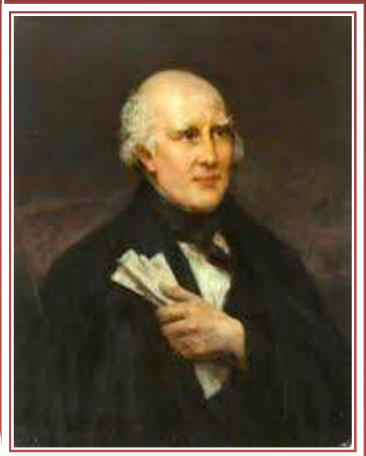
MECANIQUE ANALYTIQUE
SMP5



Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 département de physique
Faculté des sciences
Agadir
email: r.mesrar@uiz.ac.ma

CHAPITRE 4 : EQUILIBRE ET STABILITE

Objectifs pédagogiques

- Introduire la notion d'équilibre
- Introduire la notion de stabilité
- Etudier le cas des systèmes conservatifs
- Etudier le cas des systèmes dissipatifs

CHAPITRE 4 : EQUILIBRE ET STABILITE

Notions abordées

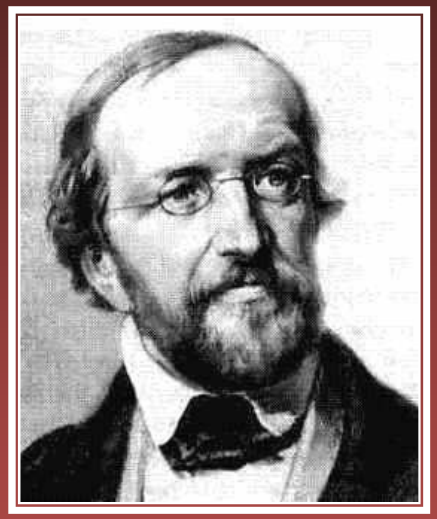
- Notion d'équilibre paramétrique
- Notion d'équilibre strict
- Système conservatif
- Théorème de Lejeune-Dirichlet
- Système dissipatif
- Théorème de Liapunov

CHAPITRE 4 : EQUILIBRE ET STABILITE

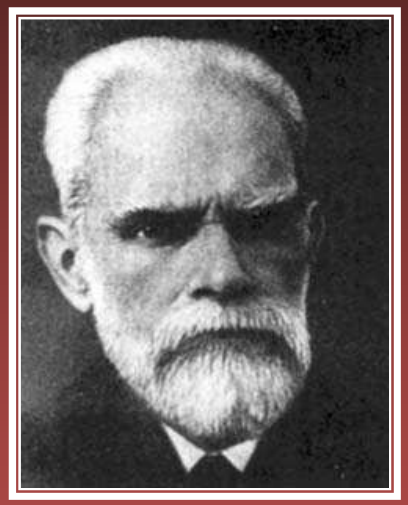
PLAN DU CHAPITRE 4

1- Notion d'équilibre
2- Notion de stabilité
3- Systèmes conservatifs
   - Théorème de Lejeune-Dirichlet
4- Linéarisation des équations de Lagrange
5- Systèmes dissipatifs
   - Théorème de Liapunov

Equilibre et stabilité



Lejeune Dirichlet
(1805-1859)
<u>Approche énergétique</u>



Mikhailovich Iyapunov
(1857-1918)
<u>Approche dynamique</u>

L'objectif de ce chapitre est de présenter les différentes méthodes permettant de définir et d'étudier la stabilité d'une position d'équilibre. Deux méthodes peuvent être envisagées:

Méthode directe: théorème de Lejeune-Dirichlet
Ce théorème permet de définir les positions d'équilibre indépendamment des équations de mouvement.
Ce théorème est particulièrement bien adapté aux systèmes dont les forces données dérivent d'un potentiel indépendant du temps.

Méthode générale: écriture des équations du mouvement linéarisées au voisinage des positions d'équilibre pour conclure sur la stabilité (théorème de Liapunov).

