Chapitre II- Fondement de la Mécanique Analytique

I. ÉQUATION DE LAGRANGE SIMPLE (Noté E.L.S.) 17

I.1. CALCUL DE Q_k *17*

I.2. CALCUL DE $Q_k^{''}$ *17*

I.3. CALCUL DE $Q_k^{''}$ EN FONCTION DE T (ÉNERGIE CINÉTIQUE) *18*

I.4. LAGRANGIEN *18*

I.5. ÉQUATION DE LAGRANGIEN *19*

I.6. ÉQUIVALENCES *20*

II. EXTENSIONS 20

II.1. Cas d'un système (S) à l.h, l.p, F_d conservatives et non conservatives :

II.2. Cas d'un système (S) à l.h, semi h., parfaites + dissipatives, F_d cons. et non cons. :

II.3. Système lagrangien utilisant les moments conjugués *21*

III. ÉQUATION DE LAGRANGE AVEC MULTIPLICATEURS (Noté E.L.M.) 22

III.1. Force généralisée de liaison $Q_k^{'}$ *22*

III.2. E.L.M *23*

IV. HAMILTON ET ÉQUATIONS CANONIQUES 25

IV.1. ESPACE DES PHASES 25

IV.2. HAMILTONIEN 26

IV.3. ÉQUATIONS CANONIQUES (E.C.) 27

IV.4. LOIS DE CONSERVATION 28

V. PRINCIPE D'HAMILTON OU PRINCIPE DE MOINDRE ACTION (P.M.A.) **31**

V.1. ACTION LAGRANGIEN 31

V.2. CALCUL DE LA VARIATION DE A : δA 32

V.3. ACTION HAMILTONIENNE: 32

V.4. APPLICATION 33

VI. ÉQUATION DE LAGRANGE LINÉARISÉ (E.L.L.) **45**

VI.1. DÉFINITION ET CONDITIONS D'ÉQUILIBRE 45

VI.2. CAS DES SYSTÈMES CANONOQUES 47

VI.3. INFLUENCES DES FORCES DISIPATIVES 51

VI.4. INFLUENCES DES FORCES GYROSCOPIQUES 53

VI.5. ***CE QU'IL FAUT SAVOIR*** 54

RÉFÉRENCES 55

ANNEXES 56

Chapitre II- Fondement de la Mécanique Analytique

Dans cette introduction, nous considérons les systèmes pour lesquelles toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle. En outre ces système seront naturels, c'est – à - dire que les contraintes ou liaisons, ainsi que l'énergie potentielle, ne dépendent pas explicitement du temps ; dans ces conditions, comme nous le verrons, l'hamiltonien **H** s'identifie à l'énergie du système

Le mouvement d'une particule et plus généralement d'un système matériel, peut être étudié à partir d'un formalisme dit *analytique* développé par les mathématiciens français A. Lagrange et écossais W. hamilton. Ce formalisme s'appuie principalement sur deux fonctions scalaires ayant la dimension physique d'une énergie : le *lagrangien L et l'hamiltonien H*. Son intérêt principal est d'une part qu'il se prête mieux à l'extension de la mécanique aux autres domaines de la physique (optique, physique quantique, etc.) et d'autre part qu'il permet de trouver plus facilement les grandeurs physiques qui se conservent dans le problème considéré.

I. ÉQUATION DE LAGRANGE SIMPLE (Noté E.L.S.)

Définition 1 : Soit un système (S) à liaisons parfaites **(1)** et holonomes **(2)**, et à forces données conservatives **(3)**. Un tel système est appelé *système lagrangien*.

☝ Soit les coordonnées généralisées $\{q_k\}$ qui sont indépendantes car (2), et on choisit un D.V.L. $\{\delta q_k\}$. Pour une position $\vec{r}_i$ de (S) $\Rightarrow$ $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_i(q_k)$ car D.V. $\Rightarrow$ temps fixé et donc :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k) \Rightarrow \begin{cases} \delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ d\vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}dt \end{cases}$$

✌ Système à liaison parfaite (1)$\Rightarrow$ pour un D.V.L. $\delta W_\ell^{'} = 0$ donc le P.T.V. se réduit à $\delta W_d + \delta W^{''} = 0$.

I.1. CALCUL DE Q_k

$$\delta W_d = \sum_{k=1}^{n} Q_k.\delta q_k = -dU \ car\ (3) \quad \Rightarrow dU = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \ car\ U(\vec{r}_i) = U(q_k)\ et\ \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_k)$$

Donc on aura $\boxed{\delta W_d = \sum_{k=1}^{n} Q_k.\delta q_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \Leftrightarrow Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}}$ **(4)**

I.2. CALCUL DE $Q_k^{''}$

$$\delta W^{''} = -\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i.\delta\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i.\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right) = -\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = \sum_{k=1}^{n} Q^{''}{}_k.\delta q_k \ .$$

Comme q_k est indépendantes donc $\boxed{\Rightarrow Q^{''}{}_k = -\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}}$ **(5)**

(5) est la définition générale de $Q_k^{''}$ même si les q_k sont liées.

I.3. CALCUL DE $Q_k^{''}$ EN FONCTION DE T (ÉNERGIE CINÉTIQUE)

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)$$

$$\boxed{Or\quad\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial q_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)}$$

Rappels

Pour tout fonction $\phi=\phi(\dot{q}_k,q_k,....,t)$:

❶ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)$

❷ $\int\frac{d\phi}{dt}.dm=\frac{d}{dt}\int\phi.dm\quad et\quad\int\frac{\partial\phi}{\partial t}.dm=\frac{\partial}{\partial t}\int\phi.dm$

❸ $\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$ règle de simplification par le point.

Donc $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\Rightarrow\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_k}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$ car règle de simplification par le point. Puisque par hypothèse $\dot{\vec{r}}_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\quad car\ \vec{r}_i(q_k,t)\Rightarrow\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$.

$$\text{Or}\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}+\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)=\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}+\frac{\partial T}{\partial q_k}=-Q_k^{''}+\frac{\partial T}{\partial q_k}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=-Q_k^{''}\qquad(6)\end{cases}\quad\textbf{(6)}$$

Donc **(5)⇔(6)** expression de la force généralisée d'inertie en fonction T.

I.4. LAGRANGIEN

Définition 2 : Considérons un système matériel en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, sous l'action de forces extérieures et intérieures qui dérivent d'une énergie potentielle totale U. *Le lagrangien* du système est la fonction suivante, dépendant des paramètres de position $\{q_k\}$, de leurs dérivées par rapport au temps $\{\dot{q}_k\}$ et éventuellement du temps : $\boxed{L=L(q_k,\dot{q}_k,t)=T-U}$.

Remarque : Cette définition n'est valable qu'en mécanique newtonienne et pour des particules chargées qui ne sont pas en interaction magnétique. En effet, le lagrangien associé au mouvement d'une particule chargée (charge q), plongée dans un champ électromagnétique (E, B), comporte un terme supplémentaire : $\boxed{L=T-qV+qv.A}$. q étant la charge électrique, v la vitesse et (V, A) le potentiel électromagnétique (cf. Électromagnétisme S3).

Exemples

✍ *Lagrangien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel.* On a :

$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

, x étant l'allongement du ressort de raideur k.

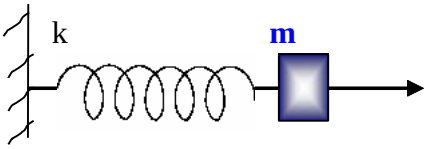


Fig.1

✌ *Lagrangien point matériel en chute libre.* On a :

$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \quad U = mgz \Rightarrow L(\dot{z}, z) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$, z étant la coordonnée suivant la verticale ascendante.

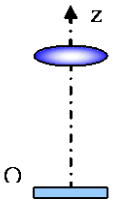


Fig.2

✍ *Lagrangien d'un pendule simple.* On a :

$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad U = -mgl\cos\theta \Rightarrow L(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$,

θ désignant l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante.

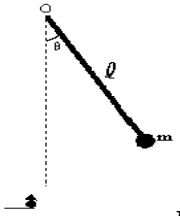


Fig.3

I.5. ÉQUATION DE LAGRANGE SIMPLE (E.L.S)

♠ P.T.V. $\Rightarrow \delta W_d + \delta W'' = 0$ (car $\delta W'_\ell = 0$ puisque (1) l.p.)$\Leftrightarrow \sum_k (Q_k + Q''_k)\delta q_k = 0 \quad \forall \delta q_k$

car liaison holonome.$\Rightarrow$ q_k indépendants.

$$\sum_k (Q_k + Q''_k)\delta q_k = 0 \quad (\forall \delta q_k) \Rightarrow Q_k + Q''_k = 0 \quad \forall k \quad car \quad l.h$$

Or (4) $\Rightarrow$ $\boxed{\delta W_d = \sum_{k=1}^{n} Q_k.\delta q_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \Leftrightarrow Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k}}$ et (6)$\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -Q''_k$

♠ Donc $\boxed{Q_k + Q''_k = 0 \xleftrightarrow{(4)\ et\ (6)} -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} = 0}$.

♠ Donc si l'on introduit le lagrangien de (S) : $L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - U$, on dit qu'on parle de *formalisme lagrangien* ie nous travaillons, avec $(q_k, \dot{q}_k, t)$, dans *l'espace de configuration E_n* dont les $\{q_k\}$ sont les coordonnées généralisées de cette espace. Or $U = U(q_k, t) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} = 0$.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} = 0 \Leftrightarrow L_k : \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0} \qquad \textbf{E.L.S.}$$

E.L.S. se sont les équations de Lagrange simple d'un système lagrangien.

Remarques

• Un système S possédant un lagrangien est dit *conservatif* si $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ ie système lagrangien à liaison scléronome ⇒ système conservatif. L'implication dans l'autre sens n'est pas tjrs valable car un système conservatif est à hamiltonien H (voir cf. IV) conservé ⇒ H = cste/t.

• Un système Lagrangien à l. scl., est à énergie mécanique totale conservée : $E_m = T + U = cste$.

