$$

2.2 Critères de convergence uniforme d'une série de fonctions

Donons tout d'abord une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série.

Proposition
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I.
Preuve
En effet si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformément vers une fonction S sur I et alors la suite $f_n = S_n - S_{n-1}$ converge uniformément vers $S - S = 0$.

Nous donnons maintenant des critères de convergence uniforme.

2.2.1 Critère de Weierstrass

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on suppose qu'il existe une série réelle convergente $\sum a_n$ telle que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq a_n$$

alors la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur I.

Preuve
On a par hypothèse $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq a_n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq a_n$$

On déduit aussitôt que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge par les règles de comparaison des série positives : ainsi la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur I.

2.2.2 Critère d'Abel uniforme

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonction définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers 0 sur I, et soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant
$\exists M > 0, \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow \forall x \in I,$

$$|h_n(x) + h_{n+1}(x) + ... + h_m(x)| \leq M$$

Alors la série de fonctions $\sum g_n h_n$ converge uniformément sur I.

Preuve

Appliquons le critère d'Abel aux séries numériques $\sum g_n(x)h_n(x)$ pour tout x$\in I$: on a alors

$$\forall x \in I, n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)h_k(x) \right| \leq M \left| g_{n+1}(x) \right|$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)h_k(x) \right| \leq M \left\| g_{n+1} \right\|_\infty$$

Or la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I donc $\|g_{n+1}\|_\infty$ tend vers 0 et ainsi le reste de la série $\sum g_n h_n$ converge vers 0, i.e la série $\sum g_n h_n$ converge uniformément.

2.2.3 Critère de Leibniz uniforme

Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ convergenat uniformément vers 0 sur I ; alors la série alternée $\sum(-1)^n g_n$ converge uniformément sur I.

<u>Preuve</u>
Il suffit d'appliquer le critère d'Abel uniforme à la suite $h_n = (-1)^n$.

Exercice
Etudier la convergence simple, uniforme et normale, des séries de fonctions f_n définies sur $[0, 1]$ dont le terme général est donné ci-dessous

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n \arctan(nx)}{1 + nx} \qquad\qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx + \sqrt{n}}$$

2.3 Propriétés de la convergence uniforme d'une série de fonctions

Nous donnons sans démonstration quelques propriétés qui se déduisent immédiatement de celles de la convergence uniforme des suites de fonctions par applications à la suite des sommes partielles.

2.3.1 Continuité

Théorème
soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ convergeant uniformément localement sur I ; alors si les fonctions f_n sont continues sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum f_n$ est une fonction continue sur I.

2.3.2 interversion des signes $\sum$ et $\int$

Théorème
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies continues sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ convergeant uniformément sur $[a, b]$; alors la série numérique $\sum \left(\int_a^b f_n(x)dx \right)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}(1 - nx)\, e^{-nx}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Dans la suite, on notera f la somme de cette série de fonctions.

2. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, on a

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{n^2}$$

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$.

2.3.3 Dérivation terme à terme

Théorème

Soit f_n une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur un intervalle J, on suppose que

- Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur J ;
- La série de terme général f_n converge uniformément.
- Il existe un point a de J tel que la série $\sum f_n(a)$ converge.

Alors la série de terme général f_n converge uniformément localement sur J. Sa somme est de classe C^1 et l'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

On peut remplacer la condition (iii) par (iii') la série de terme général f_n converge simplement. Donnons une généralisation pour des fonctions de classe C^k.

Théorème

Soit f_n une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définies sur un intervalle J, on suppose que

- Les fonctions f_n sont de classe C^k sur J ;
- La série de terme général $f_n^{(k)}$ converge uniformément.
- Il existe un point a de J tel que, si $0 \leq j \leq k$ la série de terme général $f^{(j)}(a)$ converge.

Alors la série de terme général f_n converge uniformément localement sur J. Sa somme est de classe C^k et l'on a, si $1 \leq j \leq k$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$$

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x + 2^n}.$$

Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement et que la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, définie une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $f'(0)$.

3 Annexe

3.1 Extrait du DS N°1 2009-2010

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{2n}{\pi\left(1+n^2x^2\right)} \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $[0,1]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0,1]$?

2. Soit a un réel fixé dans $]0,1[$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,1]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $]0,1]$?

3. Calculer l'intégrale I_n donné par $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. Montrer que l'on $0\leq I_n \leq 1$ pour tout entier naturel n et que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$.

3.2 Extrait du DS N°1 2010-2011

Pour tout entier n≥ 1 et tout x réel on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)}{n}$.

1. Montrer que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} f_n()$ converge normalement sur tout intervalle borné $[-a,a]$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Donner une expression de $g'(0)$.
5. La série de fonctions $\sum f_n()$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

3.3 Extrait du DS N°1 2010-2011

Exercice
Pour tout entier $n \geq 1$, Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\right) dx$$

Exercice Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{1}{n^4+x^2}$$

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on note f la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ de cette série.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et préciser sa valeur.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$, on pose maintenant $g_n(t) = \int_0^t f_n(x)dx$.

4. Le réel positif t étant fixé, montrer que l'on a

$$\int_0^t f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$$

5. Calculer explicitement $g_n(t)$ et montrer que la série de fonctions de terme général g_n converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

6. En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et préciser sa valeur.

(on rappelle l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, que l'on pourra admettre et utiliser librement).