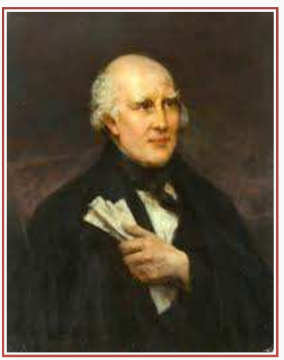


MECANIQUE ANALYTIQUE SMP5



Rachid MESRAR

Professeur de l'enseignement supérieur

Bureau 37 département de physique

Faculté des sciences

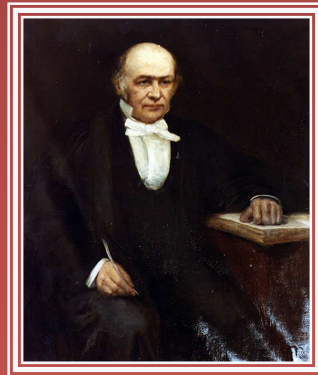
Agadir

email: r.mesrar@uiz.ac.ma

CHAPITRE 5 : FORMALISME HAMILTONIEN

Préambule

« Le formalisme hamiltonien transforme le système des n équations du second ordre de Lagrange en un système de $2n$ équations du premier ordre qui nécessite la connaissance des conditions initiales permettant de déterminer les $2n$ constantes arbitraires issues de leur intégration »



**R. Hamilton
(1805-1865)**

CHAPITRE 5 : FORMALISME HAMILTONIEN

Objectifs pédagogiques

-  **Introduire le Hamiltonien d'un système**
-  **Etablir les équations canoniques de Hamilton**
-  **Comprendre les transformations canoniques**
-  **Introduire la notion de crochets de Poisson**
-  **Comprendre le formalisme de Hamiltonj-Jacobi**

CHAPITRE 5 : FORMALISME HAMILTONIEN

Notions abordées

-  **Impulsion généralisée**
-  **Espace des phases**
-  **Fonction de Hamilton ou Hamiltonien**
-  **Equations canoniques**
-  **Crochets de Poisson-Structure symplectique**
-  **Identité de Jacobi**

CHAPITRE 5 : FORMALISME HAMILTONIEN

Notions abordées - suite

-  **Transformations canoniques**
-  **Fonctions génératrices**
-  **Intégrale première du mouvement**
-  **Equation de Hamilton-Jacobi (EHJ)**
-  **Equation caractéristique**

CHAPITRE 5 : FORMALISME HAMILTONIEN

PLAN DU CHAPITRE 5

- 1- Introduction**
- 2- Formalisme de Hamilton**
- 3- Crochets de Poisson**
- 4- Transformations canoniques**
- 5- Formalisme de Hamilton-Jacobi**

§-1-

Formalisme Hamiltonien
Equations canoniques

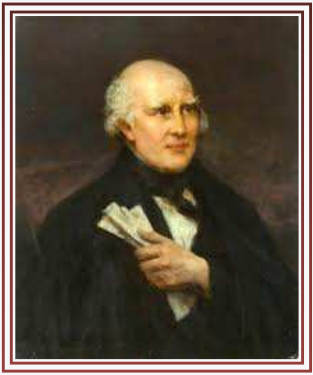
Introduction

Le formalisme hamiltonien n'introduit rien de nouveau dans les concepts de la physique ; il ne simplifie pas énormément la résolution des équations de Lagrange qui décrivent les phénomènes de la mécanique, mais il a permis des avancées considérables dans la résolution des problèmes en mécanique classique avec la théorie de Hamilton-Jacobi et les calculs des perturbations.

C'est de plus le langage par excellence de la mécanique statistique et de la mécanique quantique.

Formalisme canonique de Hamilton

William R. Hamilton (1805-1865)



Philosophie générale



Décrire le système par les variables (q_i, p_i) , au lieu $(q_i, \dot{q}_i)$



Exprimer $\dot{q}_i$ en fonction des p_i et q_i

Formalisme canonique de Hamilton

Hypothèses :



Les paramètres de configuration sont indépendants



Possibilité d'indépendance du temps



Existence d'un potentiel



Liaisons parfaites

Formalisme canonique de Hamilton

Définition 1: impulsion généralisée

On appelle impulsions généralisées, moments généralisés ou encore moments conjugués, les quantités définies par :



$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Définition 2: espace des phases

On appelle espace des phases du système l'espace (q_i, p_i) à $2n$ dimensions. L'état dynamique du système à un instant t est entièrement caractérisé par un point de cet espace. Lorsque le temps varie, le point représentatif du système décrit une courbe dans l'espace des phases, appelée hypertrajectoire.