I.6. ÉQUIVALENCES

Nous avons montré que : L.F.D.⇒ P.T.V. ⇒ E.L.S., montrons donc les implications dans l'autre sens. En effet :

❶ P.T.V. ⇒ $\boxed{\delta W_d + \delta W_\ell^{'} + \delta W^{''} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i + \vec{F}_i^{'} + \vec{F}_i^{''}\right).\delta\vec{r}_i = 0 \quad \forall \delta\vec{r}_i}$ pour j donne $\delta r_{i\neq j}=0$ et

$\delta r_j \neq 0 \Rightarrow \left(\vec{F}_j + \vec{F}_j^{'} + \vec{F}_j^{''}\right).\delta\vec{r}_j = 0 \quad \left(\forall \delta\vec{r}_j\right) \Rightarrow \vec{F}_j + \vec{F}_j^{'} + \vec{F}_j^{''} = 0 \Rightarrow -\vec{F}_j^{''} = m\vec{a}_j = \vec{F}_j + \vec{F}_j^{'} = \vec{R}_j$

d'où P.F.D.

❷ E.L.S. ⇒ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \xrightarrow{(4)\ et\ (6)} Q_k^{''} + Q_k = 0$

$Q_k + Q_k^{''} = 0 \Rightarrow \left(Q_k + Q_k^{''}\right)\delta q_k = 0 \quad \forall k \Rightarrow \sum_k \left(Q_k + Q_k^{''}\right)\delta q_k = 0 \quad \left(\forall \delta q_k\right) \Rightarrow \delta W^{''} + \delta W_d = 0$ d'où P.T.V. D'où on aura $\boxed{\text{L.F.D.} \Leftrightarrow \text{P.T.V.} \Leftrightarrow \text{E.L.S.}}$

Remarque

Pour les E.L.S. on ne peut pas avoir l'équivalence avec le P.T.V. que pour un système lagrangien qui obéit à des conditions citées précédemment mais $\boxed{\text{L.F.D.} \Leftrightarrow \text{P.T.V. } \forall \text{ le système.}}$

II. EXTENSIONS

II.1. Cas d'un système (S) à l.h, l.p, F_d conservatives et non conservatives :

- Pour les forces conservatives on associe U tel que $Q_k^{cons} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$ et on peut définir le lagrangien L = T – U.
- Pour les forces non conservatives on associe U tel que $Q_k^{n,cons} = \left(Q_k\right)_{n,cons}$
- Tout le traitement sera le même que précédemment sauf que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \left(Q_k\right)_{n,cons} \quad puisque \quad Q_k^{''} + Q_k = Q_k^{''} + +Q_k^{cons} + Q_k^{n,cons} = 0$$

II.2. Cas d'un système (S) à l.h, semi h., parfaites + dissipatives, F_d conservatives et non conservatives :

- $\forall k \quad Q_k^{''} + Q_k^{'} + Q_k = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \left(Q_k\right)_{n,cons} + Q_k^{'}$

Avec (4) ⇒ $\delta W_d = \sum_{k=1}^{n} Q_k^{cons}.\delta q_k = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_k}\delta q_k \Leftrightarrow Q_k^{cons} = -\frac{\partial U}{\partial q_k}$ et (6)⇒ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -Q_k^{''}$

d.d.l. = s équations de Lagrange simple.

Cas particuliers

- Système à liaison parfaite $\Rightarrow \forall k = 1 \to s \quad Q_k^{'} = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_k} = \left(Q_k\right)_{n,cons}$.
- Système à liaison parfaite et force donnée conservative (ie système lagrangien) :

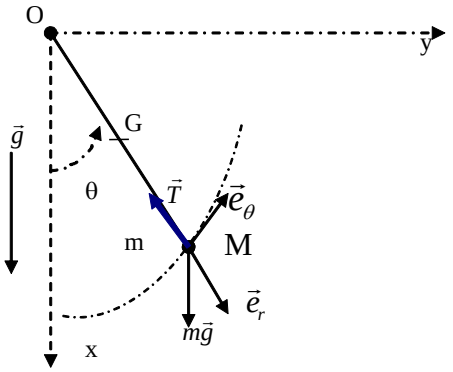
$$\forall k \quad Q_k^{'} = 0, \left(Q_k\right)_{n,cons} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad \text{s éqs. E.L.S}$$

Exemple :

Trouver l'équation de mouvement du pendule simple : une masse m fixé à l'extrémité d'une tige OM de longueur l et de masse négligeable. En coordonnées polaires on a :

$$\begin{cases} x = l\cos\theta \\ y = l\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -l\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Que devient cette équation dans le cas de petit angle.



Réponse

Le Lagrangien du pendule simple à pour expression :

$E_c = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad U = -mgl\cos\theta + cste \Rightarrow L(\dot{\theta},\theta) = \dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta + K$. θ, coordonnée généralisée, désignant l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante.

On montre aisément qu'il s'agit d'un système lagrangien à liaison scléronome donc conservatif $\Rightarrow$ E.L.S./θ = équation du mouvement noté L_θ : $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + (g/l).\sin\theta = 0$. Or pour $\theta << 1 \Rightarrow L_\theta : \ddot{\theta} + (g/l).\theta = 0$

II.3. Système lagrangien utilisant les moments conjugués

• *Moments conjugués ou généralisés :*

Le moment conjugué p_i, associé à la variable q_i, est la quantité suivante : $\boxed{p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$.

Pour un point matériel en chute libre (Fig. 2 page 20), le moment conjugué est $p_z = m\dot{z}$; c'est donc *sa quantité de mouvement*, d'où le nom de moment linéaire donné parfois à ce concept.

Pour un pendule simple (Fig. 3 page 20), le moment conjugué est $p_\theta = ml^2\dot{\theta}$; c'est donc son moment cinétique, d'où le nom de moment angulaire donné parfois à ce concept.

• <u>*Expression des équations de Lagrange*</u> :

Les équations de Lagrange d'un système, soumis uniquement à des forces qui dérivent d'une énergie potentielle (ie Forces conservatives), sont les n équations différentielles suivantes du mouvement d'un système à n paramètres de configuration : $\boxed{\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \Leftrightarrow \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}}$. Dans cette présentation, <u>*nous admettons*</u> les équations de Lagrange comme nous avons admis la **L**oi **F**ondamentale de la **D**ynamique (L.F.D.) sous forme vectorielle.

***<u>Exemple</u>*s:**

✍ *Lagrangien d'un oscillateur harmonique unidimensionnel (Fig. 1 page 20)*

Comme $L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \quad p_x = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_x) = \frac{\partial L}{\partial x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \; avec \; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

✌ *Lagrangien d'un pendule simple (Fig. 3 page 20)*

$L(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta, \; p_\theta = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_\theta) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \; avec \; \omega_0^2 = \frac{g}{l}$

III. ÉQUATION DE LAGRANGE AVEC MULTIPLICATEURS (Noté E.L.M.)

Soit un système matériel à liaison parfaite décrit par les coordonnées $\{q_k\}_{k=1\to n}$, liées par m relation de forme non holonome : $\sum_{k=1}^{n} a_{kl}(q_k, t)\dot{q}_k + b_l(q_k, t) = 0$ (voir chapitre I, cf. II.5) $l = 1 \to m : indice\, de\, liaison$ et m = n - s<n où s = d.d.l

Ces liaisons peuvent être de type :

- non - holonome pure ie non intégrable.
- semi – holonome ie non - holonome intégrable.
- holonome pure dérivées.

Quelle que soit la nature des liaisons qui interviennent dans un problème de mécanique, ce qui importe avant tout c'est le choix d'une bonne méthode de mise en équation du problème, méthode qui, **<u>même si les forces de liaison sont mal connues</u>**, doit permettre de déterminer le mouvement du système.

Nous considérons des D.V.L. $\{\delta q_k\}_{k=1\to n} \to \sum_{k=1}^{n} a_{kl} \cdot \delta q_k = 0$. On se propose, donc d'établir n équations de Lagrange à n variables q_k liées par m (liaisons) équations de liaison, ces équations ne donneront, donc, pas seulement les équations de mouvements, mais aussi elles serviront à déterminer d'autres quantités physiques, à savoir les forces de liaisons.

III.1. Force généralisée de liaison $Q_k^{'}$

- $l.p. \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Q_k^{'} \delta q_k = 0 \\ pour\ D.V.L. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_k^{'} = 0 \quad k = 1 \cdots n \quad ssi \quad n = s\ (q_k\ indépendants) \\ Or \quad \delta q_k\ sont\ liées\ par\ m\ éqs \Rightarrow Q_k^{'} \neq 0. \end{cases}$

- δq_k obéit aux éqs $\Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Q_k^{'} \delta q_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{kl} \delta q_k = 0 \quad \times \lambda_l \quad avec\ l = 1 \rightarrow m \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \right) \delta q_k = 0.$

λ_l : multiplicateur de Lagrange (Que l'on introduit dans les équations de liaisons).

- $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^{m} \left(Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \right) \delta q_k + \sum_{k=m+1}^{n} \left(Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \right) \delta q_k = 0$

- On choisit donc λ_l tel que $Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} = 0\ pour\ k = 1\ à\ m.$

Donc il reste $\sum_{k=m+1}^{n} \left(Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \right) \delta q_k = 0$, Or $\{q_k\}_{k=1 \rightarrow n}$ sont liées par m équations de liaison, donc on peut choisir (n - m) coordonnées q_k indépendantes (k = m+1 à n) $\Rightarrow$ $Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} = 0\ pour\ m+1 \leq k \leq n.$

- ***<u>En conclusion :</u>*** $\boxed{Q_k^{'} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} = 0\ pour\ 1 \leq k \leq n \Rightarrow Q_k^{'} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \quad avec\ k = 1 \rightarrow n}$

- ***<u>Interprétation géométrique :</u>***

Soit l'espace vectoriel $\Re^n$

Les vecteurs $\{q_k\} \xrightarrow{engendre} E_{n-m}$ (sous espace vectoriel de $\Re^n$) de dimension (n-m), avec les $a_{kl} \xrightarrow{engendre} E_m$ (sous espace vectoriel de $\Re^n$) de dimension (m) avec $\sum_{l=1}^{m} a_{kl} \delta q_k = 0 \Rightarrow \forall \delta q_k \quad E_{n-m} \perp E_m$, on dit que $E_{n-m}\ et\ E_m$ sont orthogonaux et forme une partition de $\Re^n$.