§-1-

Notion d’équilibre

Un système est en équilibre lorsqu' il est <u>immobile</u> par rapport à un repère galiléen. Dans ce cas nous pouvons écrire :

$$P^*(F_{ext}) = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i^* = Q_i\dot{q}_i^* = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$$

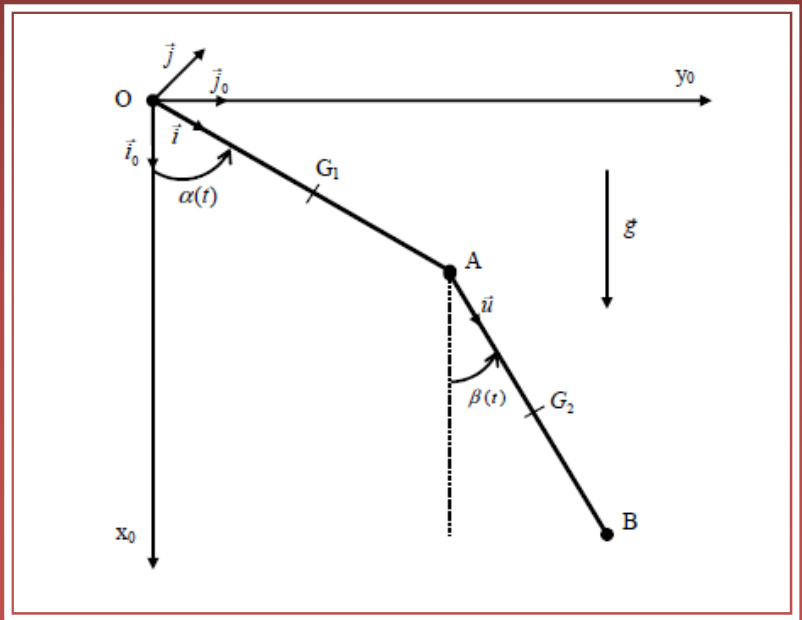
Les positions d'équilibre sont donc obtenues pour les valeurs des paramètres :

$$q_i = q_i^e = Cte$$

Théorème

Les positions d'équilibre sont obtenues pour les valeurs des paramètres qui rendent la fonction de force stationnaire.

Exemple classique : pendule double voir TD1



$$U(\alpha,\beta) = mgl(3\cos\alpha + \cos\beta) + Cte$$

Les positions d'équilibre sont données par :

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -3mgl\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \;\; ou \;\; \alpha = \pi$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = -3mgl\sin\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \;\; ou \;\; \beta = \pi$$

D'où les positions d'équilibre :

$$(\alpha,\beta) = (0,0)$$

$$(\alpha,\beta) = (0,\pi)$$

$$(\alpha,\beta) = (\pi,0)$$

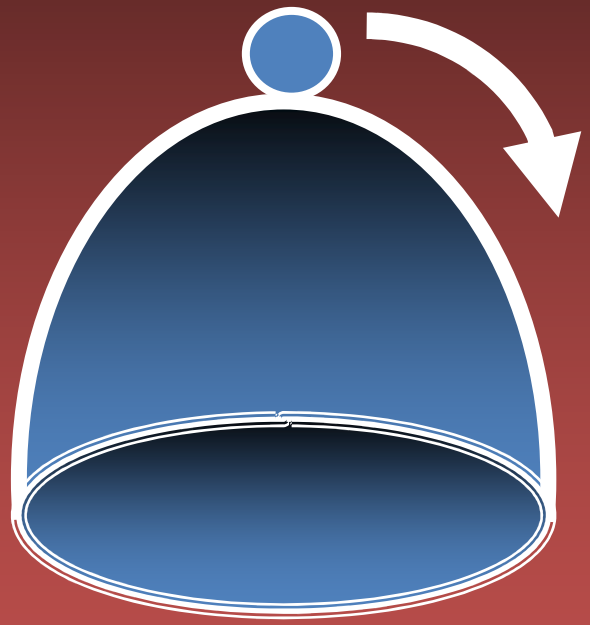
$$(\alpha,\beta) = (\pi,\pi)$$

§-2-

Notion de stabilité

Une position d'équilibre d'un système matériel est dite stable Si le mouvement induit par une perturbation n'a aucun effet et le système reste au voisinage de cette position.

équilibre stable



équilibre instable

Equilibre paramétrique

Soit (Σ) un système de solides en mouvement dans un repère galiléen. Sa position est repérée par n paramètres q_i et le temps.
Le mouvement de (Σ) est régi par n équations de Lagrange de la forme :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$(q)_e = (q_{1e}, \ldots, q_{ne})$$

définit une position d'équilibre paramétrique si :

$$\forall i, \quad q_i = q_{ie}$$

$$\forall i, \quad \dot{q}_i = 0$$

Equilibre strict ou absolu

Si la position de (S) ne dépend pas du temps t, l'équilibre paramétrique est un équilibre strict et une position d'équilibre strict se traduit par:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Si toutes les forces dérivent d'une fonction de force U (indépendante du temps), alors la position d'équilibre est donnée par:

$$(Q_i)_{q_e} = 0$$

soit :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_e} = 0$$

§-3-

Systèmes conservatifs (cas particulier) Théorème de Lejeune-Dirichlet

Théorème de Lejeune Dirichlet

Théorème de Lejeune Dirichlet
Stabilité des positions d'équilibre

Ce théorème est une condition suffisante de stabilité et est considéré comme un cas particulier du théorème de Liapunov.

