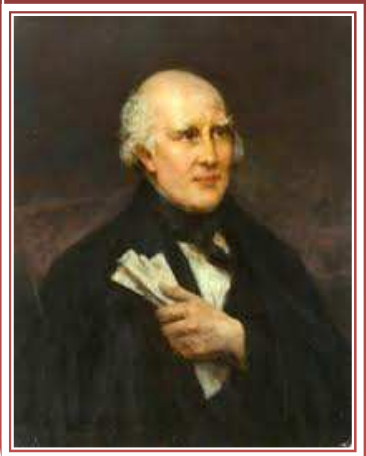
MECANIQUE ANALYTIQUE
SMP5



Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 département de physique
Faculté des sciences
Agadir
email: r.mesrar@uiz.ac.ma

CHAPITRE 2 : PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES
Equations de Lagrange

Préambule

« Les équations de Lagrange donnent souvent une mise en équation systématique et plus rapide que les théorèmes généraux. En revanche, elles sont d' un emploi moins commode lorsqu'il s'agit de déterminer les actions de liaison. Par ailleurs, leur connaissance parfaite est absolument indispensable à tout ingénieur et plus généralement à tout physicien ».

Objectifs pédagogiques

- Introduire la notion de vitesse virtuelle
- Comprendre le principe des puissances virtuelles
- Etablir les équations de Lagrange simples (ELS)
- Etablir les équations de Lagrange avec multiplicateurs (ELM)

CHAPITRE 2 : PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES
Equations de Lagrange

Notions abordées

- Paramétrage d'un système
- Paramètres de configuration-coordonnés généralisées
- Liaison holonome
- Liaison non holonome
- Liaison principale ou primitive
- Liaison complémentaire ou supplémentaire

Notions abordées - suite

- Vitesse généralisée
- Principe des puissances virtuelles
- Champ de vitesses virtuelles (CVV)
- Mouvement virtuel rigidifiant
- Forces généralisées
- Fonction de force

Notions abordées - fin

- Equations de Lagrange simples (ELS)
- Equations de Lagrange avec multiplicateurs (ELM)

PLAN DU CHAPITRE 2

1- Cinématique
2- Puissances galiléennes réelles
3- Puissance virtuelle
4- Fonction de force
5- Théorème de l'énergie cinétique
6- Théorème de D'Alembert
7- Dérivation des équations de Lagrange

§-1-

Cinématique

§-1-1

Etude des liaisons

Paramétrage d'un système

On appelle <u>paramètres de configuration</u> <u>ou coordonnées généralisées</u> d'un système, un ensemble de n paramètres $(q_i)_{i=1,\ldots,n}$ **nécessaire pour déterminer la position de tous les points et tous les solides du système à un instant t donné.**

<u>Exemples</u>

-Les paramètres de configuration d'un point matériel P en mouvement dans l'espace sont les coordonnées (x, y, z) par rapport à un repère (R_0): 3 paramètres de position.

-Les paramètres de configuration d'un solide indéformable, sont donnés par la position d'un point particulier P du solide et par les trois angles d'Euler.

Liaison holonome - Liaison non holonome

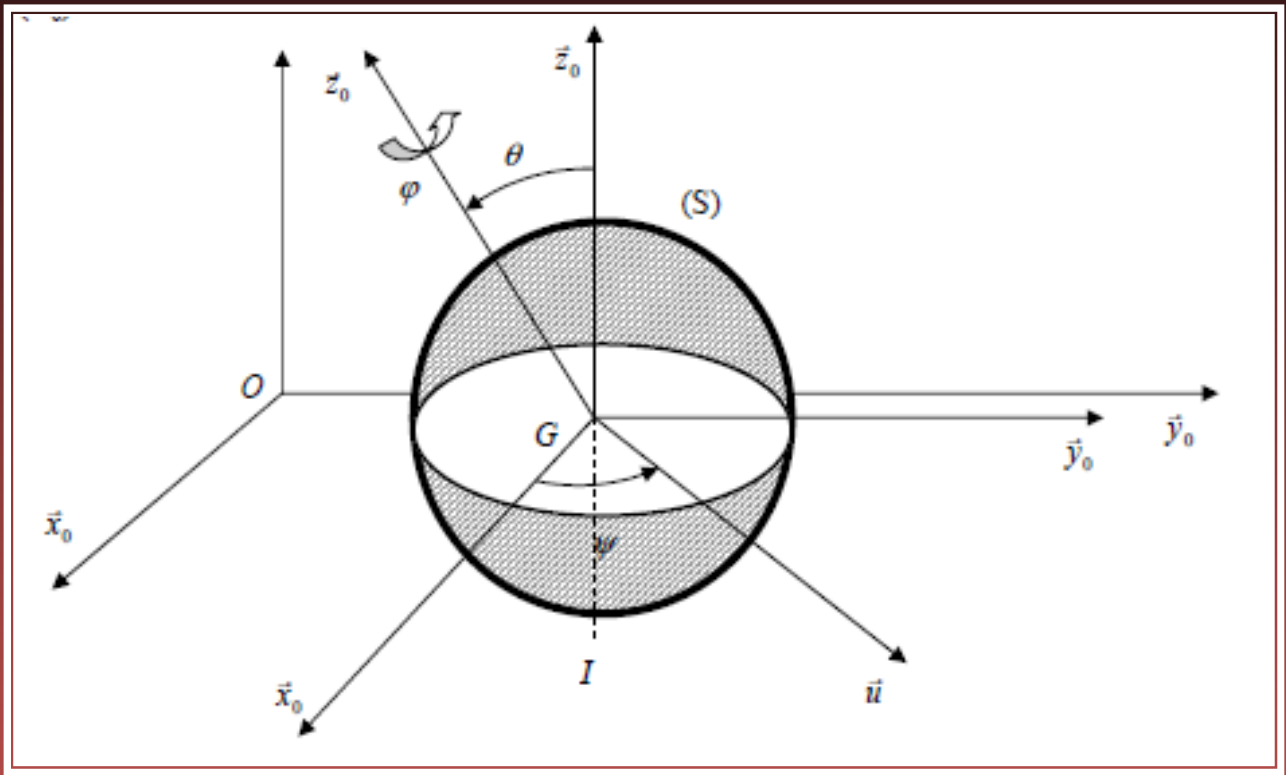
D'une manière générale les points matériels et les solides ne sont pas libres, mais soumis à des liaisons constituant des contraintes limitant leurs mouvements. Il est essentiel de tenir compte de ces liaisons dans le choix du paramétrage.

1- Liaison holonome (géométrique)

Une liaison est dite holonome si elle se traduit par une relation entre les paramètres de configuration q_i et éventuellement le temps t, elle est de la forme :

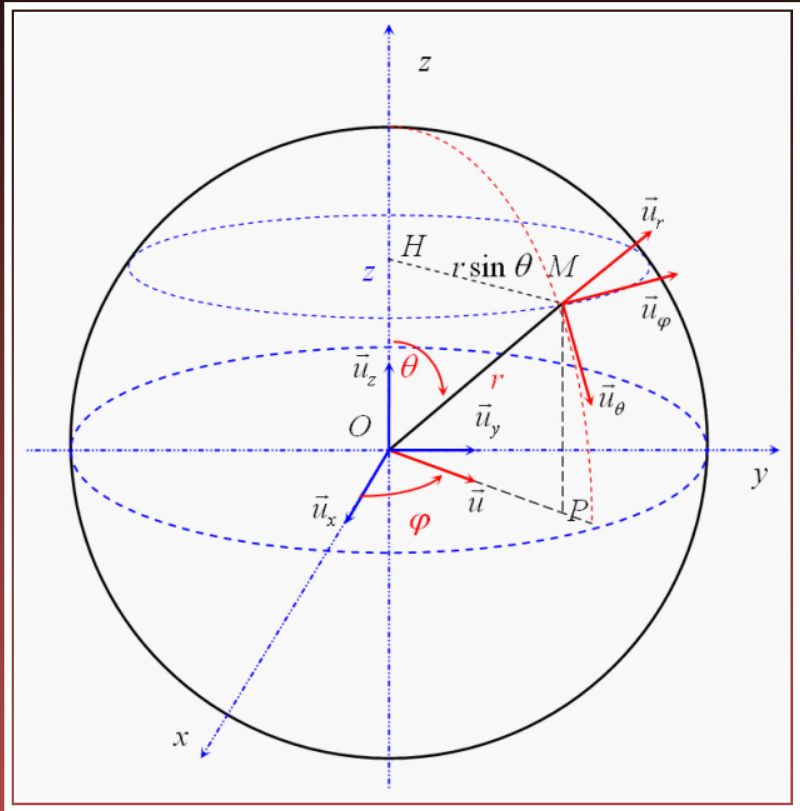
$$f(q_i, t) = 0$$

Exemple 1: sphère qui roule sur un plan fixe



A chaque instant la cote du centre d'inertie G de la sphère vérifie l'équation de liaison z = R soit f(q ,t) = z – R = 0