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k^{'} \delta q_k = 0 \Rightarrow \{Q_k^{'}\} \perp E_{n-m} \Rightarrow \{Q_k^{'}\} \in E_m \Rightarrow \exists \lambda_l / Q_k^{'} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \quad avec\ k = 1 \rightarrow n$$

III.2. E.L.M

Partant de P.T.V. :

$\delta W_d + \delta W_\ell^{'} + \delta W^{''} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(Q_k + Q^{'}{}_k + Q^{''}{}_k \right) \delta q_k \Rightarrow Q_k + Q^{'}{}_k + Q^{''}{}_k = 0\ \forall\ \delta q_k$ liées.

Partant de L.F.D. :

L.F.D. $\Rightarrow Q_k + Q'_k + Q''_k = 0 \quad \forall k = 1 \to n$ en plus $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = (Q_k)_{n,cons} + Q'_k$ ***à ce niveau nous allons tenir compte des m liaisons :***

Rappelons $l.p. \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Q'_k \delta q_k = 0 \\ pour\ D.V.L. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q'_k = 0 \quad k = 1 \cdots n \ \ ssi \quad n = s\ (q_k\ indépendants) \\ Or \quad \delta q_k\ sont\ liées\ par\ m\ éqs \Rightarrow Q'_k \neq 0. \end{cases}$

En générale : $\boxed{\begin{cases} * \ Q'_k = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} = \sum_{l=1}^{m} \vec{F}'_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_k} \\ * \ \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \dot{q}_k + b_l(q_k, t) = 0 \quad avec\ l = 1 \to m \\ * \ \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \delta q_k = 0 \quad pour \quad D.V.L. \end{cases}}$ où les **m** λ_l sont les multiplicateurs de Lagrange relatives à **m** liaisons. Il s'ensuit que :

$$\boxed{E.L.M.: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = (Q_k)_{n,cons} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \ avec \begin{cases} m \langle n \\ 1 \le k \le n \\ n \rangle s \end{cases}}$$

Les λ_l permettent de calculer effectivement les forces de liaisons.
Ces ''n'' E.L.M. combinées avec ''m'' équations de liaison.

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = (Q_k)_{n,cons} + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl} \ avec \begin{cases} m \langle n \\ 1 \le k \le n \\ n \rangle s \end{cases} \\ \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \dot{q}_k + b_l(q_k, t) = 0 \end{cases}}$$

(n + m) équations à (n + m) inconnues qui sont $\{\lambda_l, q_k\}$.

<u>Remarque</u>

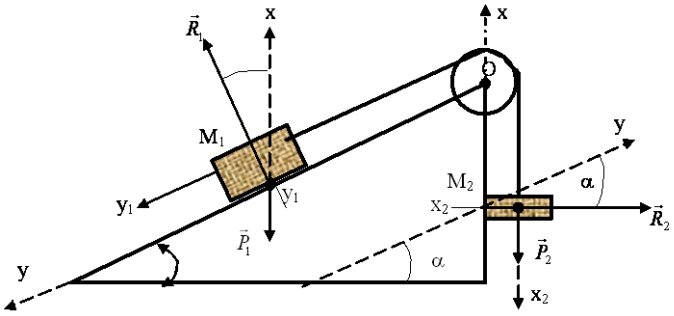
- En éliminant les λ_l, entre ses équations, on retrouve les ''s'' équations du mouvement ie les E.L.S.

<u>Cas particulier</u>

Système Lagrangien $\Rightarrow \begin{cases} Q_k^{n,cons} = 0 \\ dW_d^{n,con} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l a_{kl}$.

<u>Exemple E.L.M.</u>

Un système matériel S est constitué par deux charges ponctuelles M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 reliées par un fil inextensible sans masses passant par la gorge d'une poulie fixe P non - pesante.



En négligeant tout frottement, déterminer l'accélération $\|\vec{\Gamma}\|$ de S par application :

1°/ Du principe des travaux virtuels. 2°/ D'une équation de Lagrange simple

3°/ De deux équations de Lagrange avec un multiplicateur correspondant à la relation entre les positions y_1 et x_2 de M_1 et M_2 dans le repère non orthogonal (O, x, y).

4°/ Les équations : E.H et E.C ***Réponse :***

$$\|\vec{\Gamma}\| = |\ddot{y}_1| = |\ddot{x}_2| = \frac{|m_1 \sin\alpha - m_2|}{m_1 + m_2}$$

IV. HAMILTON ET ÉQUATIONS CANONIQUES

IV.1. ESPACE DES PHASES

Dans la *théorie des équations de Lagrange*, les variables étaient les **n** coordonnées généralisées $\{q_k\}$ du *point représentatif du système (S) matériel* dans l'espace de configuration E_n. Les n équations différentielles du 2ème ordre relatives à ces variables formaient alors les équations de mouvements.

Dans *la théorie d'Hamilton*, on s'intéresse plutôt à l'état mécanique du système, lequel dépend de **2n** variables indépendantes : les **n** coordonnées $\{q_k\}$ de l'espace de configuration E_n et les **n** *moments, généralisées, conjuguées,* $\left\{ p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right\}$.

On appelle *espace des phases* l'espace à 2n dimensions dans lequel un point figuratif représente *l'état mécanique du système*. Ce nombre de variables coïncide évidement avec le nombre des conditions initiales qui caractérisent l'état initial du système : généralement **n** paramètres de position $\mathbf{q_k}$ et **n** paramètres de quantité de mouvement $\mathbf{p_k}$.

On parle de *formalisme Lagrangien* lorsque nous travaillons, avec $(q_k, \dot{q}_k, t)$, dans l'e.V de *configuration E_n* dont $\{q_k\}$ sont les coordonnées généralisées de cette espace.

On parle de *formalisme Hamiltonien* lorsque nous travaillons, avec (q_k, p_k, t), *dans l'espace de phase* $\{q_k, p_k\}$ ie l'e.V de configuration E_{2n}.

Exemples

✍ *Oscillateur harmonique unidimensionnel.*

On a : $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$, x étant l'allongement du ressort.

Là, $q_1 = x \quad et \quad p_1 = m\dot{x}$ (Fig.1, page 19). Ces variables q_1 *et* $p_1 = p_x = m\dot{x}$ sont reliées par l'équation de la conservation de l'énergie mécanique $E_m = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = cste \Leftrightarrow \frac{p_x^2}{2mE_m} + \frac{kx^2}{2E_m} = 1$

Dans l'espace des phases, la trajectoire décrite par le point représentatif de l'état mécanique est donc une ellipse dont les demi-axes $(2mE_m)^{1/2}$ *et* $(2E_m / k)^{1/2}$ qui dépendent de E_m représentent les valeurs maximales x_m et p_m de l'élongation et de la quantité du mouvement (Fig. 4a). Il est commode de réécrire l'équation précédente en

faisant apparaître ces quantités : $\frac{p_x^2}{2mE_m}+\frac{kx^2}{2E_m}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{p_x}{p_m}\right)^2+\left(\frac{x}{x_m}\right)^2=1$ avec $p_m=(2mE_m)^{1/2}$ *et* $x_m=(2E_m/k)^{1/2}$

✌ *Lagrangien point matériel en chute libre.* On a :

$T=\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \quad U=mgz \Rightarrow L(\dot{z},z)=\frac{1}{2}m\dot{z}^2-mgz$, z étant la coordonnée généralisée.

Là, $q_1=z$ *et* $p_1=p_z=m\dot{z}$ (Fig.2, page 20) sont reliées par l'équation de la conservation de l'énergie mécanique $E_m=\frac{p_z^2}{2m}+mgz=cste=mgh$ si initialement p_z=0 et z=h.

Ainsi dans l'espace des phases, la courbe décrite par le point représentatif de l'état mécanique du système est la portion de parabole pour laquelle p_z<0. Notons que la branche positive (p_z>0) correspond à la trajectoire décrite réversiblement, ie en changeant le signe de paramètre d'évolution : le point matériel remonte l'axe vertical à partir de sa position la plus basse avec une vitesse initiale non nulle jusqu, à la hauteur h où sa vitesse est nulle (Fig. 4b).

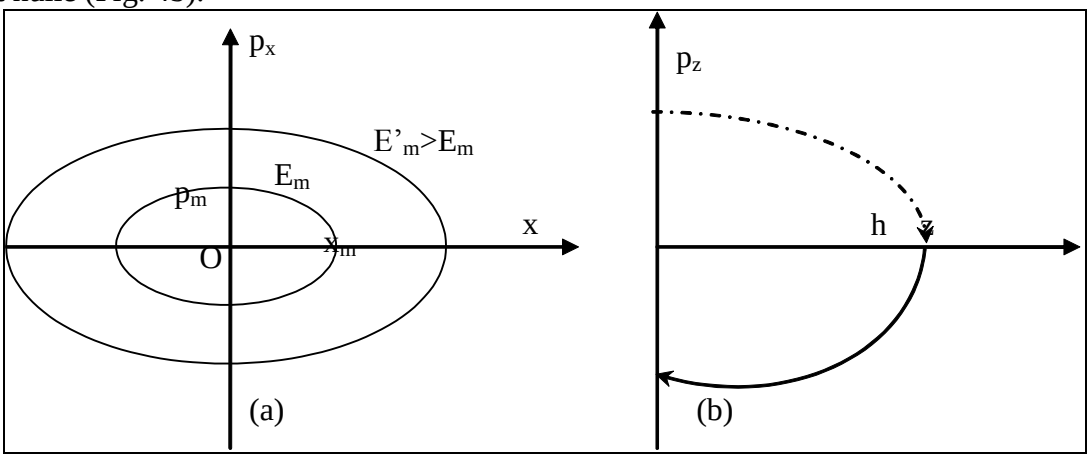


Fig. 4

IV.2. HAMILTONIEN

a. Définition 3 : Pour un système matériel en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, sous l'action de forces extérieurs et intérieures qui dérivent d'une énergie potentiel U(q_k, t), l'hamiltonien est la fonction suivante, dépendant des paramètres de position {q_k}, des moments conjugués {p_k}, et éventuellement du temps t :

$$\boxed{H=\sum_k p_k\dot{q}_k-L=\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=H(q_k,p_k,t)}$$ **[7]**

En effet :

♠ $L=T(q_k,\dot{q}_k,t)-U(q_k,t)=L(q_k,\dot{q}_k,t)$ et $\left\{p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right\} \Rightarrow$ p_k est une fonction linéaire, de premier degré, de $\dot{q}_k \Rightarrow p_k=p_k(q_k,\dot{q}_k,t) \Leftrightarrow \dot{q}_k=\dot{q}_k(q_k,p_k,t)$ car il y'a des relations

linéaire entre $\dot{q}_k$ et p_k. D'où $\boxed{H = \sum_k p_k \dot{q}_k(q_k, p_k, t) - L(q_k, \dot{q}_k(q_k, p_k, t), t) = H(q_k, p_k, t)}$

donc H dépend essentiellement de (q_k, p_k, t).

