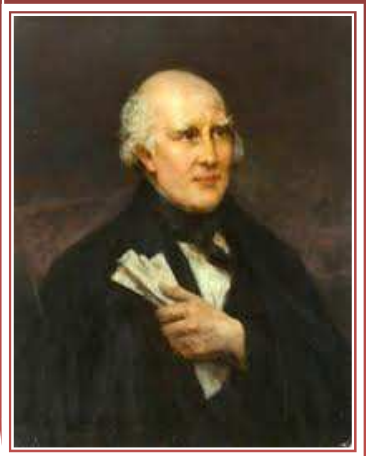
MECANIQUE ANALYTIQUE
SMP5



Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 département de physique
Faculté des sciences
Agadir
email: r.mesrar@uiz.ac.ma

CHAPITRE 3 : INTEGRALES PREMIERES

Objectifs pédagogiques

- Introduire la notion d'intégrale première
- Décomposer l'énergie cinétique
- Etudier les intégrales premières linéaires
- Etudier les intégrales premières quadratiques

CHAPITRE 3 : INTEGRALES PREMIERES

Notions abordées

- Intégrale première linéaire
- Intégrale première de Jacobi
- Décomposition de l'énergie cinétique
- Convention d'Einstein
- Théorème d'Euler
- Fonction homogène

CHAPITRE 3 : INTEGRALES PREMIERES

Notions abordées - suite

- Degré d'homogénéité
- Identité d'Euler
- Intégrale première quadratique
- Théorème de l'énergie cinétique
- Intégrale première de Painlevé
- Intégrale première de l'énergie cinétique

CHAPITRE 3 : INTEGRALES PREMIERES

PLAN DU CHAPITRE 3

1- Intégrale première linéaire
2- Intégrale première de Jacobi
3- Décomposition de l'énergie cinétique
4- Théorème d'Euler - Identité d'Euler
5- Intégrales premières quadratiques

Préambule

« Nous connaissons le grand intérêt de rechercher des intégrales premières lorsqu' on a étudié les théorèmes généraux. Les équations de Lagrange permettent leur recherche quasi systématique »

Définition

On appelle intégrale première du mouvement toute fonction $f(q_i, \dot{q}_i, t)$ ***qui reste constante au cours du temps:***

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = Cte$$

§-1-

Intégrale première linéaire

1- Intégrale première linéaire en $\dot{q}_i$.

S'il existe *i* tel que $Q_i = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0$; la coordonnée correspondante

q_i est appelée coordonnée cyclique (ou cachée).
L' équation de Lagrange relative à q_i se réduit à :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Cte$$

C'est une intégrale première linéaire en $\dot{q}_i$.

§-2-

Intégrale première de Jacobi

2- Intégrale première de Jacobi

Dans le cas d'un système isolé càd $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ **on a l'intégrale première suivante:**

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = Cte$$

Intégrale première de Jacobi

En effet :

$$\frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = p_i\dot{q}_i - L = Cte$$

car

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

CQFD

§-3-

Décomposition de l'énergie cinétique

1- Convention d'Einstein

- L'espace est $\mathbb{R}^3$

  → les indices de coordonnées varient toujours de 1 à 3

  → le signe $\sum_{i=1}^{3}$ est inutile!!

- convention de sommation sur les indices répétés (=**convention d'Einstein**) : si un indice apparaît **deux fois** dans la même expression, il prend systématiquement les valeurs 1, 2 et 3

- Exemple:

$$a_i b_{ij} c_j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_{ij} c_j = a_1 b_{11} c_1 + a_1 b_{12} c_2 + a_1 b_{13} c_3 + a_2 b_{21} c_1 + \ldots + a_3 b_{33} c_3$$

Convention d'Einstein

- indice répété = indice **muet**, il peut changer de nom
- exemple : **position** du point

$$\underline{OM} = x_i \underline{e_i} = x_k \underline{e_k} = x_1 \underline{e_1} + x_2 \underline{e_2} + x_3 \underline{e_3}$$