Exemple 2: bille qui roule à l'intérieur d'une sphère de rayon r



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$q = (x, y, z)$$

$$f(q_i, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

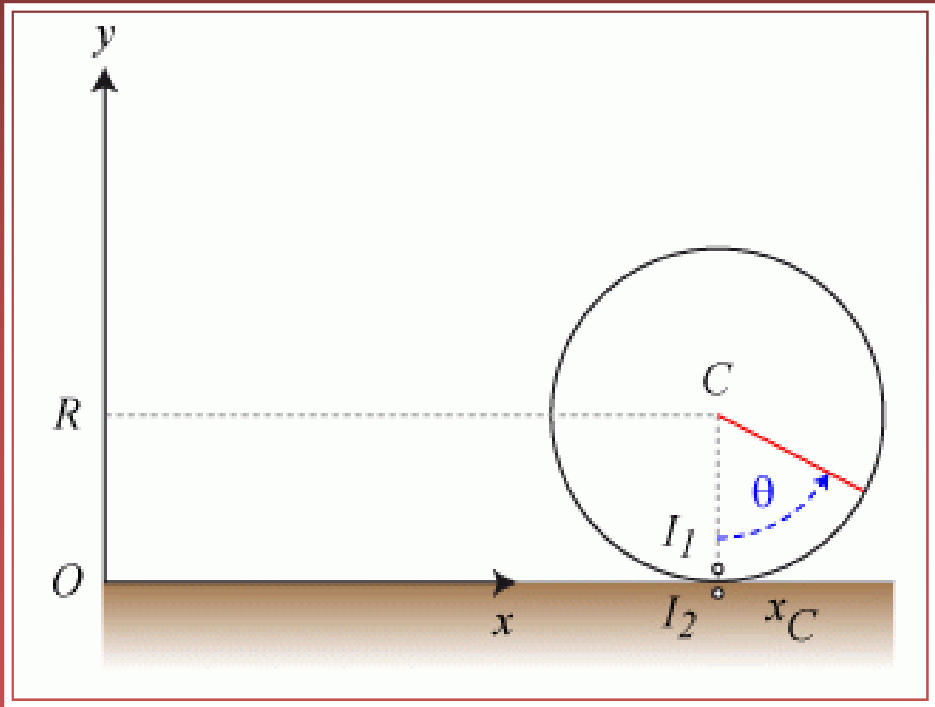
$$\Leftrightarrow f(q_i, t) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \text{ équation de liaison holonome}$$

2- Liaison non holonome (cinématique)

Une liaison est dite non holonome si elle se traduit par une relation entre les paramètres de configuration q_i, leurs dérivées par rapport au temps et éventuellement le temps t, elle est de la forme :

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$$

Exemple: disque qui roule sur un axe (Ox)



$$Paramètres\ de\ configuration:$$

$$q = (x_C, y_C, \theta)$$

$$Equations\ de\ liaison$$

$$y_C - R = 0\ \ (liaison\ holonome)$$

$$\dot{x}_C + R\dot{\theta} = 0\ \ (liaison\ non\ holonome)$$

$$(CRSG)$$

3- Liaison semi-holonome

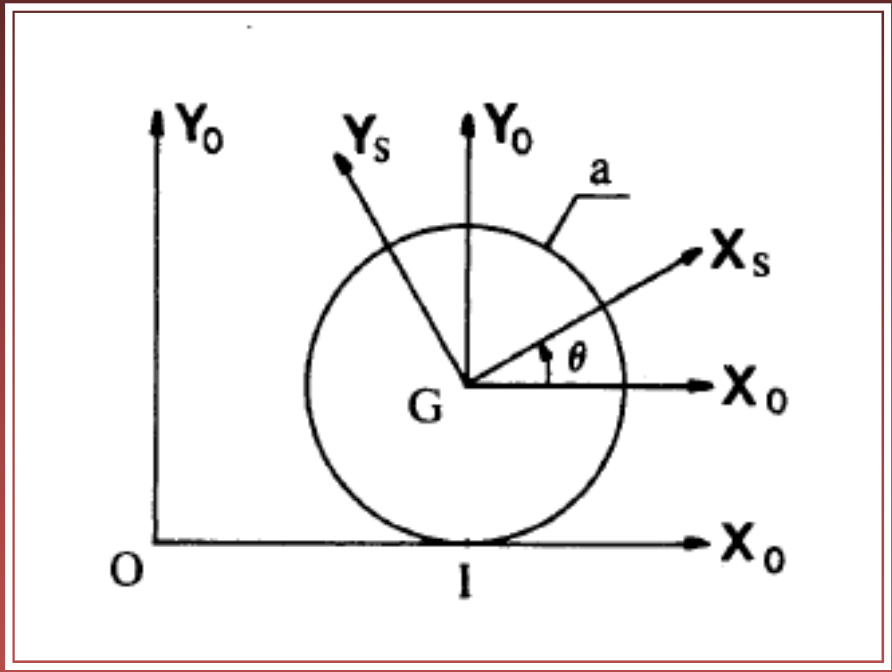
Il se peut qu'une équation de liaison non holonome s'intègre et conduise à une relation holonome.
La liaison est alors qualifiée de liaison semi-holonome.

Exemple

Un cerceau roule sans glisser sur l'axe OX_0 (voir figure).

L'équation cinématique de liaison s'écrit:

$$\dot{x}_G + a\dot{\theta} = 0$$
$$\Rightarrow x_G = -a\theta + C$$



N.B. Non holonome veut dire non intégrable en grecque.

Liaison principale – Liaison complémentaire

- Liaison principale ou primitive

Une liaison principale est une liaison holonome qui exprime une coordonnée généralisée en fonction d'une ou plusieurs autres coordonnées généralisées du système et qui permet ainsi la réduction, d'une unité, le paramétrage du système.

- Liaison complémentaire ou supplémentaire

Une liaison qui n'est pas utilisée pour effectuer la réduction du paramétrage du système est qualifiée de complémentaire.

- Nombre de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de paramètres indépendants qu'il faut pour déterminer de façon unique la position du système. Si « n » est le nombre de paramètres de configuration et si le système admet « p » liaisons principales et « s » liaisons complémentaires alors le ddl du système est :

$$N = n - p - s$$

<u>Exemple 1</u>: cerceau qui roule sans glisser sur le plan (O, x, y) (d'après la session normale de février 2015)

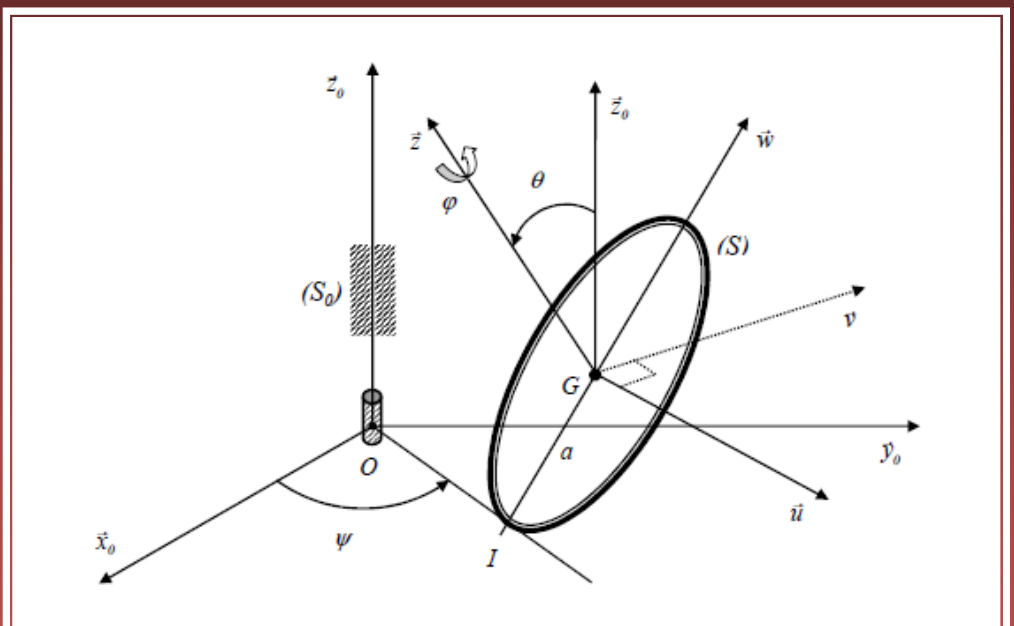


Figure : description générale du système

$$\overrightarrow{OI}.\vec{z}_0 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GI}).\vec{z}_0 = 0$$

avec $\overrightarrow{OG} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$ *et* $\overrightarrow{GI} = -a\vec{w}$

D'où :

$$\boxed{z = a\sin\theta}$$ *(Equation géométrique de contact)*

Nature de la liaison : c'est une équation de liaison holonome.