Hypothèses :
- $T(\Sigma / R_g)$ **ne dépend pas du temps**
- **les liaisons sont parfaites**
- **les efforts dérivent d'une fonction de force U schléronome**

Théorème

Etant donné un système conservatif, tout maximum local strict de la fonction de force U (minimum local strict du potentiel V) définit une position d'équilibre stable.

1- Système à un paramètre q :

a- Positions d'équilibre

Elles sont obtenues en résolvant :

$$\frac{dU}{dq} = 0$$

La résolution de cette équation donne les positions d'équilibre q*.
Il y a en général plusieurs solutions

b- Stabilité

La stabilité s'étudie en calculant la dérivée seconde

$$\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_e}$$

- Si

$$\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_e} \prec 0$$

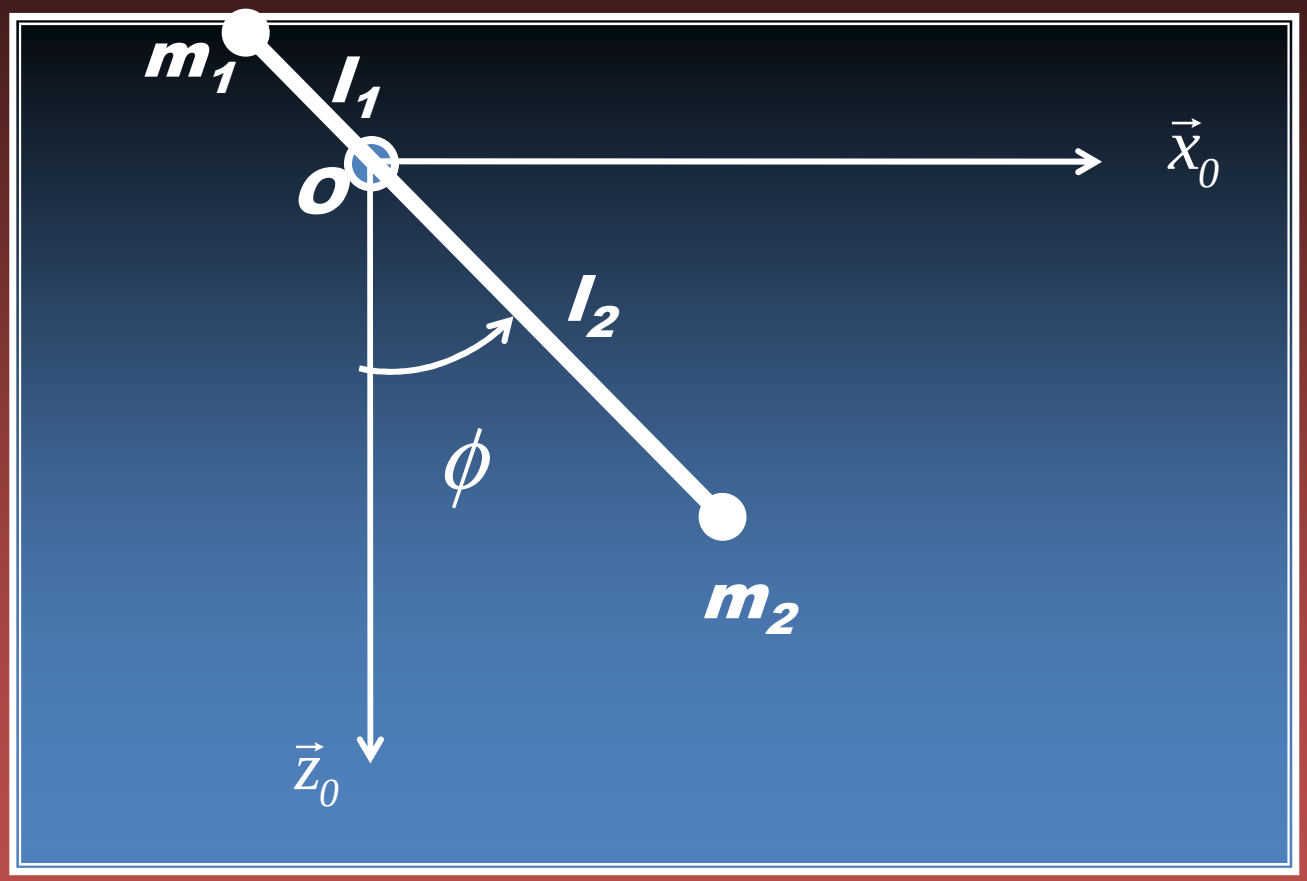
<u>l'équilibre est stable</u>

- Si

$$\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_e} \succ 0$$

<u>l'équilibre est instable</u>

<u>Exemple</u> : équilibre et stabilité d'un pendule à deux masses



Un pendule menu de 2 balanciers est articulé en O sans frottement. Trouver la condition de stabilité pour la position verticale $\phi = 0$.

$$U = m_2 g l_2 \cos\phi - m_1 g l_1 \cos\phi + C$$

$$U = g(m_2 l_2 - m_1 l_1)\cos\phi + C$$

-Cas où : $m_2 l_2 - m_1 l_1 \neq 0$

a- Positions d'équilibre