♠ Cette transformation, très utilisée en thermodynamique, est connue sous le nom de transformation de Legendre (cf. Thermodynamique). Elle permet de passer du Lagrangien, fonction associée aux variables $(q_k, \dot{q}_k, t)$, à l'hamiltonien, fonction d'état des variables (q_k, p_k, t). <u>*En effet :*</u>

- $dL = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_k \left(\dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$ et
- $dH = d\sum_k p_k \dot{q}_k - dL = \sum_k \cancel{p_k d\dot{q}_k} + \dot{q}_k dp_k - \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$
- Soit, puisque $\boxed{p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \; et \; \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \Rightarrow dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt}$ **[8]**

b. <u>Cas des systèmes naturels :</u>

Un <u>*système est dit naturel*</u> si l'énergie potentielle et les contraintes qui lui sont imposées *ne dépendent pas explicitement du temps (il s'agit d'un système lagrangien à liaison scléronome donc conservatif*. Il en résulte que les coordonnées d'un point M quelconque du système ne sont fonctions que des paramètres de configuration $\{q_k\}$: $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(q_k)$.

On en déduit l'expression de la vitesse de M : $\vec{v}_M = \dot{\vec{r}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \quad car \; \overrightarrow{OM} = \vec{r}(q_k)$

et la forme quadratique suivante de l'énergie cinétique :

$$T = \sum_M \frac{1}{2} m_M v_M^2 = \sum_M \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \right) . \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \; où \; a_{ij} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} . \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_j}$$

T ne dépend donc pas explicitement du temps. Comme en outre $U(q_k, t) = U$, il vient :

$$\boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j 2a_{ij} . \dot{q}_j \; et \; \sum_i p_i \dot{q}_i = 2\sum_i \sum_j a_{ij} . \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T \Rightarrow H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = T + U = E_m}$$

Ainsi, l'hamiltonien d'un système naturel s'identifie à son énergie.

IV.3. ÉQUATIONS CANONIQUES (E.C.)

Évaluons, de deux façons, la différentielle de la fonction d'hamiltonien. En considérant H comme une fonction des 2n variables $\{q_k, p_k\}$ et de temps t, on a :

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Si l'on identifie H à l'expression (8) établie précédemment :

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

on en déduit : $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ *et* $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Les 2n premières équations du premier ordre en q_k et p_k sont appelées les équations canoniques du mouvement : $\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad et \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}$ **[9]**

Résumé

Dans le formalisme lagrangien on a : $L = L(q_k, \dot{q}_k, t) \to \{q_k\}$ n variables q_k et n eqs. de 2ème ordre $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ $\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \Leftrightarrow \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ ***E.L.S ⇔***	Ds le formalisme Hamiltonien on a : $H = H(q_k, p_k, t) \to \{q_k, p_k\}$ 2n variables q_k et p_k et 2n eqs de 1er ordre $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$ *et* $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ $\dot{p}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \Leftrightarrow \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ ***⇔ E.C***

Remarque : $dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Exemples

✍ *Particule soumise à une force en une dimension.*

Soit une particule de masse m se déplaçant en une dimension (disons x) et soumise à une force $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Nous savons que son lagrangien est $L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x) \Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$.

On en déduit l'hamiltonien : $H = \dot{x}p_x - L = \left(\frac{p_x}{m}\right)p_x - \frac{p_x^2}{2m} + U \Leftrightarrow H = \frac{p_x^2}{2m} + U(x) = T + U = E_m$

où T est l'énergie cinétique exprimée en fonction des moments. Ici H est, indépendant de temps et est égal à l'énergie mécanique totale, une constante de temps.

- Ainsi, les Eqs.Canonique donneront $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$ *et* $\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$.
- Trivialement $\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = -\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} \Leftrightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F$ qui n'est autre que l'éq. de Newton.

✌ *Particule soumise à une force en 3 dimensions.*

Calculons les équations canoniques d'une particule de masse m se déplaçant en 3 dimensions sous l'influence d'une force $F = -\nabla U(r)$.

- Nous obtiendrons de son lagrangien $L = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x, y, z)$ que :

• Son hamiltonien : $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(r) = T + U = E_m$

• Ainsi, les E.C. donneront (nous regardons celle en x seulement) $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$ *et* $\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$.

• Trivialement $\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = -\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} \Leftrightarrow m\ddot{x} = -(\nabla U)_x = F_x$ qui n'est autre que l'équation de Newton. On vérifie trivialement la même chose pour y et z.

✍ TD - *Série 2*

IV.4. LOIS DE CONSERVATION

a. *Conservation de l'énergie :*

Pour un système matériel naturel, en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, l'hamiltonien H ne dépend pas explicitement du temps. On en déduit :

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E_m = cste}$$

Ainsi, la conservation de l'énergie d'un système naturel est reliée à l'invariance par rapport au temps de l'hamiltonien (ou du lagrangien ou de l'énergie potentielle).

b. *Conservation des moments conjuguées :*

b.1. Variables ignorables

Définition 4 : Lorsque l'une des variables $\mathbf{q_k}$ n'apparaît pas dans l'hamiltonien H, le lagrangien L ou l'énergie potentielle, on dit que cette *variable est cyclique ou ignorable* ou cachée. D'après les équations de Lagrange E.L.S., le moment $\mathbf{p_k}$ associé est alors une constante du mouvement :

$$\boxed{p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \; et \; \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \Rightarrow p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = cste \rightarrow Form.\,lag. \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \dot{p}_k = 0 \Rightarrow p_k = cste \rightarrow Form.\,hamiltonien \end{cases}}$$

On peut supprimer les 2 équations relatives à une variable ignorable. Le système de 2n E.C. se réduit à un système à (2n-2) E.C. (ou (n-1) E.L.S.).

Exemples

✍ *Particule soumise à une force en 3 dimensions. (2ème exemple de la page 29)*

Dans cette exemple, si l'énergie potentielle U(x, y, z) = U(y, z) ne dépendait pas de la variable x ; le moment conjugué p_x, qui s'identifie à la quantité de mouvement de la particule suivant Ox, est donc une constante : $\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = -\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\dot{x} = p_x = cste$.

✍ *Pendule sphérique (Voir TD)*

Un point matériel M de masse m, attaché à une tige OM sans masse de longueur l, se déplace sans frottement dans, un champs de force dérive d'une énergie potentielle Up, une sphère (O, l) avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\varphi}$ suivant l'axe Oz.

1. Déterminer H(M).
2. Écrire ces E.C. en coordonnées sphérique.

✍ Exercices Série 4 (voir solution en TD)

b.2. Intégrale première

Définition 5 : Une fonction scalaire $f = f(q_k, \dot{q}_k, t)$ est une *intégrale première* du mouvement de S (noté I.P.) si, et seulement si, elle est constante pour tout solution qk(t) des équations de mouvements du S ie $f = f(q_k, \dot{q}_k, t) = cste$.

✍ On vient de montrer que la conservation de l'énergie d'un *système naturel* est reliée à *l'invariance* par rapport au temps de l'*hamiltonien* (ou du lagrangien ou de l'énergie potentielle) ie $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = cste$ ***donc pour un système conservatif, l'hamiltonien est une cste de mouvement.***

Système conservatif ⇔ H = cste donc $\boxed{H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = cste}$ c'est ce qu'on appelle *Intégrale de Jacobi* ou encore Intégrale première généralisée.

Remarque : cette propriété s'applique même si $U = U(q_k, \dot{q}_k, t)$

✍ Dans le cas où $U = U(q_k) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ *et* $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$

or $\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = T_1 + 2T_2 \quad avec \quad T = T_0 + T_1 + T_2 \quad (voir\ chap.I,\ cf.\ IV)$

d'où $\boxed{H = T_2 - T_0 + U = cste}$ c'est ce qu'on appelle *Intégrale de Painlevé (I.P.P.).*

✍ Si en plus les liaisons sont scléronomes (indépendantes de temps) $\boxed{\Rightarrow T = T_2 \Rightarrow \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = T_1 + 2T_2 = 2T_2 \Rightarrow H = 2T_2 - (T_2 - U) \Rightarrow H = T + U = E_m}$ c'est ce qu'on appelle *Intégrale première de l'énergie cinétique (notée I.P.Ec.)*

✍ **Condition d'existence de l'intégrale de Painlevé**

L'intégrale de Painlevé existe si :

i. Toutes les liaisons sont parfaites.
ii. Les forces qui travaillent dérivent d'un potentiel U(S).
iii. $\frac{\partial T(S)}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial U(S)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L(S)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{dH(S)}{dt} = \frac{\partial H(S)}{\partial t} = 0$
iv. De plus si les liaisons sont scléronomes (indépendantes de temps) cela entraîne que l'intégrale de Painlevé coïncide avec l'intégrale première de l'énergie cinétique.