Le nombre de paramètres de position de (S) est six : $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ *mais compte tenu de l'équation de liaison* $z = a\sin\theta$*, le nombre de degrés de liberté est réduit à cinq qui sont:*

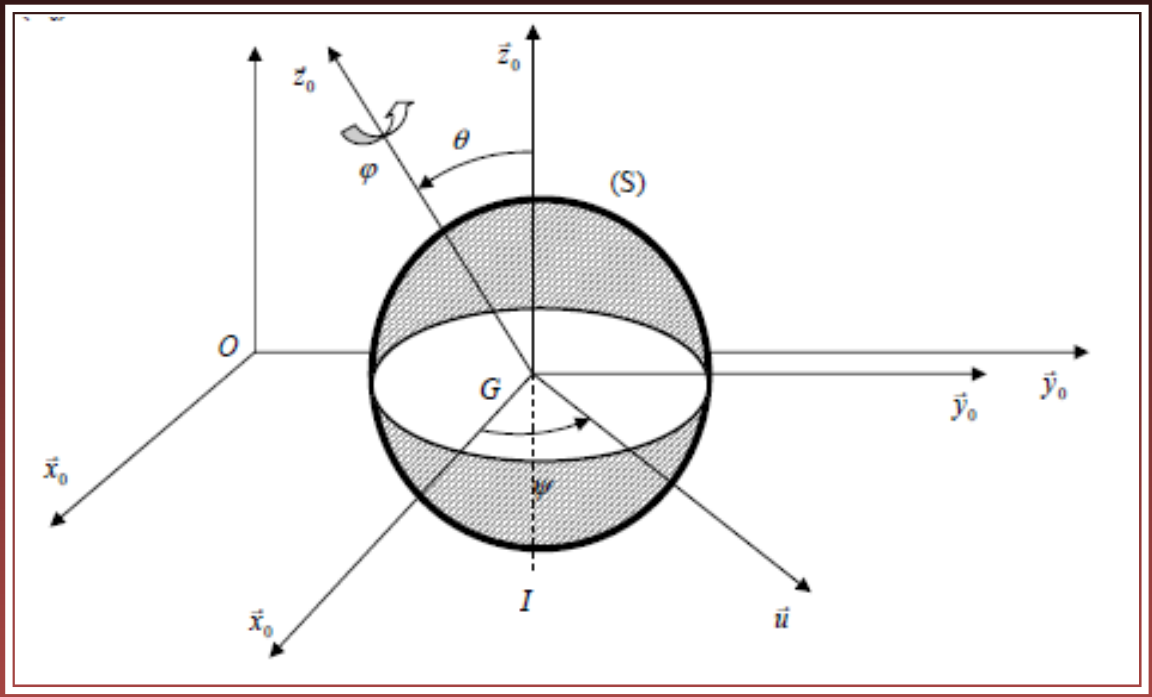
$\boxed{(x, y, \psi, \theta, \varphi)}$ *et le C.V.V. est* $\boxed{(\dot{x}^*, \dot{y}^*, \dot{\psi}^*, \dot{\theta}^*, \dot{\varphi}^*)}$

L'équation de liaison $z = a\sin\theta$ **est considérée ici comme <u>liaison primitive</u>.**

Remarque importante

Si une coordonnée généralisée est identifiée par la géométrie du problème, alors cette donnée est considérée comme une liaison primitive et permet, par conséquent, de réduire le paramétrage du système d'une unité (voir exemple 2).

Exemple 2: sphère qui roule sur un plan fixe



$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi) = \text{paramètres de configuration}$$

$$\text{si } z = R \text{ (équation de liaison holonome) est primitive}$$

$$\Rightarrow q = (x, y, \psi, \theta, \varphi) \Rightarrow 5ddl$$

Liaison unilatérale – Liaison bilatérale

- Une liaison est dite <u>unilatérale</u> lorsqu' elle s'exprime par une inégalité de type:

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) \leq 0$$

<u>Exemple</u>:
2 points matériels reliés par un fil <u>extensible</u> de longueur l.
Dans ce cas, on a:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq l^2$$

- Une liaison est dite <u>bilatérale</u> lorsqu' elle s'exprime par une égalité de type:

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$$

<u>Exemple</u>:
2 points matériels reliés par un fil <u>inextensible</u> de longueur l.
dans ce cas, on a:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

Liaison scléronome – Liaison rhéonome

- Une liaison indépendante explicitement du temps est dite <u>scléronome</u>.

<u>Exemple</u>:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

-Une liaison qui dépend explicitement du temps est qualifiée de <u>rhéonome</u>.

<u>Exemple</u>:

$$x = a \sin \omega t$$

§-1-2

Champ de vitesses réelles (CVR)
Champ de vitesses virtuelles (CVV)

Vitesse généralisée

Pour un point de l'espace physique (de dimensions 3), la vitesse est définie à partir du vecteur positon $\overrightarrow{OP}$ des coordonnées cartésiennes comme étant égale à :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$$

avec des coordonnées généralisées $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ la vitesse généralisée est le vecteur de dimension N : $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N)$ où :

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

Déplacement réel – Déplacement virtuel

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

$$d\overrightarrow{OP} = \sum_i^n \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} dt$$

Déplacement réel

Le déplacement réel est dû à un déplacement implicite: $\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} dq_i$

et à un déplacement explicite: $\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} dt$

On a besoin de suivre le déplacement de la particule dans le temps.

Il existe un autre déplacement dit <u>virtuel</u> (imaginaire) qui est un déplacement <u>infinitésimal</u> et <u>atemporel,</u> ce déplacement est théorique et non physique et ne nécessite pas de temps.
Un déplacement virtuel est un concept mathématique qui décrit le passage d'une configuration d'équilibre à une autre configuration d'équilibre sans pour autant considérer le temps de passage.
<u>C'est un déplacement dans l'espace des configurations:</u>

$$\delta\overrightarrow{OP} = \sum_{i}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \delta q_i$$

<u>Déplacement virtuel</u>

Les δq_i sont des variations infinitésimales <u>arbitraires</u> des coordonnées généralisées q_i <u>à l'instant t</u> (<u>t est fixé</u>).

Un déplacement virtuel est un déplacement qu'on imagine très petit de sorte qu'il ne modifie pas la configuration du système.

Exemples concrets

- Pour connaitre le poids d'une valise, on la soulève légèrement du sol pour avoir une idée de son poids.

- Pour savoir si le pneu d'un vélo est gonflé ou non, on appuie doucement avec les doigts sur le pneu.

Remarque importante

$$d\overrightarrow{OP} = \sum_{i}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} dt$$

$$\delta\overrightarrow{OP} = \sum_{i}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \delta q_i$$

Déplacement réel

Déplacement virtuel

Mathématiquement, on constate que le déplacement virtuel n'est pas une différentielle totale exacte.
C'est ce qui fait la différence entre un déplacement réel et un déplacement virtuel.

Champ de vitesses réelles (CVR)

Définition

Dans un mouvement réel, chaque point P d'un système admet, à chaque instant t, une vitesse donnée. L'ensemble de ces vitesses constitue le champ des vitesses réelles du système. Ce champ de vitesses s'obtient par la dérivée par rapport au temps des vecteurs position des différents points du système:

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_R$$

Vitesse réelle du point P

Comme:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$$

alors:

$$\vec{V}(P/R) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}$$

<u>Champ de vitesses réelles</u>

Champ de vitesses virtuelles (CVV)

Définition

Un mouvement virtuel d'un système donné, à un instant t <u>fixé</u>, est défini par un champ <u>arbitraire quelconque</u> de vecteurs $\vec{V}^*(P)$:

$$\vec{V}^*(P) = \sum_i^n \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

<u>Champ de vitesses virtuelles</u>

Les $\dot{q}_i$ sont <u>arbitraires</u> (c.à.d. quelconques)

Remarque importante

On peut prendre pour vitesse virtuelle un vecteur arbitraire, alors que la vitesse réelle est bien déterminée.
Par conséquent, on peut dire que la vitesse réelle est une vitesse virtuelle particulière.

Exemple d'un champ de vitesses virtuelles: mouvement virtuel rigidifiant ou solidifiant.

Définition

Un mouvement défini sur un solide (S) à l'instant t est dit rigidifiant (ou solidifiant), si le champ des vitesses virtuelles $\vec{V}^*$ défini sur (S) est un torseur :

$$\forall P,Q \in (S), \exists \vec{\Omega}^* tel\ \ que : \vec{V}^*(Q) = \vec{V}^*(P) + \vec{\Omega}^* \wedge \overrightarrow{PQ}$$

avec

$$\vec{V}^*(P) = \sum_i^n \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

Champ de vitesses virtuelles compatible avec une liaison

Définition

Un champ de vitesses virtuelles (CVV) est dit compatible avec une liaison non holonome $f(q_i, \dot{q}_i, t)$ si cette liaison est vérifiée par les $\dot{q}_i^*$ (pour un instant t fixé) relatif au champ de vitesse virtuelle.