- exemple : **produit scalaire**

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \left(x_i \underline{e_i}\right) \cdot \left(y_j \underline{e_j}\right)$$
$$= x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_2$$

- exemple : **norme** d'un vecteur

$$\left\|\underline{x}\right\|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = x_i \underline{e_i} \cdot x_j \underline{e_j} = x_i x_j \delta_{ij} = x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

2- Décomposition de l'énergie cinétique T

$$T = \frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \vec{V}^{2}(P)dm$$

avec

$$\vec{V}(P) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial t}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \left(\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)^{2} dm$$

$$= \left(\frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_j}dm\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \left(\int_{P\in(S)} \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial t}dm\right)\dot{q}_i + \frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \left(\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)^{2} dm$$

$$= T_2 + T_1 + T_0$$

avec

$$T_2 = \left(\frac{1}{2} \int_{P \in (S)} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_j} dm \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \text{terme quadratique de } T \text{ en } \dot{q}_i$$

$$T_1 = \left(\int_{P \in (S)} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} dm \right) \dot{q}_i = \text{terme linéaire de } T \text{ en } \dot{q}_i$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_{P \in (S)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} \right)^2 dm = \text{terme indépendant de } \dot{q}_i$$

D'où:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Pourquoi?

$$T_2 = \left(\frac{1}{2} \int_{P \in (S)} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_j} dm \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Pour mieux comprendre, prenons le cas de 2 paramètres q_1 et q_2.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}(q_1, q_2, t) \Rightarrow \vec{V}(P) = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{V}^2(P) = \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} \right)^2 \dot{q}_2^2 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} \right)^2 +$$

$$2 \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2 \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1} \right) \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} \right) \dot{q}_1 + 2 \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2} \right) \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} \right) \dot{q}_2$$

$$= \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\right)^2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\right)^2 \dot{q}_2^2 + 2\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\right)\dot{q}_1\dot{q}_2 +$$

$$2\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)\dot{q}_1 + 2\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)\dot{q}_2 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)^2$$

$$= \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + 2\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)\dot{q}_i + \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)^2$$

En effet:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_1\dot{q}_1 + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_2\dot{q}_2$$

$$+\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\dot{q}_2\dot{q}_1$$

$$= \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\right)^2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\right)^2 \dot{q}_2^2 + 2\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_1}\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2$$

La multiplication est commutative.

Remarque

Si le paramétrage ne fait pas intervenir le temps t, alors:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} = 0$$

et

$$T = T_2$$

T est alors une fonction homogène du second degré

§-4-

Théorème d'Euler
Degré d'homogénéité
Identité d'Euler

1- Théorème d'Euler relatif aux fonctions homogènes

A- Fonction homogène

Une fonction f de n variables $q_1,\ldots, q_N$ est dite homogène de degré n si:

$$f(\lambda q_1, \lambda q_2, \ldots, \lambda q_N) = \lambda^n f(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

n est appelé degré d'homogénéité

B- Théorème d'Euler:

Le théorème d'Euler stipule que si f est une fonction Homogène de degré n, alors:

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = nf(q_1, q_2, \ldots, q_N)$$

2- Degré d'homogénéité – Identité d'Euler

A- Autre formulation de l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\int_{P\in(S)}\left(\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{P\in(S)}\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_j}dm\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \left(\int_{P\in(S)}\left(\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial q_i}\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)dm\right)\dot{q}_i$$

$$+\frac{1}{2}\int_{P\in(S)}\left(\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial t}\right)^2 dm$$

$$= \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + b_i\dot{q}_i + c = T_2 + T_1 + T_0$$

$$a_{ij} = \int_{P \in (S)} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_j} dm$$

$$b_i = \int_{P \in (S)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial q_i} \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} \right) dm$$

$$c = \frac{1}{2} \int_{P \in (S)} \left(\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} \right)^2 dm$$