$$\frac{dU}{d\phi} = -g(m_2 l_2 - m_1 l_1)\sin\phi = 0$$

$$\frac{dU}{d\phi} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi = \pi \end{cases}$$

(position verticale)

Stabilité autour de la position $\phi = 0$

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} = -g(m_2 l_2 - m_1 l_1)\cos\phi$$

$$\left(\frac{d^2U}{d\phi^2}\right)_{\phi=0} = -g(m_2 l_2 - m_1 l_1)$$

$$\begin{cases} -Si\ \ (m_2 l_2 - m_1 l_1) \succ 0\ \ \text{équilibre stable} \\ -Si\ \ (m_2 l_2 - m_1 l_1) \prec 0\ \ \text{équilibre instable} \end{cases}$$

- Cas particulier où $$m_2 l_2 - m_1 l_1 = 0$$

On a alors : $$U = Cte$$

$$\frac{dU}{d\phi} = 0$$

Dans ce cas il y a équilibre dans toutes les positions.
On dit que l'équilibre est <u>astatique</u>.

2- Système à deux paramètres q_1 et q_2 :

a- Positions d'équilibre

Elles sont obtenues en résolvant :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

La résolution de ces 2 équations donne une série de valeurs.

$$(q_1 = q_1^*; q_2 = q_2^*)$$

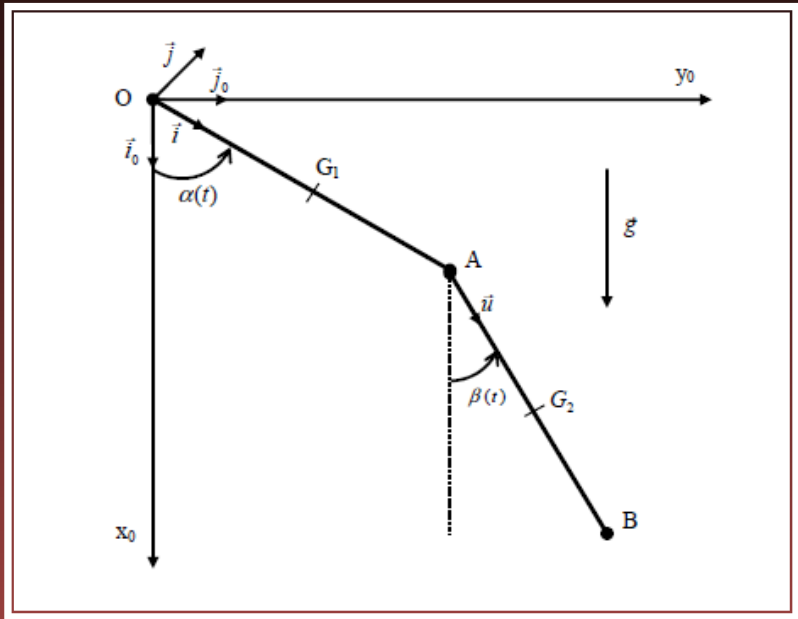
b- Stabilité

Les conditions de stabilité sont données par :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)-\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right) \succ 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_i^2}\right) \prec 0 \end{cases}$$