Pour une liaison holonome $f(q_i, t)$, il y a compatibilité si:

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i^* = 0$$

Exemple 1

Soit P(x, y, z) un point matériel en mouvement par rapport à (R) et soumis aux liaisons holonomes suivantes:

$$(L_1) : x + y = f(t)$$
$$(L_2) : z = \cos(t)$$

Q1- Déterminer le nombre de degrés de liberté
Q2- Déterminer la vitesse réelle du point P
Q3- Déterminer la vitesse virtuelle non compatible avec (L_1) et (L_2)
Q4- Déterminer la vitesse virtuelle compatible avec (L_1) uniquement
Q5- Déterminer la vitesse virtuelle compatible avec (L_2) uniquement
Q6- Déterminer la vitesse virtuelle compatible avec (L_1) et (L_2)

Solution

R1- Le nombre de degré de liberté est d = 3 – 2 = 1

R2- Vitesse réelle

$$\vec{V}(P/R) = \dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z} = \dot{x}\vec{x} + \left(\frac{df}{dt} - \dot{x}\right)\vec{y} - \sin t\vec{z}$$

R3- Vitesse virtuelle non compatible avec (L_1) et (L_2)

$$\vec{V}(P/R) = \dot{x}^*\vec{x} + \dot{y}^*\vec{y} + \dot{z}^*\vec{z}$$

R4- Vitesse virtuelle compatible avec (L_1) uniquement

$$\vec{V}(P/R) = \dot{x}^*\vec{x} - \dot{x}^*\vec{y} + \dot{z}^*\vec{z}$$

R5- Vitesse virtuelle compatible avec (L_2) uniquement

$$\vec{V}(P/R) = \dot{x}^{*}\vec{x} + \dot{y}^{*}\vec{y} + 0\vec{z} = \dot{x}^{*}\vec{x} + \dot{y}^{*}\vec{y}$$

R6- Vitesse virtuelle compatible avec (L1) et (L2)

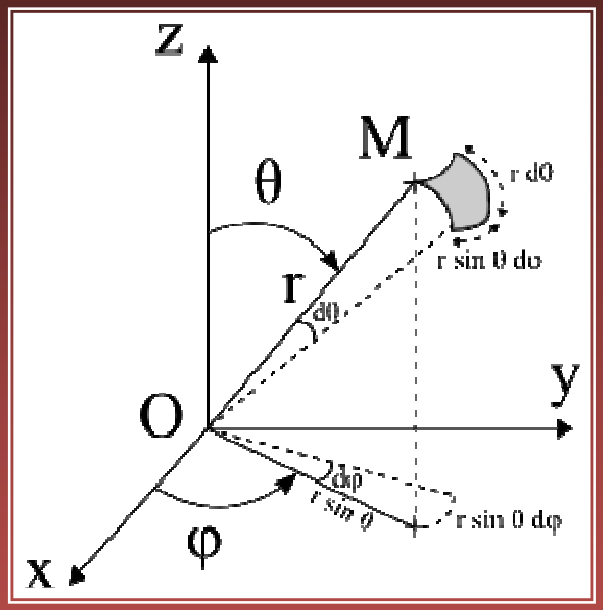
$$\vec{V}(P/R) = \dot{x}^{*}\vec{x} - \dot{x}^{*}\vec{y} + 0\vec{z} = \dot{x}^{*}\vec{x} - \dot{x}^{*}\vec{y}$$

Exemple 2

Soit M un point matériel en mouvement par rapport (R) et paramétré par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et soumis aux liaisons suivantes:

$$(L_1) : r = a$$

$$(L_2) : \varphi = \omega t$$



Même questionnaire que l'exercice 1

Solution

R1- Le nombre de degré de liberté est d = 3 – 2 = 1

R2- Vitesse réelle

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta + a\omega\sin\theta\vec{e}_\varphi$$

R3- Vitesse virtuelle non compatible avec (L_1) et (L_2)

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}^*\vec{e}_r + r\dot{\theta}^*\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}^*\vec{e}_\varphi$$

R4- Vitesse virtuelle compatible avec (L_1) uniquement

$$\vec{V}(M/R) = a\dot{\theta}^*\vec{e}_\theta + a\sin\theta\dot{\varphi}^*\vec{e}_\varphi$$

R5- Vitesse virtuelle compatible avec (L_2) uniquement

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}^*\vec{e}_r + r\dot{\theta}^*\vec{e}_\theta \qquad (\dot{\varphi}^* = 0)$$

R6- Vitesse virtuelle compatible avec (L1) et (L2)

$$\vec{V}(M/R) = a\dot{\theta}^*\vec{e}_\theta$$

§-2-

Puissances galiléennes réelles

Calcul des puissances réelles

Puissance associée aux efforts extérieurs

1- Force concentrée (glisseur)

La puissance réelle, à l'instant t, d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point P est donnée par:

$$P = \vec{F}.\vec{V}(P) \qquad (**)$$

2- Force répartie

La puissance réelle développée par un ensemble d'actions mécaniques $d\vec{F}$ appliqué à un solide (S) est donnée par :

$$P = \int_{(S)} \vec{V}(P).d\vec{F}$$

3- Puissance développée par un couple

La puissance développée par un solide en rotation développant un couple $\vec{C}$ à une vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ est égale au produit scalaire de $\vec{C}$ par $\vec{\Omega}$:

$$P = \vec{C}.\vec{\Omega} \qquad (**)$$

4- Puissance associée au torseur des efforts extérieurs

Soit un système d'actions mécaniques $d\vec{F}$ dont le torseur est:

$$[F_{ext}]_O = \begin{cases} \vec{F} = \displaystyle\int_{P\in(S)} d\vec{F} \\ \vec{M}(O) = \displaystyle\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} \end{cases}$$

Le champ des vitesses est parfaitement caractérisé par le torseur cinématique:

$$[\vartheta] = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}(P) \end{Bmatrix}_P$$

Par définition:

$$P = \int_{(S)} \vec{V}(P).d\vec{F}$$

Or

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$P = \int_{P\in(S)} \vec{V}(O).d\vec{F} + \int_{P\in(S)} (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP}).d\vec{F}$$

Comme l'intégration porte sur les éléments attachés à P:

$$P = \vec{V}(O).\int_{P\in(S)} d\vec{F} + \vec{\Omega}.\int_{P\in(S)} (\overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F})$$

D'où

$$P = \vec{V}(O).\vec{F} + \vec{\Omega}.\vec{M}(O) \qquad (**)$$

Conclusion

La puissance développée par le torseur des forces extérieures appliqué à un solide est égal au comoment des torseurs des efforts extérieurs et cinématique.

Cas particuliers

5- Puissance développée par le torseur des efforts intérieurs d'un solide (S)

La puissance développée par le torseur des efforts intérieurs d'un solide est nulle.

car le torseur des efforts intérieurs de cohésion est défini par:

$$[F_{\text{int}}] = \begin{cases} \vec{F}_{\text{int}} = \displaystyle\int_{P\in(S)} d\vec{F} = \vec{0} \\ \vec{M}_{\text{int}}(O) = \displaystyle\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP} \wedge d\vec{F} = \vec{0} \end{cases}$$

6- Puissance virtuelle développée par une liaison parfaite

La puissance développée par une liaison parfaite est nulle.

Ce qu'il faut absolument retenir

Puissance d'une A.M. appliquée à un solide

- La généralisation de la puissance pour tout type d'A.M. s'appliquant sur un solide est un comoment de torseurs :

$$P_{(AM \to S/R)} = \left\{ F_{(AM \to S)} \right\} \otimes \left\{ V_{(S/R)} \right\}$$

- Deux cas particuliers :
  - Puissance d'une force (glisseur) appliquée sur le solide S en A :

$$P_{(F \to S/R)} = \vec{F}.\vec{V}_{(A/R)}$$

  - Puissance d'un couple appliqué sur le solide S :

$$P_{(C \to S/R)} = \vec{C}.\vec{\Omega}_{(S/R)}$$

Essayer d'établir ces deux cas particuliers afin de s'assurer de la compréhension

§-3-

Puissances virtuelles

Calcul des puissances virtuelles

☞

Le calcul des puissances virtuelles est <u>identique</u> à celui des puissances réelles, avec toutefois un champ de vitesses virtuelles (CVV).

<u>- Cas des solides rigidifiants (ou solidifiants)</u>

Le CVV est défini par le torseur cinématique suivant:

$$[\vartheta^*] = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}^* \\ \vec{V}^*(P) \end{Bmatrix}_P$$

Le torseur des efforts extérieurs est défini par :

$$[F_{ext}]_P \begin{cases} \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{dF} \\ \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF} \end{cases}$$

$$P^*_{ext} = \int_{(\Sigma)} \vec{V}^*(P).\overrightarrow{dF}$$

$$\vec{V}^*(P) = \vec{V}^*(O) + \vec{\Omega}^* \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$P^*_{ext} = \vec{V}^*(O) \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{dF} + \vec{\Omega}^* \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF}$$

D'où :

$$P^*_{ext} = \vec{F}.\vec{V}^*(O) + \vec{M}(O).\vec{\Omega}^* \qquad (**)$$

ou encore:

$$P^*_{ext} = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}(O) \end{Bmatrix} \otimes {}_P\begin{Bmatrix} \Omega^* \\ \vec{V}^*(O) \end{Bmatrix} = [F_{ext}] \otimes [\vartheta^*] \qquad (**)$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués à un solide est égale au comoment des torseurs cinématique virtuel et du torseur des efforts extérieurs.

La puissance virtuelle développée par une liaison parfaite est nulle pour un champ de vitesses virtuelles qui respecte la liaison.