Ainsi

$$T_2 = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$T_1 = b_i \dot{q}_i$$

$$T_0 = c$$

Déterminons à présent, le degré d'homogénéité de T_2, T_1 et T_0

B- Degré d'homogénéité de T_2, T_1 et T_0

$$T_2(\lambda\dot{q}_1, \lambda\dot{q}_2, \ldots, \lambda\dot{q}_N) = \frac{1}{2} a_{ij} \lambda\dot{q}_i \lambda\dot{q}_j = \lambda^2 \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \lambda^2 T_2$$

$$\Rightarrow T_2 \text{ est une fonction homogène de degré } 2$$

$$T_1(\lambda\dot{q}_1, \lambda\dot{q}_2, \ldots, \lambda\dot{q}_N) = b_i(\lambda\dot{q}_i) = \lambda b_i \dot{q}_i = \lambda T_1$$

$$\Rightarrow T_1 \text{ est une fonction homogène de degré } 1$$

$$T_0 \text{ ne dépend pas des } \dot{q}_i$$

$$\Rightarrow T_0 \text{ est une fonction homogène de degré } 0$$

C- Identité d'Euler

D'après le théorème d'Euler, on a:

$$\dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \underbrace{\dot{q}_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}}_{2T_2} + \underbrace{\dot{q}_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i}}_{1T_1} + \underbrace{\dot{q}_i \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i}}_{0T_0}$$

Soit:

$$\dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T_2 + T_1 \qquad \textbf{(I)}$$

Cette relation est connue sous le nom <u>d'identité d'Euler</u>

§-5-

Intégrales premières quadratiques

1- Théorème de l'énergie cinétique

Les équations de Lagrange s'écrivent:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Soit en multipliant par $\dot{q}_i$:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i = Q_i\dot{q}_i$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i-\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i=Q_i\dot{q}_i$$

or l'identité d'Euler s'écrit:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=2T_2+T_1$$

D'où:

$$\frac{d}{dt}\left(2T_2+T_1\right)-\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i-\frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i=Q_i\dot{q}_i \qquad \textbf{(II)}$$

$$T = T(q_i, \dot{q}_i, t) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t}$$

D'où la relation:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \frac{d(T_2 + T_1 + T_0)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial t}$$

(II) s'écrit:

$$\frac{d}{dt}\left(2T_2 + T_1\right) - \frac{d}{dt}\left(T_2 + T_1 + T_0\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = Q_i \dot{q}_i$$

soit

$$\frac{d}{dt}\left(T_2 - T_0\right) + \frac{\partial T}{\partial t} = Q_i \dot{q}_i$$

Cette relation représente le théorème de l'énergie cinétique et est valable dans le cas où le système est conservatif ou non.

2- Intégrale première de Painlevé

Hypothèses

H1- Il y a une fonction de force U

H2- les liaisons sont toutes parfaites

$$P_e = Q_i \dot{q}_i = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial t} = Q_i \dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt}(T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

D'où:

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}$$

ou encore:

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0 - U) + \frac{\partial}{\partial t}(T + U) = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$T + U = T - V = L = lagrangien$$

H3- Lagrangien indépendant du temps

Dans ce cas, on a:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(T + U) = 0$$

D'où:

$$T_2 - T_0 - U = Cte$$

C'est l'intégrale première de Painlevé

Remarque importante

L'intégrale première de Painlevé ne contient jamais explicitement le temps.

Conditions d'existence de l'IP de Painlevé

☞

H1- Les liaisons sont parfaites

H2- Les forces dérivent d'une fonction de force U

H3- Lagrangien indépendant explicitement du temps:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(T + U) = 0$$

Exercice d'application

Les énergies cinétique et la fonction de force d'un système mécanique (S) sont données par :

$$\begin{cases} T(S/R) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi\right) + \frac{A}{2}\left(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\psi\right) \\ + \frac{C}{2}\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2 \\ U(S) = mg(a\sin\theta - x\cos\theta) + K \end{cases}$$

On suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

1- Le système possède-t-il l'intégrale première de Painlevé? Si oui donner son expression.