Remarques :

i. Un système lagrangien à l.scl. est à énergie mécanique totale conservée E_m=T+U=cste.
ii. Un système conservatif est à hamiltonien conservé $H = T_2 - T_0 + U = cste$.
iii. L'hamiltonien se réduit à l'E_m que dans le cas où les liaisons sont scléronomes.

Exemples :

i. Un système S à pour lagrangien :

$2L = m\dot{x}^2 + m\dot{z}^2 + (A+B)\dot{\theta}^2 + \omega^2\left(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta\right) + m\omega^2 x^2 - 2mgz - C$. A, B, C, ω sont des constantes données. Existe-t-il une intégrale première de Painlevé?

Réponse

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0 \Rightarrow \exists\ d'une\ I.P.P. \Rightarrow 2(T_0+T_1+T_2)-2U=0\text{, d'où}$$

$$m\dot{x}^2+m\dot{z}^2+(A+B)\dot{\theta}^2+\omega^2\left(A\sin^2\theta+B\cos^2\theta\right)+m\omega^2x^2+2mgz=H=cste$$

$$H=T_2-T_0+U=cste \rightarrow I.P.P.$$

ii. Un système S à pour lagrangien L = T – U avec :

$$2T(S/R)=M\left[R^2\dot{\theta}^2+R^2\dot{\varphi}^2+V^2(t)+2R\dot{\varphi}(V(t)\cos\varphi+R\dot{\theta}\sin\varphi)\right]$$

$$U(S/R)=Mg\left(y_{O_1}(t)+R+R\sin\varphi\right)+cste$$

Existe-t-il une intégrale de Painlevé ? Sinon, existe-t-il une intégrale première ? Donner son expression. Que peut-on dire de la variable θ.

Réponse

$\frac{\partial L}{\partial t}\neq 0\ puisque \begin{cases}\frac{\partial U}{\partial t}\neq 0\\ \frac{\partial T}{\partial t}\neq 0\end{cases} \Rightarrow I.P.P.\nexists\quad (n'existe\ pas)$, or $L=L(\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi})\Rightarrow\theta$ variable cyclique $\Rightarrow\ p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=cste \Leftrightarrow M\left(R^2\dot{\theta}+R^2\dot{\varphi}\sin\varphi\right)=cste\rightarrow I.P.$

iii. Reprenons le cas du pendule sphérique, on a montré que le lagrangien s'écrit de la forme : $\begin{cases}L=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+mgl\cos\theta+cste=T-U\\ H=\frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)-mgl\cos\theta-cste=T+U\end{cases}$, car $T=T_2\Rightarrow$ l.scl.

$T=T_2\Rightarrow$ l.scl.$\Rightarrow$ H = E_m = cste c'est l'intégrale première de l'Ec. En plus $L=L(\theta,\dot{\theta},\dot{\varphi})\Rightarrow\varphi$ variable cyclique $\Rightarrow\ p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=cste\Leftrightarrow ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta=cste\rightarrow I.P.P.$

V. PRINCIPE D'HAMILTON OU PRINCIPE DE MOINDRE ACTION (P.M.A.)

Les n équations de Lagrange auxquelles satisfait un système matériel conservatif à n d.d.l. peuvent être formulées de façon variationnelle, comme l'est le *principe de Fermat* en optique géométrique (cf. Optique). Cette formulation est connue en mécanique sous le nom de *principe d'Hamilton*. Son énoncé est le suivant :

V.1. ACTION LAGRANGIEN

Définition 6 : On définit l'action Lagrangienne par $A=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot{q}_i,t)dt$.

Définition 7 : entre deux instants t_1 et t_2, le mouvement d'un système matériel est celui qui réalise une valeur stationnaire de l'action lagrangienne A : $\delta A=0\ avec\ A=\int_{t_1}^{t_2}L(q_i,\dot{q}_i,t)dt$.

Le mot *stationnaire* a la même signification que dans le principe de Fermat. Retenons que, pour toute partie suffisamment petite de la trajectoire réelle, l'action est minimale. Ainsi, ce principe est – il généralement connu sous le nom de *principe de moindre action* (noté P.M.A.)

Définition 8 : P.M.A. : Pour un système Lagrangien, l'action lagrangienne est stationnaire dans le mouvement réel.

Remarque : L'avantage de cette présentation, qui est équivalente aux précédentes vectorielle ou Lagrangienne, est précisément d'établir des liens étroits entre les différentes disciplines de la physique, ici entre la mécanique newtonienne et l'optique géométrique (cf. Optique).

V.2. CALCUL DE LA VARIATION DE A : δA

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \text{ or } \delta L = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \text{ or D.V.} \Rightarrow \text{temps fixe} \Rightarrow \delta t=0.$$

$$\text{D'où } \delta L = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k \right)$$

$$\delta A = \sum_k \left[\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k dt \right] = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q_k}\delta q_k dt + \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\delta q_k)dt$$

$$\text{Or } \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\delta q_k)dt = \sum_k \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)(\delta q_k) \right]_{t_1}^{t_2} - \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)(\delta q_k).dt = -\sum_k \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)(\delta q_k).dt$$

Car M_1 et M_2 sont fixes (par hypothèse) $\Rightarrow \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$ $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0 \Leftarrow D.V.$

$$\text{D'où } \boxed{\delta A = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right]\delta q_k dt = 0 \quad \forall k \quad car \quad E.L.S. \Rightarrow \delta A = 0 \quad P.M.A.}$$

$$\text{Réciproquement si } \boxed{\delta A = 0 \quad \forall (t_1, t_2); \quad \forall \delta q_k \quad P.M.A. \Rightarrow \quad E.L.S.}$$

P.M.A. : Pour S Lagrangien, l'action lagrangienne est stationnaire dans le mouvement réel. δA est nulle dans le mouvement réel signifie que A est minimum.

Enfin, soulignons que : P.F.D⇔E.L.S⇔P.M.A.

V.3. ACTION HAMILTONIENNE:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) \right)dt \Leftrightarrow \delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k p_k \delta \dot{q}_k + \dot{q}_k \delta p_k - \delta H \right)dt$$

$$\text{Or } \int_{t_1}^{t_2} p_k \delta \dot{q}_k dt = \int_{t_1}^{t_2} p_k \frac{d}{dt}(\delta q_k)dt = [p_k(\delta q_k)]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(p_k)(\delta q_k).dt = -\sum_k \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k \delta q_k.dt \; car \; M \; fixe$$

$$\text{Et } \delta H = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\delta p_k \right) car \; D.V.$$

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\left[-\frac{\partial H}{\partial q_k} - \dot{p}_k \right]\delta q_k + \left[\dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right]\delta p_k \right).dt = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right]\delta q_k + \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} - \dot{q}_k \right]\delta p_k \right).dt$$

$$\delta A = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad et \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad E.C.H \text{ se sont les équations canonique d'Hamilton.}$$

E.C.⇒ δA = 0 ; P.M.A. dans l'espace des phases.

Enfin, soulignons que : P.F.D.⇔P.T.V. ⇔E.L.S. ⇔E.C.H.⇔P.M.A.

V.4. APPLICATION

✍ *Équation d'Euler*

En mathématique, il se pose souvent le problème suivant :

Trouver une courbe *(C)* d'équation y=y(x), avec y'=dy/dx, reliant deux points fixes A et B, qui rend extrémale l'intégrale définie par $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x))dx$ dans laquelle F est une fonction de la variable x, de la fonction y(x) et de y'(x) la dérivée de y par rapport à x.

Il est évident que l'intégrale I, après évaluation du membre de droite ne dépend plus de x.

L'intégrale I ne dépend que de la fonction y(x) c-à-d du chemin choisi dans le plan xOy pour aller du point A($x=x_1$) au point B($x=x_2$).

À chaque chemin y_1, y_2, ….est associée une valeur I_1, I_2, …de l'intégrale. Cherchons donc, parmi l'ensemble des courbes y=y(x) qui mène de A à B, celle pour laquelle I est maximale ou minimale ie δI=0 et précisons les conditions que doit vérifier la fonction F pour que I soit extrémale. On montre qu'une Condition Nécessaire et Suffisante (C.N.S.) pour que δI=0 est que $\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \leftarrow C.N.S. \quad pour\ que\ \delta I = 0}$ cette équation porte le nom *d'Équation d'Euler*.

✌ *Courbe brachistochrone = courbe d'une cycloïde*

Sous l'action de la pesanteur seule, un point matériel de masse m glisse sans frottement dans un plan vertical. Quelle est l'équation de la courbe joignant 2 points, O et A, dans le temps le plus court ?

La grandeur à minimiser est évidemment

$$S = \int_O^A dt = \int_O^A \frac{ds}{v} = \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

où la variable x joue encore le rôle du temps et le "lagrangien" est

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

Ici, x est cyclique, ce qui implique la conservation de la grandeur

$$H = y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{-1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}$$

ce qui fournit $y(1+y'^2) = a$ où a est une constante.

On peut résoudre cette équation en donnant une forme paramétrique $y(\theta)$, $x(\theta)$. Pour cela, on pose $u = y'$, ce qui fournit

$$u = \sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

Essayons la fonction d'essai $y = a\sin^2\theta$, c'est à dire $u = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. Alors, $dx = \frac{dy}{u} = \frac{2a\sin\theta\cos\theta d\theta}{u} = a(1 - \cos 2\theta)d\theta$ et on obtient après intégration

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ y &= \frac{a}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une cycloïde.

✌ *Plus petite distance dans un plan = Géodésique*

Quelle est la courbe $y(x)$ qui minimise la distance entre deux points A et B dans un plan ?
L'élément infinitésimal de distance est $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. La grandeur à minimiser est alors

$$S = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ici, la variable x joue le rôle du temps et le "lagrangien" est

$$L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

La variable y est cyclique donc le moment conjugué p_y est constant, c'est à dire

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

On obtient donc que $y' = dy/dx$ est une constante, c'est à dire l'équation d'une droite.