Conditions de Schwartz

Exemple 1: double pendule (voir TD1)



$$U(\alpha,\beta) = mgl(3\cos\alpha + \cos\beta) + Cte$$ **(voir TD1)**

Etudions la stabilité autour des positions:

$$(\alpha,\beta) = (0,0)$$

$$(\alpha,\beta) = (0,\pi)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -3mgl\cos\alpha, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = -mgl\cos\beta, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

D'où la matrice de la dérivée seconde:

$$en \ \ (\alpha, \beta) = (0,0): \begin{pmatrix} -3mgl & 0 \\ 0 & -mgl \end{pmatrix}$$

$$en \ \ (\alpha, \beta) = (0, \pi): \begin{pmatrix} -3mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}$$

Le théorème de Lejeune-Dirichlet permet d'affirmer que la position d'équilibre (0, 0) est stable; mais ne permet pas d'affirmer que la position d'équilibre $(0, \pi)$ **est stable. Il ne permet pas non plus d'affirmer qu'elle est instable, car il ne donne qu'une condition suffisante de stabilité.**

Exemple 2

Soit la fonction de force :

$$U(\theta,\phi) = Mgl\left(\cos\theta - \frac{b}{l}\cos\phi\sin\theta\right) + C$$

avec

$$b = l\sqrt{3}$$

a- Positions d'équilibre

Elles sont données par :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -Mgl\sin\theta - Mgb\cos\phi\cos\theta \\ \dfrac{\partial U}{\partial \phi} = Mgb\sin\phi\sin\theta \end{cases}$$

D'où les équations:

$$\begin{cases} -l\sin\theta - b\cos\phi\cos\theta = 0 \\ \sin\phi\sin\theta = 0 \end{cases}$$

1-

$$\sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \phi = \pi \end{cases}$$

$$\phi = 0 \Rightarrow \tan\theta = -\frac{b}{l} = -\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = -\dfrac{\pi}{3} \\ \theta_1^{'} = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\phi = \pi \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{l} = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 = \dfrac{\pi}{3} \\ \theta_2^{'} = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

2-

$$\sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$\cos\phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi = \dfrac{\pi}{2} \\ \phi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

b- Etude de la stabilité de la position :

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ \theta = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -Mgl\cos\theta + Mgb\cos\phi\sin\theta$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_{\substack{\phi=0 \\ \theta=-\frac{\pi}{3}}} = -Mgl\frac{1}{2} - Mgl\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -2Mgl \prec 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = Mgb\cos\phi\sin\theta$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}\right)_{\substack{\phi=0 \\ \theta=-\frac{\pi}{3}}} = -Mgl\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}Mgl \prec 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\phi} = Mgb\sin\phi\cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\phi}\right)_{\substack{\phi=0\\ \theta=-\frac{\pi}{3}}} = 0$$

On a immédiatement:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial^2 \theta^2}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial^2 \phi^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \phi}\right) \succ 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial^2 \theta^2}\right) \prec 0 \end{cases}$$

<u>Les conditions de Schwartz sont satisfaites</u>.

Donc l'équilibre est stable

3- Système à n paramètres :

a- Positions d'équilibre

Elles sont obtenues en résolvant :

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0; \quad i = 1, \ldots, n$$

b- Stabilité

Une condition suffisante pour que la fonction de force U admette un maximum local strict en $(q)_e$ est que la dérivée seconde en q_i soit une forme bilinéaire symétrique définie négative :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q_e}$$

càd soit une matrice à valeurs propres négatives.

Cas de 3 paramètres (q_1, q_2, q_3)

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3 \partial q_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial q_3^2} \end{pmatrix}$$

Exercice d'application

Soit la fonction de force suivante :

$$U(\alpha,\beta,\gamma) = mgl(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$

Déterminer les positions d'équilibre et étudier la stabilité des 2 positions :

$$(0,0,0) \;\; et \;\; (\pi,\pi,\pi)$$

Les positions d'équilibre sont données par :

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0; \;\; i = 1,\ldots,3$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} = -mgl\sin\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \pi \end{cases} \\
\dfrac{\partial U}{\partial \beta} = -mgl\sin\beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = \pi \end{cases} \\
\dfrac{\partial U}{\partial \gamma} = -mgl\sin\gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \gamma = \pi \end{cases}
\end{cases}
$$

Les 8 positions d'équilibre sont données par :

$$\begin{cases} (0,0,0) \\ (0,0,\pi) \\ (0,\pi,0) \\ (\pi,0,0) \end{cases} \qquad \begin{cases} (0,\pi,\pi) \\ (\pi,0,\pi) \\ (\pi,\pi,0) \\ (\pi,\pi,\pi) \end{cases}$$