Toute hypertrajectoire correspond à des conditions initiales déterminées

Formalisme canonique de Hamilton

Définition 3 : Hamiltonien

La fonction de Hamilton ou Hamiltonien H est défini comme la transformée de Legendre du Lagrangien L en $\dot{q}_i$:



$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

où les $\dot{q}_i$ sont remplacées en fonction de leurs expressions

$$\dot{q}_i = f(q_i, p_i, t)$$

H est en définitive une fonction des q_i et des p_i :

$$H = H(q_i, p_i, t)$$

Formalisme canonique de Hamilton

Equations canoniques

$$\begin{aligned} dH &= \underbrace{\sum_i \dot{q}_i dp_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i}_{d(p_i \dot{q}_i)} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt}_{dL} \\ &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

D'où :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow n \text{ équations}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \rightarrow n \text{ équations}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Si H ne dépend pas explicitement du temps, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

On sait que la trajectoire physique obéit à l'équation d'Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$$

Ce qui donne



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Equations canoniques

La dynamique du système est régie par 2n équations différentielles du premier ordre. Ces 2n équations remplacent les n équations d'Euler-Lagrange.

Remarque

L'apparition du signe (-) entre les équations pour les q_i et celles pour les moments conjugués, s'appelle symétrie symplectique.

Remarque 1

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Les moments conjugués des variables cycliques sont des intégrales premières, ce qui donne:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Si le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, alors il y a conservation de l'énergie mécanique totale du système:

$$H = T + V = Cte$$

Remarque 2

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Sur une trajectoire qui obéit aux équations canoniques, on a:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= - \sum_i \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Equations canoniques à partir du principe de moindre action

Nous allons établir cette fois-ci les équations canoniques de Hamilton à partir du principe de moindre action :

$$S = \int L dt = \int (p_k \dot{q}_k - H) dt$$

On prend le cas d'un système à 1 degré de liberté, l'accroissement de l'action due au chemin varié est

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int (p_k \dot{q}_k - H) dt \\ &= \int \left(\dot{q} \delta p + p \frac{d\delta q}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt \\ &= \int \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt + [p \delta q]_1^2 \end{aligned}$$

comme $\delta q(1) = \delta q(2)$; p et q sont indépendantes et arbitraires, alors δS est nulle si

$$\begin{cases} \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0 & \implies \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0 & \implies \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad \square$$

Fiche de synthèse 1



Ce qu'il faut absolument savoir

Impulsion généralisée



$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Hamiltonien



$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Equations canoniques



$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\end{aligned}$$

Méthodologie à suivre pour résoudre un problème en utilisant le formalisme hamiltonien (voir TD4)

- 1- Calculer H**
- 2- Calculer p_i**
- 3- Exprimer $\dot{q}_i$ en fonction de p_i**
- 4- Reporter le résultat dans H et l'exprimer en fonction de (q_i, p_i, t)**
- 5- Ecrire les équations canoniques**

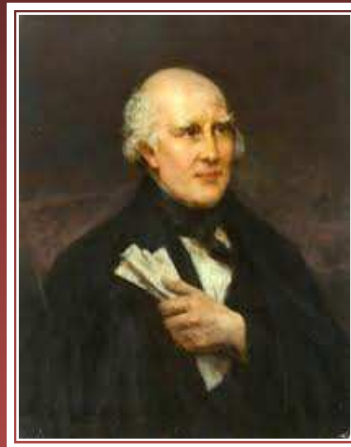
Mise en œuvre



Voir applications pédagogiques

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Hamiltonien



$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\end{aligned}$$

Equations canoniques



Moments conjugués

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

TD4

Application pédagogique n° 1

Hamiltonien en coordonnées polaires

On considère une particule de masse m placé dans un potentiel de la forme :

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}$$

- 1- Ecrire le lagrangien puis le hamiltonien du système en coordonnées polaires r et θ .**
- 2- Exprimer le hamiltonien H en fonction de P_r et P_θ .**
- 3- Pourquoi $H = E = \text{Cte}$, pourquoi P_θ est une constante du mouvement.**
- 4- Ecrire les équations canoniques et exprimer $\dot{\theta}$ et $\dot{r}$ en fonction de P_θ et P_r .**

1-

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{e^2}{r}$$

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{e^2}{r}$$

2-

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{m}$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}$$

$$H(r, \theta) = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$$

3- $H = E = \text{Cte}$ car

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$P_\theta = \text{Cte}$$

car

$$\theta$$

est une variable cyclique.

4- Equations canoniques

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \\ \dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{P_\theta^2}{mr^3} - \frac{e^2}{r^2} \end{array} \right.$$

Application pédagogique n° 2

Hamiltonien en coordonnées sphériques

Soit une particule de masse m , soumise à l'action d'un champ de forces. Son énergie potentielle est donnée par :

$$V(r, \theta, \varphi) = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

- 1- Etablir le Hamiltonien en coordonnées sphériques.
- 2- Déterminer les équations canoniques de Hamilton.