§-4-

Fonction de force

Fonction de force

Définition

On dit qu'une force $\vec{F}(X,Y,Z)$ appliqué en un point P dérive d' une fonction de force s'il existe une fonction U(x, y, z, t) telle que:

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}U$$

Soit:

$$\begin{cases} X = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ Y = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ Z = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Condition d'existence de U :

$\vec{F}$ étant donnée, il existe U telle que $\overrightarrow{grad}U = \vec{F}$ lorsque : $\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Remarque

Si la fonction de force ne dépend pas explicitement du temps t, alors nous dirons que la force dérive d'une fonction de force au sens strict.

Propriété de la puissance développée par $\vec{F} = \overrightarrow{grad}U$

La puissance galiléenne développée par $\vec{F}$ est:

$$P = \vec{F}.\vec{V} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Or

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = P + \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}$$

Si U est une fonction de force au <u>sens strict</u> alors:

$$P = \frac{dU}{dt} \qquad (**)$$

Théorème

Si une force F dérive d'une fonction de force U au sens strict, la puissance développée par cette force est égale à la dérivée par rapport au temps de la fonction de force U.

Par ailleurs, on montre facilement que:

$$P = \frac{dU}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

D'où :

$$U = -V + Cte \qquad (**)$$

La fonction de force est la fonction opposée à l'énergie potentielle.

Méthode de calcul d'une fonction de force indépendante du temps:

$$U = \int P\,dt + U_0$$

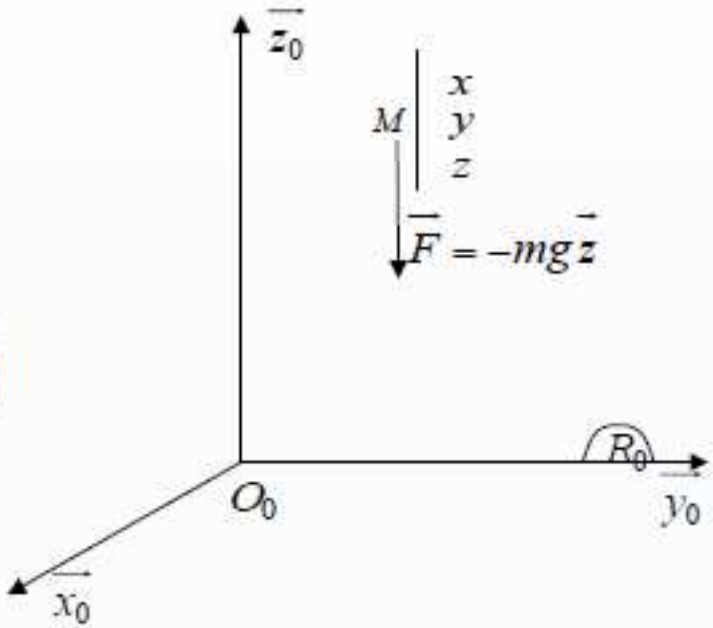
Exemple :

- Fonction de force pour une masse

Soit M de masse m.

$$P = -mg\vec{z}.\vec{V}_{M/R_0} = -mg\vec{z}.\left(\dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z}\right)$$

$$P = -mg\dot{z}$$



Calcul de la fonction de force : $U = \int P\,dt + U_0$

- Si la verticale est ascendante : $U = -mgz + U_0$
- Si la verticale est descendante : $U = +mgz + U_0$

Exemple :

- Fonction de force pour un ressort

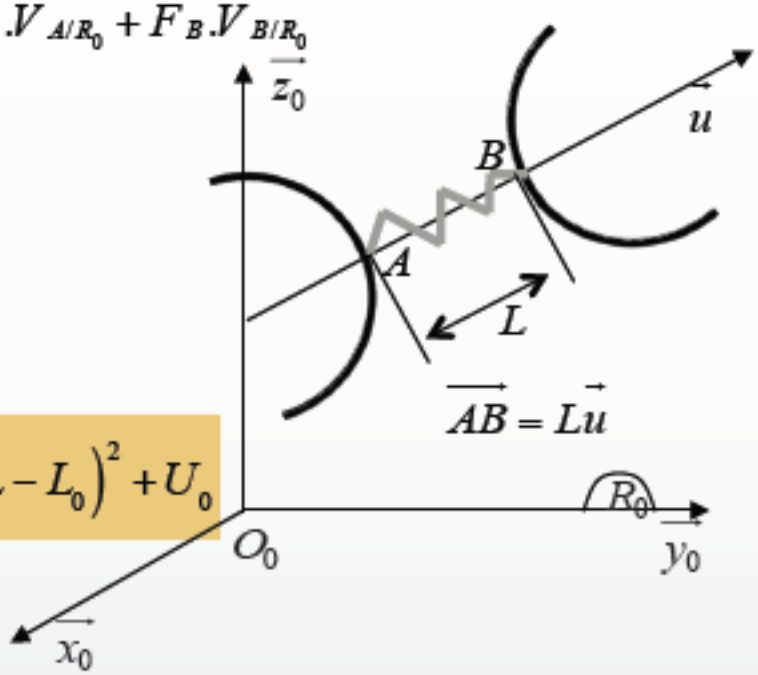
Soit un ressort de longueur libre L_0 et de raideur k reliant les solides S_1 et S_2.

La puissance développée par le ressort : $P = \vec{F}_A.\vec{V}_{A/R_0} + \vec{F}_B.\vec{V}_{B/R_0}$

Avec : $\vec{F}_A = k(L - L_0)\vec{u}$ et $\vec{F}_B = -k(L - L_0)\vec{u}$

$$P = -k(L - L_0)\vec{u}\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]$$

$$P = -k(L - L_0)\vec{u}\left[\frac{dL\vec{u}}{dt}\right] = -k(L - L_0)\frac{dL}{dt} \Rightarrow \boxed{U = -\frac{k}{2}\left(L - L_0\right)^2 + U_0}$$



- Fonction de force pour un couple constant

La puissance développée par un couple de moment : $\vec{C} = C\vec{z}$

$$P = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C\vec{z} \end{matrix} \right\}.\left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{z} \\ \vec{m} \end{matrix} \right\} = C\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{U = C\theta + U_0}$$

§-5-

Théorème de l'énergie cinétique

Considérons un point matériel P de masse dm appartenant à un système. Le principe fondamental de la dynamique se traduit par l'équation suivante:

$$d\vec{F}_e + d\vec{F}_i = \vec{\gamma}(P)dm$$

Action extérieure **Action intérieure** **Accélération de P**

Si l'on multiple les 2 membres de l'équation fondamentale par le vecteur vitesse $\vec{V}(P)$, on obtient:

$$d\vec{F}_e.\vec{V}(P) + d\vec{F}_i.\vec{V}(P) = \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}(P)$$

En faisant la somme pour les différents points appartenant au système, il vient:

$$\int_{P\in(S)} d\vec{F}_e.\vec{V}(P) + \int_{P\in(S)} d\vec{F}_i.\vec{V}(P) = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}(P)$$

$$\int_{P\in(S)} d\vec{F}_e.\vec{V}(P) = P_e$$

P_e = puissance réelle développée par les actions extérieures appliquées au système

$$\int_{P\in(S)} d\vec{F}_i.\vec{V}(P) = P_i$$

P_i = puissance réelle développée par les actions intérieures appliquées au système

$$\int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}(P) = P_a$$

P_a = puissance réelle développée par les quantités d'accélération

Par ailleurs:

$$\vec{\gamma}(P).\vec{V}(P) = \frac{d\vec{V}(P)}{dt}.\vec{V}(P) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{V}(P)\right)^2$$

$$\int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}(P) = \int_{P\in(S)} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{V}(P)\right)^2 dm = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \vec{V}^2(P)dm\right] = \frac{dT}{dt}$$

D'où:

$$\frac{dT}{dt} = P_e + P_i \qquad (**)$$

<u>Théorème</u>

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances développées par toutes les actions mécaniques, tant intérieures qu'extérieures.

Cas particuliers très intéressants

1- Cas où le système est formé de solides parfaits à liaisons parfaites

$$\frac{dT}{dt} = P_e$$

2- Cas où le système est formé de solides parfaits à liaisons parfaites et il ya fonction de force

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

Cette dernière équation donne alors:

$$T - U = T + V = H = Cte$$

Cette relation porte le nom d'intégrale première de l'énergie cinétique

Analyse

Le théorème de l'énergie cinétique que nous venons de voir montre l'intérêt de la notion de puissance. Ce théorème qui utilise le champ des vitesses réelles peut être généralisé en utilisant un champ de vitesses virtuelles (CVV) quelconque, il devient alors le théorème des puissances virtuelles ou le théorème de D'Alembert.