Dérivées secondes:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{i \neq j}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -mgl\cos\alpha \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = -mgl\cos\beta \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} = -mgl\cos\gamma \end{cases}$$

Stabilité de la position d'équilibre (0, 0, 0)

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -mgl & 0 & 0 \\ 0 & -mgl & 0 \\ 0 & 0 & -mgl \end{pmatrix}$$

Donc la position d'équilibre (0, 0, 0) est stable

Stabilité de la position d'équilibre (π,π,π)

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{(\pi,\pi,\pi)} = \begin{pmatrix} mgl & 0 & 0 \\ 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & mgl \end{pmatrix}$$

On ne peut pas dire que cette position est stable mais on ne peut pas dire non plus qu'elle est instable car le théorème de Lejeune-Dirichlet ne donne qu'une condition suffisante de stabilité.

En résumé

Système à un seul paramètre	
Fonction de force	U=U(q)
Condition d'équilibre	$\frac{dU}{dq}=0$
Condition de stabilité	$\left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_e} \prec 0$

Système à deux paramètres

Fonction de force	**$U=U(q_1, q_2)$**
Conditions d'équilibre	$\frac{\partial U}{\partial q_1}=0$ $\frac{\partial U}{\partial q_2}=0$
Conditions de stabilité	$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right) \succ 0 \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i^2}\right) \prec 0 \end{cases}$

Système à n paramètres	
Fonction de force	$U=U(q_1,\ldots, q_n)$
Conditions d'équilibre	$\frac{\partial U}{\partial q_i}=0;\ i=1,\ldots,n$
Conditions de stabilité	$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q_e}$ **à valeurs propres négatives**

§-4-

Linéarisation des équations de Lagrange

Conditions d'application

- L'écriture directe des équations des petits mouvements est limitée aux cas où :
  - L'énergie cinétique dépend de N paramètres q_i indépendant et sans contribution explicite du temps (pas de $\alpha=\Omega t$ par exemple)
  - Tous les efforts autres que les AM de liaison dérivent d'une énergie potentielle (pas de moteur notamment)
  - Toutes les liaisons sont parfaites
  - Il existe une position d'équilibre locale qu'on supposera correspondre à tous les $q_i=0$ (si ce n'est pas le cas, un changement de variables $\varepsilon_i=q_i-q_{ie}$ nous ramène dans la même configuration)

Energie cinétique réduite

- Développement à l'ordre 2 de l'énergie cinétique T(Σ/Rg)
  - S'il n'y a pas de contribution du temps alors l'énergie cinétique du système de solides étudié est de la forme suivante :

$$\boxed{T(\Sigma/Rg) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(q_1, q_2 \ldots, q_N)\dot{q}_i\dot{q}_j}$$

  - Développement limité des fonctions a_{ij} :

$$a_{ij}(q_1, q_2 \ldots, q_N) = a_{ij}(0, 0 \ldots, 0) + \sum_i \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_i}\right)_{q=0} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q=0} q_i q_i + \ldots$$

  - On se limite à l'ordre 0 et on pose :

$$\boxed{m_{ij} = a_{ij}(q = 0)}$$

m_{ij} sont des constantes (indépendantes des paramètres q_i) et $m_{ij}=m_{ji}$

Energie potentielle réduite

- Développement à l'ordre 2 de l'énergie potentielle U(Σ)
  - On procède au développement limité de U par rapport aux paramètres q_i :

$$U(q_1, q_2 \ldots, q_N) = U(0, 0 \ldots, 0) + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q=0} q_i q_i + \ldots$$

  - La position d'équilibre est définie par les N dérivées de U par rapport aux q_i :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q=0} = 0$$

  - On pose k_{ij} pour les dérivées 2nde de U : $\boxed{k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_{q=0}}$

Par conséquent : $k_{ij} = k_{ji}$

Matrice de masse, matrice de raideur

- Extraction des termes m_{ij} de l'énergie cinétique réduite

$$\boxed{T_r(\Sigma / Rg) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j} \Rightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Si N=3

- Extraction des termes k_{ij} de l'énergie potentielle réduite

$$\boxed{U^*(\Sigma) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k_{ij}q_iq_j} \Rightarrow \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}$$