✋ *Lois de Descartes (la lumière prend toujours le chemin le plus court)*

💣 *<u>Cas particulier système scléronomique</u>*

Système scléronomique ⇒ liaisons et énergie potentielle indépendants de temps.

$$H = T + U = E_m = cste \;\; et \;\; L = T - U \Rightarrow L = 2T - E_m$$

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta L.dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(2T).dt = 0 \quad on\ pose \quad A_M = \int_{t_1}^{t_2} 2T.dt \Rightarrow \delta A_M = 0$$

A_M *<u>Action manperérisienne</u>*.

<u>P.M.A.</u> : L'action *<u>manperérisienne</u>* est stationnaire. A_M pour un système lagrangien scléronomique.

VI. ÉQUATION DE LAGRANGE LINÉARISÉ (E.L.L.)

VI.1. DÉFINITION ET CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

<u>Définition :</u> On dit qu'un système (S) décrit par les coordonnées généralisées $\{q_k\}$ est en équilibre/repère (ℛ). si toutes les q_k sont des constantes au cours de temps.

- lorsqu'on parle de q_k ie on a choisit un repère donc la notation d'équilibre est relative / repère (ℛ).

♣ En générale dans un repère Galiléen ; l'équilibre est dit absolu.

♣ Dans un repère qlq (en mouvement/repère absolu) on parlera d'équilibre relatif.

- Il existe une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour l'équilibre d'un système :

♣ **<u>C.N.S</u>**. : le torseur des forces extérieur est nul à toute partie de (S) :

$$\boxed{\left[\vec{F}_e\right]_o = \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = 0 \\ \sum n\eta_o \vec{F}_{ext} = 0 \end{cases}}$$

♣ **<u>C.N</u>**. : il est nécessaire, pour que (S) soit en équilibre, que :

- les obstacles (auxquels S est en contact) sont fixes.
- les liaisons scléronomes (ie indépendantes de temps).

- les liaisons holonomes (ie liaisons géométriques).
- S décrit par *{q_k} indépendants.*

a- SYSTÈME À LIAISONS PARFAITES

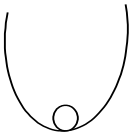
- P.T.V : $\delta W_d + \delta W_l^{'} + \delta W^{''} = 0$. Or (S) en équilibre $\Rightarrow$ $\delta W^{''} = 0$ et liaison parfaite (l.p) $\Rightarrow$ $\delta W_l^{'} = 0$ d'où d'après le P.T.V $\Leftrightarrow$ $\delta W\left(\vec{F}_d\right) = \sum_k Q_k \delta q_k = 0 \; \forall \delta q_k$.

- (S en équilibre et à l.p) $\Leftrightarrow$ $\boxed{Q_k = 0 \;\; \forall k \qquad \textbf{C.N.S. pour l'équilibre}}$ **(1)**

- (1) $\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} Q_1(q_1,.....,q_n) = 0 \\ Q_2(q_1,.....,q_n) = 0 \\ \vdots \\ Q_n(q_1,.....,q_n) = 0 \end{cases}}$ système à n équations à n inconnues avec $\boxed{Q_k = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k}}$.

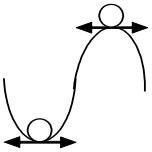
♣ En générale, nous avons un nombre fini de solutions {q_k} qui sont les positions d'équilibre.
♣ Dans certain cas, on peut avoir un ensemble infinie de solutions : dans ce cas on parle ***<u>d'équilibre indifférent</u>***.

<u>Exemple :</u>

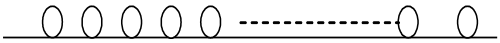


une seule position d'équilibre

une infinité des positions d'équilibre



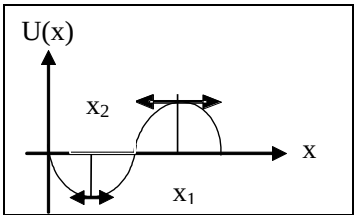
2 positions d'équilibre



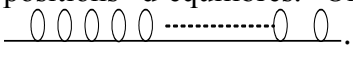
- Lorsque les forces données dérivent d'un potentiel U : $Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$ donc ***<u>les positions d'équilibre rendent U stationnaire</u>***.$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0}$ **(2)** $\rightarrow$ q_k **(C.N.S)**

<u>Exemple :</u>

- **<u>1er cas</u>** d'une seule coordonnée généralisée x $\Rightarrow$ U = U(x).



On a 2 valeurs de x qui rendent U stationnaire $\Rightarrow$ 2 positions d'équilibres.

- **<u>2ème cas</u>** U = cste $\Rightarrow$ ($\forall q_k$) $\dfrac{\partial U}{\partial q_k} = 0$ donc toutes les positions d'équilibre q_k sont des positions d'équilibres. On dit qu'il y a des positions d'équilibre indifférent :  .

<u>Ce qu'il faut savoir</u>

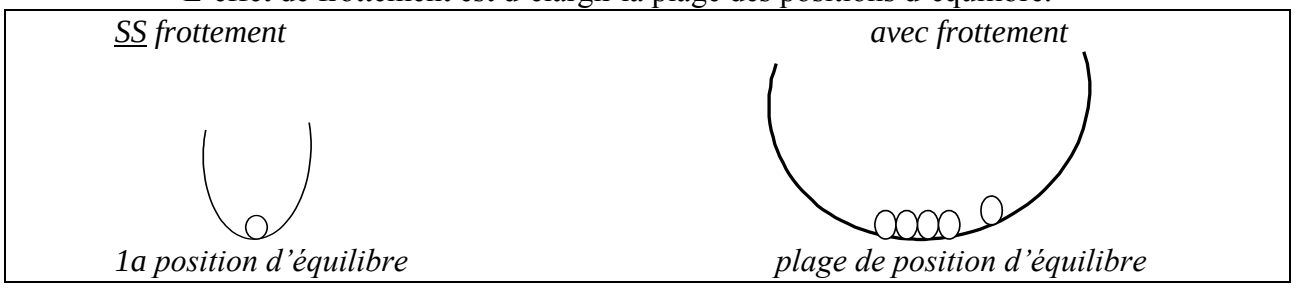
2 méthodes pour déterminer les positions d'équilibre $\overline{q}_e$ d'un système S décrit par les {q_k} :

1- q_k = cste dans les équations du mouvement de S $\rightarrow$ $\overline{q}_e$

2- $\overline{q}_e$ solution de l'équation $\dfrac{\partial U}{\partial q_k} = 0$, lorsqu'on dispose de l'expression de l'énergie potentiel.

b- SYSTÈME AVEC FROTTEMENTS :

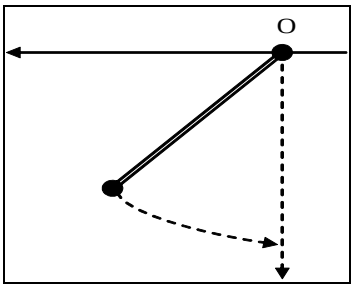
- (S) soumis à des forces de résistances passives
- si il y'a frottement sur les parois, on aura une plage de position d'équilibre.
- L'effet de frottement est d'élargir la plage des positions d'équilibre.



- on a 2 type de frottement : solide - solide où fluide – solide.

<u>Exemple :</u> Pendule d'une horloge.

- Pendule soumis à 2 types de frottement :
  - L'effet de la résistance de l'air (qui a pour effet de freiné le mouvement de pendule) frottement visqueux.
  - Frottement solide – solide qui a pour effet d'élargir les positions d'équilibres en O.



VI.2. CAS DES SYSTEMES CANONIQUES

On suppose que l'origine est une position d'équilibre $\overline{q}_e = \overline{0}$.

VI.2.1. DÉFINITION ET LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Soit (S) un système mécanique à liaison holonomes (l.h), scléronomes (Scl.), parfaites et à forces conservatives avec le lagrangien indépendant explicitement de temps ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$). Un tel système, est un système canonique.

- Nous choisissons n coordonnées généralisées q_k indépendantes.
- Soit le mouvement de (S) décrit par les q_k indépendantes.
- Considérons maintenant l'Ec : $T(\bar{q},\dot{\bar{q}}) = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ (c'est une forme quadratique des vitesses généralisées car l. Scl). $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\bar{q})$ car α_{ij} est une fonction de q_k d'autre part $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ donc $T(\bar{q},\dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}(\bar{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$.
- On suppose que $U(\bar{0}) = 0$, ie l'origine $\bar{0}$ est position d'équilibre stable ie M.L.S., et on va s'intéresser aux <u>*petits mouvements*</u> (P.M) du système au voisinage de sa position d'équilibre (V $\bar{0}$). Pour cela on choisit ε tel que :
  - Soit ε>0 / $\{\|\bar{q}\| \langle \varepsilon,\ \|\dot{\bar{q}}\| \langle \varepsilon\}$. $U(\bar{q})$ dépend de $\bar{q}$ et α_{ij} aussi.
  - Développement de Taylor :
    - $\alpha_{ij}(\bar{q}) = \alpha_{ij}(\bar{0}) + \theta(\varepsilon)$
    - $U(\bar{q}) = \underbrace{\cancel{U(\bar{0})}}_{\text{car U stationnaire } =0} + \sum_i \underbrace{\cancel{\frac{\partial U}{\partial q_i}(\bar{0})}}_{=0 \text{ car } \bar{0} \text{ position d'équilibre}} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(\bar{0}) q_i q_j + \theta(\varepsilon^3)$
- D'où :
  - $T(\bar{q},\dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}(\bar{0})\dot{q}_i\dot{q}_j + \theta(\varepsilon^3)$, on pose $\alpha_{ij}(\bar{0}) = a_{ij}$
  - $U(\bar{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(\bar{0}) q_i q_j + \theta(\varepsilon^3)$, on pose $\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}(\bar{0}) = b_{ij}$

- Soient :
  - $\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ énergie cinétique réduite.
  - $\tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij} q_i q_j$ énergie potentielle réduite.
  - On définit le lagrangien réduit par $\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U}$.