§-6-

Théorème de D'Alembert

Equation de D'Alembert

Considérons un point matériel P de masse dm appartenant à un système. Le principe fondamental de la dynamique se traduit par l'équation suivante:

$$d\vec{F}_e + d\vec{F}_i = \vec{\gamma}(P)dm$$

Action extérieure **Action intérieure** **Accélération de P**

Si l'on multiple les 2 membres de l'équation fondamentale par un vecteur $\vec{V}^*(P)$ arbitraire, on obtient l'équation de d'Alembert pour un point matériel:

$$d\vec{F}_e.\vec{V}^*(P) + d\vec{F}_i.\vec{V}^*(P) = \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}^*(P)$$

Pour tout le système, on aura l'équation de d'Alembert d'un système matériel en faisant la somme pour les différents points appartenant au système:

$$\int_{P\in(S)} d\vec{F}_e.\vec{V}^*(P) + \int_{P\in(S)} d\vec{F}_i.\vec{V}^*(P) = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}^*(P)$$

Définition

Soit une action mécanique représentée par le vecteur $\vec{F}$.
On appelle puissance virtuelle développée par $\vec{F}$ associée au champ $\vec{V}^*(P)$ le produit scalaire:

$$P^* = \vec{F}.\vec{V}^*(P)$$

En conséquence de cette définition, on peut donc poser:

$$\int_{P\in S} d\vec{F}_e.\vec{V}^*(P) = P_e^*$$

Puissance virtuelle développée par les actions extérieures appliquées au système

$$\int_{P\in(S)} d\vec{F}_i.\vec{V}^*(P) = P_i^*$$

Puissance virtuelle développée par les actions intérieures appliquées au système

$$\int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}^*(P) = P_a^*$$

Puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération

<u>L'équation de D'Alembert</u> peut s'écrire alors:

$$\boxed{P_a^* = P_e^* + P_i^*} \qquad (**)$$

<u>Enoncé du théorème des puissances virtuelles</u>

Dans un référentiel galiléen, pour tout système, la puissance virtuelle des quantités d' accélération est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs et intérieurs

P_a^*, P_e^* et P_i^* ***<u>sont des formes linéaires des vitesses généralisées</u> comme on va le montrer.***

Equivalence entre le théorème de l'énergie cinétique et le théorème des principes virtuelles

TEC → **CVR** → $$\frac{dT}{dt} = P_e + P_i$$

TPV → **CVV** → $$P_a^* = P_e^* + P_i^*$$

Le théorème de l'énergie cinétique est un cas particulier du théorème des puissances virtuelles pour lequel le champ des vitesses virtuelles est le champ des vitesses réelles.

Intéressons nous maintenant à chacun des termes de l'équation de D'Alembert et montrons que ce sont des formes linéaires des vitesses généralisées.

$$P_a^* = P_e^* + P_i^*$$

$$P_a^* \qquad P_e^* \qquad P_i^*$$

« Les 3 pièces du puzzle »

1- Calcul des puissances virtuelles des efforts extérieurs

$$P_e^*$$

$$P_e^* = \int_{P\in(S)} d\vec{F}_e . \vec{V}^*(P)$$

Or

$$\vec{V}^*(P) = \sum_i^n \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

D'où:

$$P_e^* = \int_{P\in(S)} d\vec{F}_e . \vec{V}^*(P) = \int_{P\in(S)} d\vec{F}_e . \left[\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i^* \right] = \left[\int_{P\in(S)} d\vec{F}_e . \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i^* = Q_i . \dot{q}_i^*$$

Conclusion

La puissance virtuelle développée par les efforts extérieurs est une forme linéaire des vitesses généralisées:

$$P_e^* = \sum_i Q_i \dot{q}_i^* \qquad (**)$$

Les Q_i sont appelées forces généralisées.

$$Q_i = \int_{P \in (S)} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} . d\vec{F}_e \qquad (**)$$

Dans la pratique le calcul des Q_i se fait à partir du calcul des puissances virtuelles des forces extérieures.

2- Calcul des puissances virtuelles des quantités d'accélération

$$P_a^*$$

$$P_a^* = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}^*(P)$$

Or

$$\vec{V}^*(P) = \sum_i^n \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\dot{q}_i^*$$

D'où:

$$P_a^* = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\vec{V}^*(P) = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P)dm.\left[\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\dot{q}_i^*\right] = \left[\int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}dm\right]\dot{q}_i^* = A_i\dot{q}_i^*$$

Conclusion

La puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération <u>est une forme linéaire des vitesses généralisées</u>

$$P_a^* = \sum_i A_i \dot{q}_i^* \qquad (**)$$

Les A_i sont appelées <u>accélérations généralisées</u>.

$$A_i = \int_{P \in (S)} \vec{\gamma}(P) . \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} dm$$

Transformations de Lagrange

Le champ des vitesses réelles es donné par:

$$\vec{V}(P/R) = \sum_{i}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \qquad (1)$$

Par ailleurs:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\right] = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right] = \frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial q_i} \qquad (2)$$

Calcul des coefficients A_i

A_i est défini à partir de:

$$\vec{\gamma}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} = \frac{d\vec{V}(P)}{dt}.\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}$$

Nous pouvons écrire:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\right] = \vec{\gamma}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} + \vec{V}(P).\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\right]$$

Soit:

$$\vec{\gamma}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\right] - \vec{V}(P).\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\right]$$

Et en tenant compte des transformations de Lagrange:

$$\vec{\gamma}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}(P).\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \vec{V}(P).\frac{\partial \vec{V}(P)}{\partial q_i}$$

Ce qui permet d'écrire:

$$A_i = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P).\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} dm = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\int_{P\in(S)} \frac{1}{2}\vec{V}^2(P)dm\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\int_{P\in(S)} \frac{1}{2}\vec{V}^2(P)dm\right)$$

Il vient finalement:

$$A_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (**)$$

Les A_i s'obtiennent de manière systématique à partir de l'énergie cinétique associé au paramétrage.

3- Calcul des puissances virtuelles des efforts intérieurs P_i^*

Principe d'objectivité

Pour tout système matériel , la puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle pour tout champ de vitesse virtuel rigidifiant.

D'où:

$$P_i^* = 0$$

Conclusion

Comme nous nous travaillons qu'avec des systèmes rigidifiants (solidifiants), alors, on aura pas à se préoccuper des efforts intérieurs dont la puissance virtuelle est nulle.

§-7-

Dérivation des équations de Lagrange

§-7-1

Equations de Lagrange simples (ELS)

☞

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Le PPV dans le cas d'un <u>système rigidifiant</u> s'écrit :

$$P_a^* = P_e^*$$

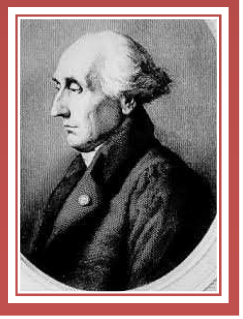
avec

$$P_e^* = \sum_i Q_i \dot{q}_i^*$$

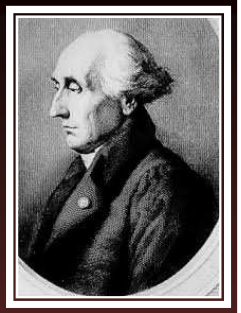
et

$$P_a^* = \sum_i A_i \dot{q}_i^*$$

<u>2 formes linéaires</u>
<u>de</u> $\dot{q}_i^*$



D'où :



$$\underbrace{\sum_i A_i \dot{q}_i^*}_{P_a} = \underbrace{\sum_i Q_i \dot{q}_i^*}_{P_e}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_i (A_i - Q_i)\dot{q}_i^* = 0 \qquad \forall \dot{q}_i^*$$

(I)

Choix du champ des vitesses virtuelles (CVV)

Si le CVV est compatible avec les liaisons holonomes et non compatible avec les liaisons non holonomes, alors les $\dot{q}_i^*$ sont <u>linéairement indépendantes</u> et nous pourrons écrire un système de n équations indépendantes appelées équations de Lagrange simples:

(I) $\Rightarrow$ $A_i = Q_i$

Soit:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (**)$$

Ce sont les équations de Lagrange simples (ELS)