Si N=3

Ecriture directe du système d'équations sous forme matricielle

- L'équation de Lagrange « linéarisée » pour le paramètre q_k s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial T_r(\Sigma/Rg)}{\partial \dot{q}_k}}_{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} m_{ik}\dot{q}_i + m_{kj}\dot{q}_j}\right) - \underbrace{\frac{\partial T_r(\Sigma/Rg)}{\partial q_k}}_{\substack{0 \text{ car pas de} \\ \text{dépendance} \\ \text{en } q_k}} = \sum_{i=1}^{N} m_{ij}\ddot{q}_i \Rightarrow \underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{\partial U^*(\Sigma)}{\partial q_k}}_{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} k_{ik}q_i + k_{kj}q_j} = \sum_{i=1}^{N} k_{ij}q_i \Rightarrow \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = 0}$$

Résolution du système d'équations

$M\ddot{q}+Kq=0$

- On cherche $\underline{q}$ sous la forme :

$$\underline{q} = \cos(\omega t)\underline{a} + \sin(\omega t)\underline{b}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{q}} = -\omega^2 \cos(\omega t)\underline{a} - \omega^2 \sin(\omega t)\underline{b} = -\omega^2 \underline{q}$$

- L'équation à résoudre donne :

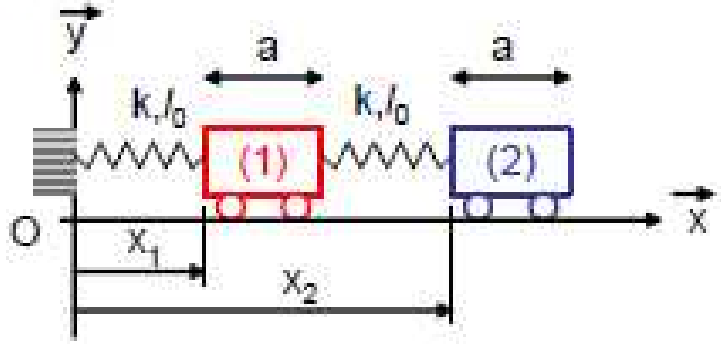
$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = 0 \Rightarrow \left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right)\underline{q} = 0$$

- La condition pour que $\underline{q}$ soit non nul :

$$\det\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Polynôme de degré N en } \omega^2$$

Les N racines du polynôme sont les N pulsations propres du système (pulsations du mouvement libre de la structure), les vecteurs propres associés sont les modes propres (géométrie de la déformée lors des oscillations à chaque pulsation)

Application : Wagonnets



- Energies :

$$T(\Sigma / R_g) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^{\,2} + \dot{x}_2^{\,2} \right)$$

$$U(ressorts) = \frac{1}{2} \left(k x_1^{\,2} + k (x_1 - x_2)^2 \right)$$

- Les énergies sont déjà réduites → les matrices :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

- Le système s'écrit : $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{q} = 0$ avec : $\underline{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}} \right) \underline{q} = 0}$$

Problème aux valeurs propres

$$\omega^4 - 3\omega_0^{\,2}\omega^2 + \omega_0^{\,4} = 0$$

avec : $\omega_0^{\,2} = \dfrac{k}{m}$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1^{\,2} &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\omega_0^{\,2} \\ \omega_2^{\,2} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\omega_0^{\,2} \end{aligned}}$$

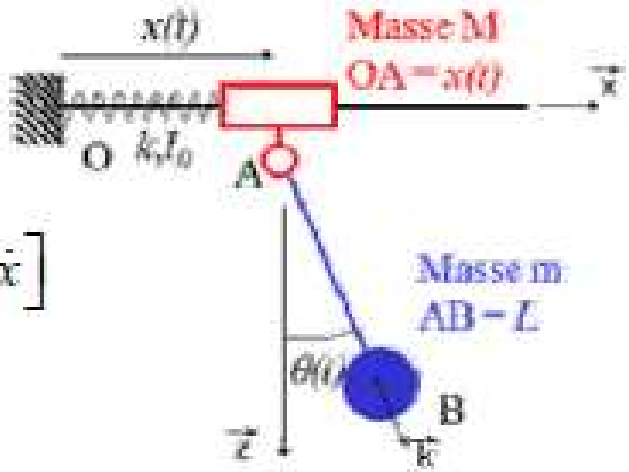
2 pulsations propres

Application : Pont roulant

- Energies :

$$T\left(\Sigma / R_g\right)=\frac{1}{2}\left[(M+m)\dot{x}^2+m\left(L^2\dot{\theta}^2+2L\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)\right]$$

$$U(pes.+ressort)=\frac{1}{2}kx^2-mgL\cos\theta$$



- Energies réduites :

$$T_r\left(\Sigma / R_g\right)=\frac{1}{2}\left[(M+m)\dot{x}^2+mL^2\dot{\theta}^2+2mL\dot{\theta}\dot{x}\right]$$

$$U^*(pes.+ressort)=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mgL\theta^2+cte$$