- On choisit $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ matrice symétrique définit positive et $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ matrice symétrique.

$$L(\bar{q},\dot{\bar{q}})=\tilde{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}})+\theta(\varepsilon^3)$$

$$L_i:\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i}+\theta(\varepsilon^3)=0\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}q_j+\theta(\varepsilon^3)=0$$

La linéarisation des équations de Lagrange consiste à se limiter à des termes de 1er ordre : (A.P.M) on obtient donc $L_i:\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ddot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}q_j=0$ *i fixe et j = 1→n.* $A=(a_{ij})$ *et* $B=(b_{ij})$

Approximation des Petits Mouvements (A.P.M) : $A\ddot{\bar{q}}+B\bar{q}=\bar{0}\rightarrow E.L.L$ **(1)**

VI.2.2. RÉDUCTION À LA FORME CANONIQUE DES E.L.L

VI.2.2.1. RAPPEL D'ALGÈBRE

Définition : On appelle transformation orthogonale de $\Re^n$ toute application linéaire bijective $f\ :\ \Re^n\rightarrow\Re^n$ *tel que la matrice associée P vérifie* ${}^tP.P=I\Leftrightarrow{}^tP=P^{-1}$.

Théorème : Toute forme quadratique $F=\sum_{i,j}a_{ij}q_iq_j$ *associe à une matrice* $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ *symétrique peut être réduite au moyenne d'une transformation orthogonal, de matrice P, à la forme canonique* $F=\sum_i a'_i(q'_i)^2$. P *est dite matrice de passage tel que* ${}^tP=P^{-1}$.

$$[\bar{q}]\rightarrow[\bar{q}']=P^{-1}[\bar{q}]={}^tP.[\bar{q}]\Rightarrow[\bar{q}]=P.[\bar{q}']\ et\ {}^t[\bar{q}]={}^tP.{}^t[\bar{q}']={}^t[\bar{q}'].{}^tP.$$

D'où $F={}^t\bar{q}.A.\bar{q}=({}^t\bar{q}'.{}^tP).A.(P.\bar{q}')={}^t\bar{q}'.({}^tP.A.P).\bar{q}'={}^t\bar{q}'.A'.\bar{q}'$ $\boxed{\Rightarrow A'={}^tP.A.P}$

A' est diagonale $A'=(a'_i)$. Si en plus A définit positive ⇒ $a'_i\rangle 0$ dans ce cas on dit que <u>A matrice fondamentale</u> (car F fondamentale) ie <u>définit positive symétrique</u>.

VI.2.2.2. RÉDUCTION DE $\tilde{T}$

- $\tilde{T}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ forme quadratique et $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ matrice fondamental, par conséquent on peut appliquer le théorème : donc il ∃ F transformation orthogonal (de matrice P_1) tel que : $\boxed{\begin{array}{l}F:A\xrightarrow{P_1}A'=diag[a'_i]\\ q_i\xrightarrow{P_1}q'_i\end{array}}$ et donc $\tilde{T}$ devient

$$\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \xrightarrow{P_1} \tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_i a'_i(\dot{q}'_i)^2 \;\; avec\; a'_i \rangle 0 \cdot$$ D'où

$$\boxed{\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_i a'_i(\dot{q}'_i)^2}.$$

- Nous allons effectuer une 2ème transformation linéaire qui va faire passer $\boxed{\begin{array}{l} q'_i \xrightarrow{P_2} q''_i = q'_i\sqrt{a'_i} \quad i\; fixe \\ A' \xrightarrow{P_2} I = {}^tP_2.A'.P_2 \end{array}}$. L'intérêt de cette transformation c'est de rendre les cœfficients $a'_i = 1$. Donc $\boxed{\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_i a'_i(\dot{q}'_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i(\dot{q}''_i)^2}$

<u>*En résumé*</u>

$$-\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \xrightarrow{P_1} \tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_i a'_i(\dot{q}'_i)^2 \xrightarrow{P_2} \tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_i(\dot{q}''_i)^2$$

$$-A \xrightarrow{P_1} A' \xrightarrow{P_2} I$$

$$-\bar{q} \xrightarrow{P_1} \bar{q}' \xrightarrow{P_2} \bar{q}'' = \bar{q}'\sqrt{a'_i} \quad avec\; A' = {}^tP_1.A.P_1 \quad et\; I = {}^tP_2.A'.P_2$$

VI.2.2.3. RÉDUCTION DE $\tilde{U}$

$\tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}q_iq_j$: faisant subir à $\tilde{U}$ les transformation orthogonales P_1 et P_2.

$$-\tilde{T}\#: A \xrightarrow{P_1} A' \xrightarrow{P_2} A'' = I$$

$$-\tilde{U}\#: B \xrightarrow{P_1} B' \xrightarrow{P_2} B'' = \Lambda \quad avec\; \Lambda = [\lambda_i]$$

But : Diagonaliser A et B moyennant la transformation P_1oP_2=P.

$$-\tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}q_iq_j \xrightarrow{P_1} \tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_i b'_i(q'_i)^2 \xrightarrow{P_2} \tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i(q''_i)^2$$

- Soit $\bar{r} = \bar{q}'' \Rightarrow r_i = q''_i \quad i = 1 \to n$. On part de $\boxed{A\ddot{\bar{q}} + B\bar{q} = \bar{0}}$ $\Leftrightarrow \sum_{ij} a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{ij} b_{ij}q_j = 0$ et on arrive à $\ddot{r}_i + \lambda_i r_i = 0$ $\boxed{ou\; \ddot{\bar{r}} + \Lambda\bar{r} = \bar{0}}$

(2) ***<u>système non couplé.</u>***

Ce qu'il faut savoir

A.1. méthodes pour déterminer les E.L.L

1ère méthode

Lorsqu'on dispose des équations de mouvements, les E.L.L s'obtiennent directement de ces dernières :

- en considérant q_i *et* $\dot{q}_i$ *comme infiniment petits ie* $|q_i| \langle\langle 1$ *et* $|\dot{q}_i| \langle\langle 1$.

- en effectuant un D.L au $V_{\bar{q}_e=\bar{0}}$ *dans les équations du mouvement et on ne garde que les termes du 1er ordre/ à* q_i, $\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i$.

2ème méthode

- L'Ec réduite $\tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ est obtenue en faisant un D.L au $V_{\bar{q}_e=\bar{0}}$ *et on ne garde que les termes quadratiques en* $\dot{q}_i$.

- De même l'Ep réduite $\tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} b_{ij}q_iq_j$ est obtenue en faisant un D.L au $V_{\bar{q}_e=\bar{0}}$ *et on ne garde que les termes quadratiques en* q_i.

A.2. Réduction à la forme canonique des E.L..L

$$-\ q \xrightarrow{P_1} q' \xrightarrow{P_2} q'' \xrightarrow{I=P_3} r \quad \Leftrightarrow q \xrightarrow{P=P_1oP_2oP_3} r$$

$$-\ \tilde{T} = \frac{1}{2}\sum_i (\dot{r}_i)^2 \ et\ \tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_i \lambda_i (r_i)^2 \ ceci\ moyennant\ la\ transformation\ P = P_1oP_2oP_3.$$

- Les équations de mouvements s'écrivent donc $\ddot{r}_i + \lambda_i r_i = 0$ *i fixe allant de 1 à n.*

- Sous forme matricielle $\ddot{\bar{r}} + \Lambda\bar{r} = \bar{0}$.

- Donc le système $A\ddot{\bar{q}} + B\bar{q} = \bar{0} \xrightarrow{se\ transforme\ P} \ddot{\bar{r}} + \Lambda\bar{r} = \bar{0}$

VI.2.2.4. AUTRE MÉTHODE

Qui permet d'aboutir au système d'équations découplées (2) :

- A fondamental $\Rightarrow \exists\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1}\left[A\ddot{\bar{q}} + B\bar{q} = \bar{0}\right] = \ddot{\bar{q}} + A^{-1}B\bar{q} = \bar{0}$.
- Si on admet que $A^{-1}B$ est diagonalisable $\Rightarrow \exists$ P / $P^{-1}\left(A^{-1}B\right)P = \Lambda\ diag.\ et\ \bar{q} = P.\bar{r}\ car\ \bar{r} = P^{-1}\bar{q}.$
- $\bar{q} \xrightarrow{P} \bar{r} \Rightarrow P.\ddot{\bar{r}} + \left(A^{-1}B\right)P.\bar{r} = \bar{0} \Rightarrow P^{-1}P.\ddot{\bar{r}} + P^{-1}\left(A^{-1}B\right)P.\bar{r} = \bar{0} \Leftrightarrow \ddot{\bar{r}} + \Lambda.\bar{r} = \bar{0}$

avec $P^{-1}\left(A^{-1}B\right)P = \Lambda$.

- r_i est appelé coordonnée normale.
- $\Lambda = [\lambda_i]$, λ_i valeur propre de système (les λ_i sont des valeurs réelles).
- On a donc découplage des équations de mouvements avec les coordonnées normales.

VI.3. INFLUENCES DES FORCES DISIPATIVES

<u>Définition :</u> Les forces de dissipation sont des résistances passives qui sont toujours opposés à la vitesse $\Rightarrow$ forcement travail négatif. $\vec{v} \leftarrow \cdots \bullet \cdots \rightarrow \vec{F} = -k\vec{v}$

Se sont donc des forces associées à des matrices $D = \lfloor d_{ij} \rfloor$ symétriques et qui sont toujours opposés à la vitesse.

VI.3.1. ÉQUATIONS AUX PETITS MOUVEMENTS : E.P.M

Considérons un système canonique (S) soumis à des forces dissipatives généralisées, supposé force linéaire de vitesse généralisée (Fce de frottement visqueux/fluide).