Valables dans le cas où les $\dot{q}_i^*$ sont indépendantes

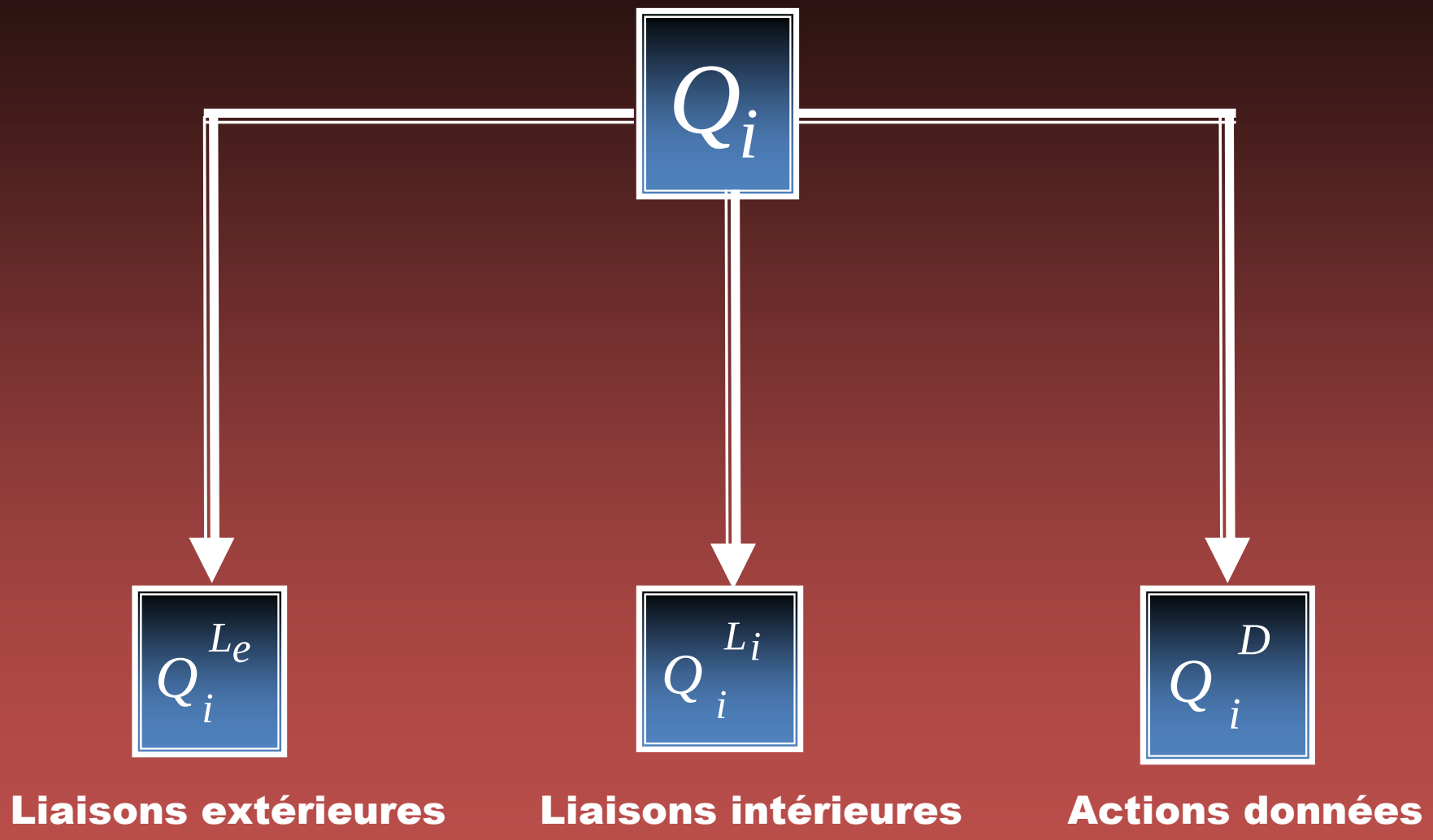
Remarque importante

D'autre part, les Q_i sont les composantes des forces généralisées qui peuvent avoir plusieurs origines. Nous écrirons par exemple:

$$Q_i = Q_i^{Le} + Q_i^{Li} + Q_i^{D}$$

avec:

$$\begin{cases} Q_i^{L_e} = \textit{force généraligée issue des actions de liaisons } \underline{\textit{extérieures}} \\ Q_i^{L_i} = \textit{force généraligée issue des actions de liaisons } \underline{\text{int}\textit{térieures}} \\ Q_i^{D} = \textit{force généraligée issue des actions } \underline{\textit{données}} \end{cases}$$


Q_i
$Q_i^{L_e}$
$Q_i^{L_i}$
Q_i^{D}
Liaisons extérieures
Liaisons intérieures
Actions données

Remarque importante

☞ **Dans les deux cas suivants:**

- si les liaisons sont parfaites (absence de frottement)
- s'il y a roulement sans glissement

alors:

$$Q_i = Q_i^{Le} + Q_i^{D}$$

car

$$Q_i^{Li} = 0$$

Expression des « ELS » en fonction de la fonction de force

D'après ce qui précède, on peut écrire:

$$P_e^* = \sum_i Q_i \dot{q}_i^* = \frac{dU}{dt} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

D'où les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \qquad (**)$$

Soit:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Sachant que

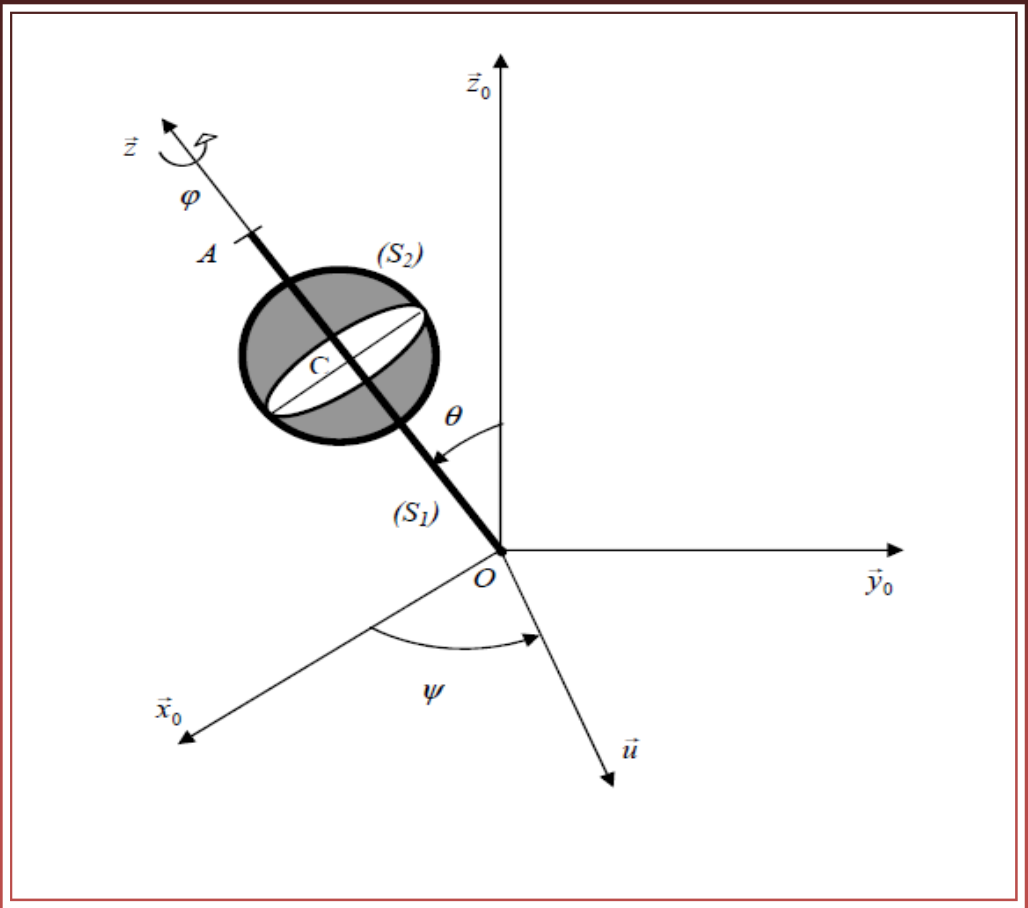
$$L = T - V$$

Il vient:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

On retrouve les équations d'Euler-Lagrange

Voir application pédagogique page 16



§-7-2

Equations de Lagrange avec multiplicateurs (ELM)

☞

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$$

Choix du champ des vitesses virtuelles (CVV)

Si le CVV est compatible à la fois avec les liaisons holonomes et les liaisons non holonomes, alors les $\dot{q}_i^*$ ne sont plus <u>linéairement indépendantes</u> et elles peuvent vérifier m équations de la forme:

$$a_{ij}(q_i, t)\dot{q}_i^* = 0 \quad j = 1, \ldots, m$$

Dans ce cas

$$\sum_i (A_i - Q_i)\dot{q}_i^* = 0$$

est une combinaison linéaire de $a_{ij}(q_i, t)\dot{q}_i^*$

$$\sum_i (A_i - Q_i)\dot{q}_i^* = \sum_i^n \sum_j^m \mu_j a_{ij} \dot{q}_i^*$$

Ce qui donne :

$$A_i - Q_i = \sum_{j=1}^m \mu_j a_{ij}$$

D'où :

(**)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^m \mu_j a_{ij}$$

$$i = 1,\ldots, n$$
$$j = 1,\ldots, m$$

Ce sont les équations de Lagrange avec multiplicateurs (ELM)

Valables dans le cas où les $\dot{q}_i^*$ne sont pas indépendantes

Ce qu'il faut retenir

$$\sum_i (A_i - Q_i)\dot{q}_i^* = 0$$

les $\dot{q}_i^*$ sont indépendantes

$$A_i = Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

les $\dot{q}_i^*$ ne sont pas indépendantes

$$A_i - Q_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$$

Signification physique des multiplicateurs de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$$

On constate immédiatement que le terme $\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$ **est homogène à une force généralisée.**
Autrement dit ce terme représente le coefficient de la puissance virtuelle développée par les actions de liaison. On peut donc qualifier ce terme d'action de liaison généralisée.

Ce qu'il faut retenir

Les termes $\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$ représentent les forces généralisées correspondant aux actions de liaison non holonomes.

Par conséquent dans le calcul des Q_i, on ne tient pas compte des puissances virtuelles développées par les actions de liaisons non holonomes.