- Matrices :

$$\underline{\underline{M}}=\begin{bmatrix} M+m & mL \\ mL & mL^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{K}}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{q}}+\underline{\underline{K}}\,\underline{q}=0 \quad \text{avec : } \underline{q}=\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}}$$

§-5-

Systèmes dissipatifs
(cas général)
Théorème de Liapunov

Théorème de Liapunov

1- Oscillateur linéaire

L'étude de stabilité est entreprise par la détermination des petits mouvements au voisinage des positions d'équilibre, car en l'absence de potentiel, il est impossible d'utiliser la condition suffisante de stabilité.

Si nous supposons l'existence de petits mouvements autour de la position d'équilibre étudiée, nous pouvons écrire les équations de Lagrange linéarisées en ne conservant que les termes de premier ordre en $q_i, \dot{q}_i$ *et* $\ddot{q}_i$ **. Il vient:**

$$a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}\dot{q}_j + c_{ij}q_j = f_i(t)$$

$f_i(t)$ représente les forces données qui sont les seuls termes à dépendre explicitement du temps, les a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des constantes et la matrice a_{ij} est symétrique.

Le systèmes mécanique obéissant au système linéaire ainsi formé est appelé <u>oscillateur linéaire associé</u> (L).
Si $f_i(t) = 0$ l'oscillateur est dit <u>libre</u>.

2- Théorème de Liapunov

Soit (L) l'oscillateur linéaire associé au système mécanique étudié et à la position d'équilibre (S_0):

- Si toutes les racines de l'équation caractéristique de (L) ont leur partie réelle négative alors (S_0) est <u>stable</u>.

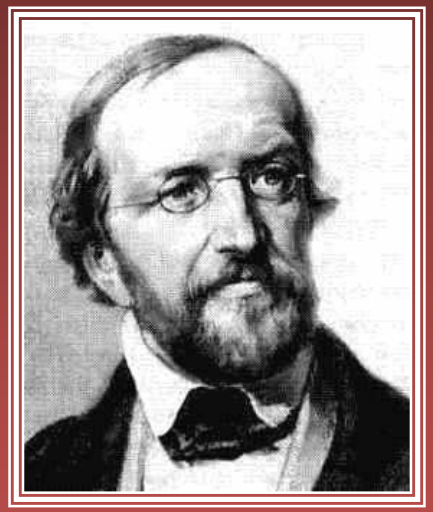
- Si l'une au moins a une partie réelle positive, (S_0) est <u>instable</u>.

- Si l'une au moins a une partie réelle nulle <u>on ne peut pas conclure</u>. Il faut faire une étude directe sauf si on peut écrire l'intégrale première de l'énergie cinétique, mais dans ce cas on se retrouve dans le cas d'un système conservatif.

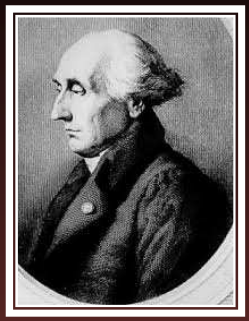
Mise en œuvre

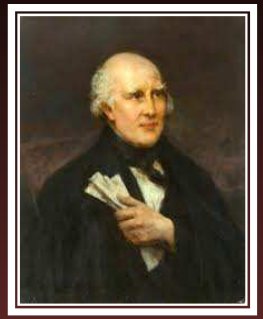
☞ **Voir application pédagogique**

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{q_e}}_{\text{matrice à valeurs propres négatives}}$$



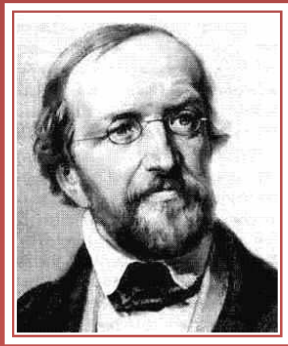
$$\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_e}}_{\text{position d'équilibre}} = 0$$





Et maintenant, c'est à vous de jouer,

à vos dossiers pédagogiques.



FIN DU CHAPITRE 4

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 Département de physique
Faculté des sciences
Agadir

email: r.mesrar@uiz.ac.ma