2- On impose $\theta = \omega t$ et $x = a$, où ω est une constante positive.

Existe-t-il, dans ce cas une intégrale première de Painlevé? Si oui donner son expression.

1-

- Toutes les liaisons sont parfaites
- Toutes les forces dérivent d' une fonction de force
- $$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(T + U) = 0$$

Donc <u>l'I.P de Painlevé existe</u> bien et son expression est :

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi\right) + \frac{A}{2}\left(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\psi\right) + \frac{C}{2}\left(\dot{\varphi} + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2$$
$$-mg(a\sin\theta - x\cos\theta) = K = Cte$$
$$(T_0 = 0)$$

2- Dans ce cas <u>on n' a plus l'intégrale première de Painlevé</u>, en effet :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(T + U) \neq 0$$

Puisque

$$U = mg(a \sin \omega t - a \cos \omega t)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial t} = mg(a\omega \cos \omega t + a\omega \sin \omega t) \neq 0$$

3- Intégrale première de l'énergie cinétique

☞ **On suppose que les hypothèses de l'intégrale première de Painlevé sont satisfaites et on ajoute une hypothèse supplémentaire:**

H4- Paramétrage indépendant du temps:

$$\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial t} = 0$$

Dans ce cas:

$$T_0 = T_1 = 0 \Rightarrow T = T_2$$

alors, l'intégrale première de Painlevé s'écrit:

$$T - U = Cte$$

C'est l'intégrale première de l'énergie cinétique

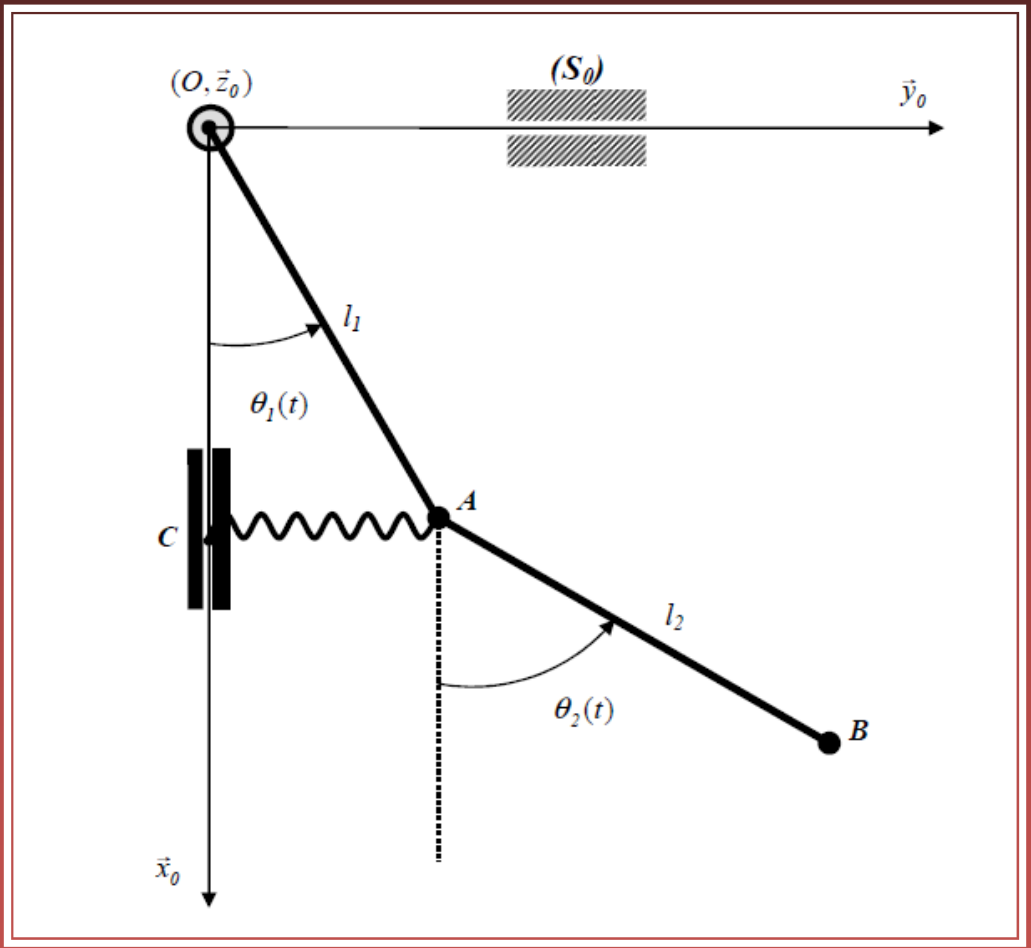
Remarque

l'intégrale première de l'énergie cinétique traduit la conservation de l'énergie mécanique, en effet:

$$T - U = T + V = E_m = Cte$$

Exercice d'application

Session de rattrapage de 2016



Données du problème:

$$T(\Sigma / R_0) = T(A / R_0) + T(B / R_0)$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$V_{tot}(\Sigma) = V_{pes}(\Sigma) + V_{él}$$

$$= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2 + \frac{1}{2} k (l_1 \sin\theta_1 - l_0)^2$$

A-t-on l'intégrale première de l'énergie cinétique? Si oui l'écrire.

Solution

Oui on a l'I.P. de l'énergie cinétique car le système est conservatif (toutes les forces dérivent d'un potentiel V).

D'où:

$$T - U = T + V = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$
$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$- (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_2 \cos\theta_2$$
$$+ \frac{1}{2} K (l_1 \sin\theta_1 - l_0)^2 = Cte$$

Remarque

Cette I.P. peut remplacer avantageusement une des deux équations du mouvement qui sont toutes les deux des équations différentielles d'ordre 2.

Fiche de synthèse 2

☞ **Ce qu'il faut absolument savoir**

Les 4 intégrales premières à connaître absolument

Intégrale première	Conditions	Forme
Intégrale première linéaire	$\frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \; ; \; et \; Q_i = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = Cte$
Intégrale première de Jacobi	$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$	$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = Cte$
Intégrale première de Painlevé	- Les forces dérivent d'un potentiel - Les liaisons sont parfaites et $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$	$T_2 - T_0 - U = Cte$
Intégrale première de l'énergie cinétique	Liaisons indépendantes du temps	$T - U = Cte$

Mise en œuvre

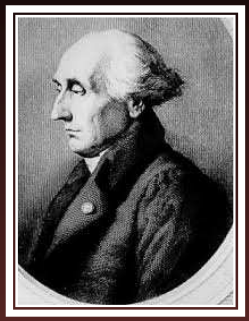
☞ **Voir application pédagogique**

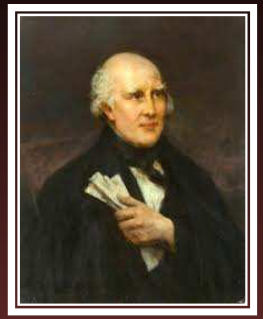
$$T_2 - T_0 - U = Cte$$

Intégrale première de Painlevé

$$T - U = Cte$$

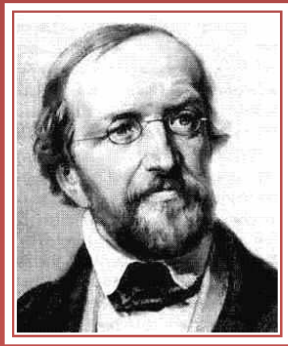
Intégrale première de l'énergie cinétique





Et maintenant, c'est à vous de jouer,

à vos dossiers pédagogiques.



FIN DU CHAPITRE 3

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 Département de physique
Faculté des sciences
Agadir

email: r.mesrar@uiz.ac.ma