Mise en œuvre des multiplicateurs de Lagrange

Application: Cerceau qui roule sur un plan

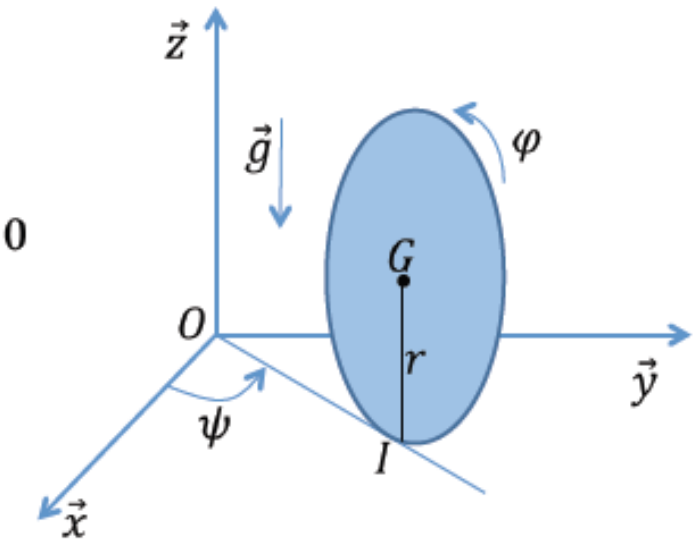
$q = (x_G, y_G, \psi, \varphi)$

Liaison non-holonome :

$\dot{x}_G + r\dot{\varphi}\cos\psi = 0 \quad ; \quad \dot{y}_G + r\dot{\varphi}\sin\psi = 0$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\psi}^2\right)$$



Les équations de Lagrange avec multiplicateurs s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \mu_j a_{ij}$$

car les $Q_i = 0$

- Calcul du premier membre des équations de Lagrange :

	$q_1 = x_G$	$q_2 = y_G$	$q_3 = \varphi$	$q_4 = \psi$
$\frac{\partial T}{\partial q_i}$	0	0	0	0
$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$	$m\dot{x}_G$	$m\dot{y}_G$	$mr^2\dot{\varphi}$	$\frac{1}{2}mR^2\dot{\psi}$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$	$m\ddot{x}$	$m\ddot{y}$	$mr^2\ddot{\varphi}$	$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi}$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}$	$m\ddot{x}$	$m\ddot{y}$	$mr^2\ddot{\varphi}$	$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi}$

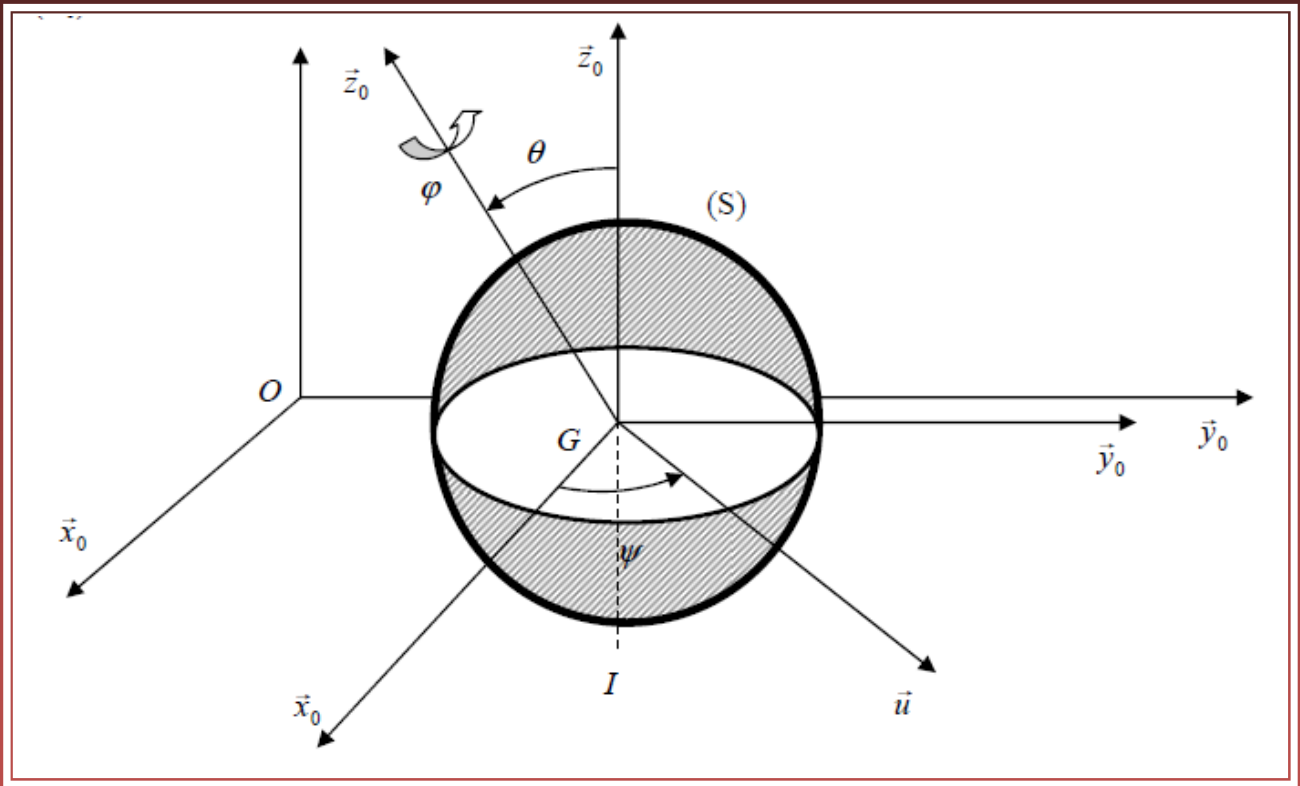
Calcul du second membre

	$q_1 = x_G$	$q_2 = y_G$	$q_3 = \varphi$	$q_4 = \psi$
a_{1i}	1	0	$r\cos\psi$	0
a_{2i}	0	1	$r\sin\psi$	0
$\sum_{j=1}^{2} \lambda_j a_{ji}$	λ_1	λ_2	$\lambda_1 r\cos\psi + \lambda_2 r\sin\psi$	0

- Les équations de Lagrange avec multiplicateurs :

$\mathcal{L}(x_G)$: $m\ddot{x}_G = \lambda_1$	$\mathcal{L}(y_G)$: $m\ddot{y}_G = \lambda_2$
$\mathcal{L}(\varphi)$: $mr^2\ddot{\varphi} = \lambda_1 r\cos\psi + \lambda_2 r\sin\psi$	$\mathcal{L}(\psi)$: $\frac{1}{2}mR^2\ddot{\psi} = 0$

Voir application pédagogique page 25



Fiche de synthèse

Ce qu'il faut absolument savoir

PPV

$$P_a^* = P_e^* + P_i^*$$

$$P_a^* = \sum_i A_i \dot{q}_i^*$$

$$P_e^* = \sum_i Q_i q_i^*$$

$$P_i^* = 0$$

(solide rigidifiant)

$$\sum_i (A_i - Q_i)\dot{q}_i^* = 0$$

$\dot{q}_i^*$ indépendantes

$\dot{q}_i^*$ non indépendantes

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

ELS

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$$

ELM

Mise en œuvre

☞ **Voir applications pédagogiques**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

ELS

↓

TD2

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$$

ELM

↓

TD3

Méthodologie à suivre pour résoudre un problème en utilisant les équations de Lagrange simples (ELS) (voir TD2)

D1- Calculer T
D2- Calculer P_{ext}
D3- En déduire Q_i
D4- Ecrire les ELS

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}}_{3} - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_i}}_{2} = \underbrace{Q_i}_{1}$$

Les calculs se font de droite à gauche

Méthodologie à suivre pour résoudre un problème en utilisant les équations de Lagrange avec multiplicateurs (ELM) (voir TD3)

D1- Calculer T

D2- Calculer P_{ext}

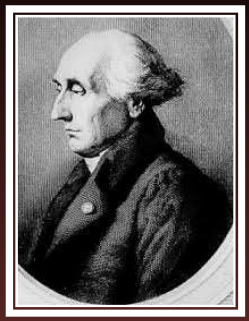
D3- En déduire Q_i

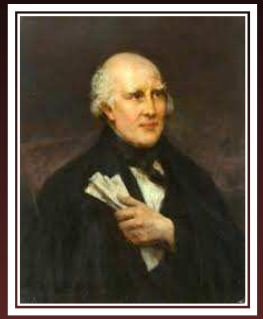
D4- Calculer $\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}$

D5- Ecrire les ELM

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}}_{4} - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_i}}_{3}}_{} = \underbrace{Q_i}_{2} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \mu_j a_{ij}}_{1}$$

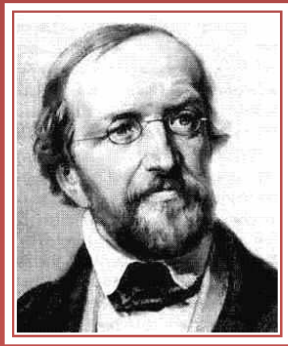
Les calculs se font de droite à gauche





Et maintenant, c'est à vous de jouer,

à vos dossiers pédagogiques.



FIN DU CHAPITRE 2

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 Département de physique
Faculté des sciences
Agadir

email: r.mesrar@uiz.ac.ma