- $Q_{dis,i} = -\sum_j d_{ij}\dot{q}_j \Leftrightarrow Q_{dis,i} = -D.\dot{\bar{q}}$ *où* $D = \left[d_{ij}\right]$ *avec* $d_{ij} = d_{ji} \Rightarrow D = {}^tD$, donc D symétrique.
- Le signe (-) car force de résistance passive.
- Les forces conservatives Q_{cons} dérivent d'une énergie potentielle U avec L=T-U.

$$L_i : \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\sum_j d_{ij}\dot{q}_j \text{ , } i \text{ fixe et } j = 1 \cdots n$$

- Dans l'A.P.M, on peut l'écrire sous la forme : $L_i : \sum_j a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_j d_{ij}\dot{q}_j + \sum_j b_{ij}q_j = 0$

D'où $\boxed{A\ddot{\bar{q}} + D\dot{\bar{q}} + B\bar{q} = \bar{0}}$ **(6)**

(6) est appelé E.L.L d'un système canonique soumis à des forces dissipatives

- On peut introduire une fonction appelé *<u>fonction de dissipation de Rayleigh</u>* définie (forme quadratique) par :

$$\boxed{\phi = \frac{1}{2}\sum_{ij} d_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \Rightarrow Q_{dis,i} = -\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\dot{q}_j = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i} \text{ avec } \phi = \frac{1}{2}{}^t\dot{\bar{q}}D\dot{\bar{q}}}$$

<u>Remarque :</u>

Comme on ne peut pas diagonaliser les 3 matrices A, B, D en même temps (ie en utilisant une seule matrice de passage), on va chercher une solution particulière $\bar{q} = \bar{q}_0 e^{st}$ où s est un nombre complexe.

- $\bar{q} = \bar{q}_0 e^{st}$ solution particulière tel que s racine complexe. $\bar{q} = \bar{q}_0 e^{st}$ dans (6) on obtient $\left(s^2A + sD + B\right)\bar{q}_0 = \bar{0} \Rightarrow P(s) = \det\left(s^2A + sD + B\right) = 0$ puisque $\bar{q}_0 \neq \bar{0}$

D'où $\boxed{P(s) = \det\left(s^2A + sD + B\right) = 0}$ **(7)**

- P(s)=P_{2n}(s) : *<u>équation caractéristique du système (S),</u>* de degré p=2n où n est le nombre de coordonnées généralisées du système étudié.

- Les cœifficients de P(s) sont réels $\Rightarrow$ ses √, racines, sont soient réelles, soient complexes conjuguées 2 à 2.
- Les √ s_k de P(s) sont appelé encore V_p (Valeur propre) du système tq $\boxed{\forall k = 1 \cdots 2n,\ s_k = \sigma_k + i\omega_k}$ **(8)** dont $\boxed{\mathrm{Re}(s_k) = \sigma_k ; \mathrm{Im}(s_k) = \omega_k}$

VI.4. INFLUENCES DES FORCES GYROSCOPIQUES

<u>Définition :</u> Les forces gyroscopiques sont des vecteurs qui sont tjrs ⊥ à la vitesse ⇒ $dW_{gyr} = 0$.

- Se sont des forces associées à des matrices $G = \lfloor g_{ij} \rfloor$ antisymétrique et qui sont toujours perpendiculaire à la vitesse avec ${}^tG = -G \Leftrightarrow g_{ij} = -g_{ji}$

- Les forces gyroscopiques sont données par $Q_{gyr,i} = -\sum_{j=1..n} g_{ij}\dot{q}_j = -G.\dot{\bar{q}}\ car\ G = \lfloor g_{ij} \rfloor$ antisymétrique.

- Considérons un système canonique soumis à des forces gyroscopiques et écrivons ses équations de Lagrange linéarisées au voisinage de la position d'équilibre $\bar{q} = \bar{q}_e = \bar{0}$.

- Dans l'A.P.M, on peut l'écrire sous la forme : $L_i : \sum_j a_{ij}\ddot{q}_j + \sum_j g_{ij}\dot{q}_j + \sum_j b_{ij}q_j = 0$

- Que l'on peut écrire sous forme matricielle : $\boxed{A\ddot{\bar{q}} + G\dot{\bar{q}} + B\bar{q} = \bar{0}}$ **(9).**

(9) c'est les E.L.L en présence des forces gyroscopiques

- Cherchons une solution particulière de la forme $\bar{q} = \bar{q}_0 e^{st}$ où s est un nombre complexe, ce qui donne l'équation caractéristique : $\boxed{P(s) = \det\left(s^2 A + sG + B\right) = 0}$ **(10).**

- On sait que ${}^tG = -G,\ {}^tA = A,\ {}^tB = B$ car G est antisymétrique et A, B sont symétriques.

$$P(s) = \det\left({}^t\left(s^2 A + sG + B\right)\right) = \det\left(s^2\,{}^tA + s\,{}^tG + {}^tB\right) = \det\left(s^2 A - sG + B\right) = P(-s) = 0$$

Par conséquent, si (s) est racine de P(s), (-s) l'est aussi ⇒ P(s) ne contient que les puissances paires de (s) : $\boxed{P_{2n}(s) = \sum_{i=0}^{n} P_{2i}s^{2n-2i} = P_0 s^{2n} + P_2 s^{2n-2} + P_4 s^{2n-4} + \cdots + P_{2n} = 0}$ **(11).**

- Changeant de variable et posons $u=s^2$ ⇒ réduction de degré de P(s) de 2n à n et donc on aura :

$$P_{2n}(s) = Q_n(u) = \sum_{i=0}^{n} P_{2i} s^{2n-2i} = P_0 u^n + P_2 u^{n-1} + P_4 s^{n-2} + \cdots + P_{2n} = 0 \quad \textbf{(12).}$$

VI.4.. CE QU'IL FAUT SAVOIR

A- Système canonique

Soit (S) un système mécanique. $\overline{0}$ *est une position d'équilibre.* $\overline{q} = (q_i)_{i=1...n}$ *variables indépendantes.*

Les E.L.L au $V_{\overline{q}_e = \overline{0}}$ *s'écrivent* $A\ddot{\overline{q}} + B\overline{q} = \overline{0}$ *avec A symétrique Définit positive >0 et B symétrique. Soit le polynôme caractéristique* $P(\lambda) = \det(B - \lambda A) = 0$ *et* $\{\lambda_k\}_{i=1..n}$ *les racines réelles de P(λ)*

B- Influences des forces dissipatives

Soit (S) un système mécanique. $\overline{0}$ *est une position d'équilibre.* $\overline{q} = (q_i)_{i=1...n}$ *variables indépendantes.*

$$Q_{dis,i} = -\sum_j d_{ij}\dot{q}_j = \vec{F}.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \Leftrightarrow \delta W(\vec{F}) = \vec{F}.\delta\vec{A} = Q_{dis,i}.\delta q_i$$

En présence des <u>*forces dissipatives*</u> *les E.L.L au* $V_{\overline{q}_e = \overline{0}}$ *s'écrivent* $A\ddot{\overline{q}} + D\dot{\overline{q}} + B\overline{q} = \overline{0}$ *avec A symétrique Définit positive >0 et B et D symétriques.*

- On peut introduire la fonction de dissipation de Rayleigh :

$$\phi = \frac{1}{2}\sum_{ij} d_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \Rightarrow Q_{dis,i} = -\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\dot{q}_j = -\frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i} \; avec \; \phi = \frac{1}{2}{}^t\dot{\overline{q}}D\dot{\overline{q}}$$

- Soit le polynôme caractéristique $P(s) = \det(s^2 A + sD + B) = 0$ *et s racine complexe,* $\forall k = 1 \cdots 2n, s_k = \sigma_k + i\omega_k$ *avec n=nb de coordonnée généralisée, de P(s) alors :*

- Si $s_k = \sigma_k + i\omega_k$ *est une racine simple :* $\overline{q}_k = \overline{q}_0 e^{s_k t} = \overline{q}_0 e^{\sigma_k t} e^{i\omega_k t} \Rightarrow \|\overline{q}_k\| = \|\overline{q}_0\| e^{\sigma_k t}$

- s'appelle p.m. propre de (S).

- Si s_k *est une racine multiple :* $\overline{q}_k = \overline{q}_0 e^{s_k t} \times P_{2n-1} \Rightarrow \|\overline{q}_k\| = \|\overline{q}_0\|.e^{\sigma_k t}.\|P_{2n-1}\|$

- La solution générale est une combinaison linéaire des p.m. propres $\{q_k\}$: $\overline{q} = \sum_k \overline{q}_k$

C- Influences des forces gyroscopiques

Les Fgyr sont données par $Q_{gyr,i} = -\sum_{j=1..n} g_{ij}\dot{q}_j = -G.\dot{\overline{q}} \; car \; G = \lfloor g_{ij} \rfloor$ antisymétrique.

- en présence des Fgyr les E.L.L s'écrivent donc de la forme $A\ddot{\overline{q}} + G\dot{\overline{q}} + B\overline{q} = \overline{0}$

- *Soit le polynôme caractéristique* $P(s) = \det\left(s^2 A + sG + B\right) = 0$ et comme (s) et (–s) sont √ de P(s) alors

$$P_{2n}(s) = Q_n(u) = \sum_{i=0}^{n} P_{2i} s^{2n-2i} = P_0 u^n + P_2 u^{n-1} + P_4 s^{n-2} + \cdots + P_{2n} = 0$$

Références

Les notes couvrent une partie de ce qui est traité dans les volumes suivants et ceux-
peuvent être utilisés à titre complémentaire.

- Classical Mechanic, H. Goldstein, 2 édition, Addison-Wesley (1980).
- Mécanique, L. Laudau et E. Lifchitz, 4e édition, Éditions MIR.
- P. Brousse, Mécanique Analytique : Puissance virtuelle, équations de Lagrange : Applications, édition Vuibert.
- M. Mantion : Pb de mécanique analytique, question de stabilité, édition Vuibert.
- Série Schaum, Théorie et application de la mécanique générale.
- Berkley, cours de physique, volume 3, collection U, Armand colin.
- J.-P. Pérez, Mécanique fondement et applications avec 300 exercices et Pbs résolus, Masson, 5ème édition.
- Cours de physique par R. Feynman et coll., 5 volumes, sous la marque Interéditions.
- Physique, par J. Kane et M. Stemheim 1997, nouvelle présentation de l'ouvrage paru sous la marque interéditions, 800 pages.
- D. Sivoukhine, Cours de physique générale. vol. 1: mécanique, ´ Editions Mir, Moscou, 1982.
- M.R. Spiegel, Théorie et applications de la mécanique générale, Collection Schaum, McGraw-Hill,1972.