1-

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

$$V(r, \theta, \varphi) = f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

$$H = T + V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Impulsion généralisée et moments conjugués

$$\left\{ \begin{array}{l} P_r = \frac{\partial H}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{m} \\ P_\theta = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \\ P_\phi = \frac{\partial H}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + f(r) + \frac{g(\theta)}{r^2} + \frac{h(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

2- Equations canoniques

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

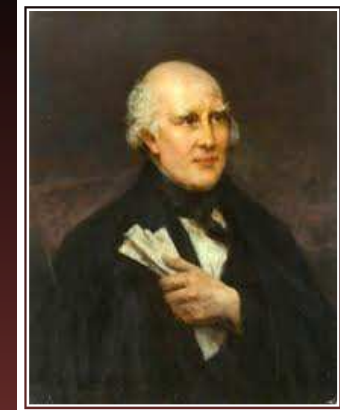
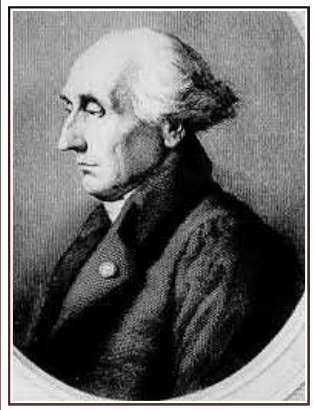


$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

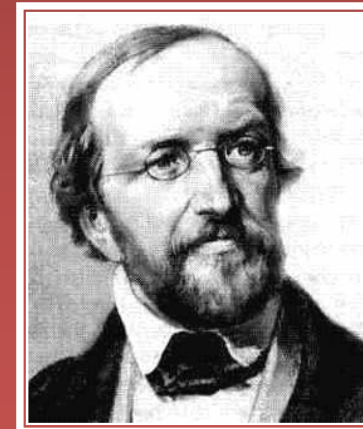


$$\left\{ \begin{aligned} \dot{P}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} \left(P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) - f'(r) + \frac{2}{r^3} \left(g(\theta) + \frac{h(\varphi)}{\sin^2 \theta} \right) \\ \dot{P}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} P_\varphi^2 - \frac{1}{r^2} \left(g'(\theta) - \frac{2h(\varphi) \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \\ \dot{P}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{h'(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \right.$$



Et maintenant, c'est à vous de jouer.

A vos dossiers pédagogiques.



§-2-

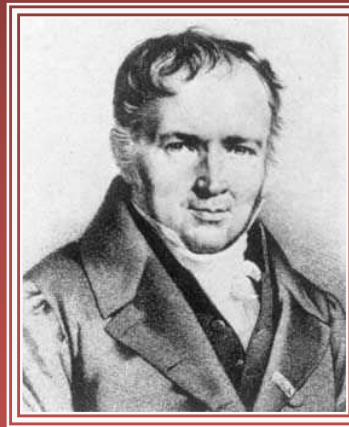
Crochets de poisson

Crochets de Poisson

« On introduit la notion de crochets de Poisson pour leur analogie avec les commutateurs de la mécanique quantique »



C'est un pont vers la mécanique quantique



Denis Poisson (1781-1840)

Il est intéressant de reformuler les équations canoniques à l'aide des crochets de Poisson. Ce formalisme s'avère en particulier très utile pour comprendre le passage de la dynamique classique à la dynamique quantique, que le système possède un nombre fini de degrés de liberté, comme c'est le cas dans ce chapitre, ou qu'il possède un nombre infini de degrés de liberté.

Par ailleurs, la dissymétrie apparente entre les deux jeux d'équation de Hamilton peut être cachée pudiquement en introduisant les crochets de Poisson.

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$


On appelle crochets de poisson entre deux fonctions $f(q_i, p_i, t)$ et $g(q_i, p_i, t)$ définies dans l'espace des phases l'expression suivante :

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

Cette notation permet d'écrire pour toute fonction des q_i et p_i et éventuellement le temps, la relation bien plus générale :

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

or

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

**(équations
canoniques)**

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Si f ne dépend pas explicitement du temps :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Pour qu'elle soit une intégrale première, il suffit que :

$$\{f, H\} = 0$$

Ceci permet de mettre les équations canoniques de Hamilton sous forme plus symétrique :

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}$$

En effet :

$$\{q_i, H\} = \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_i}}_{=1} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_i}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\{p_i, H\} = \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_i}}_{=1} \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

**variables
indépendantes**

On en déduit que le hamiltonien lui-même vérifie :

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\{H, H\}}_{=0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Ce qui établit que le hamiltonien garde une valeur constante (l'énergie) si il ne dépend pas explicitement du temps.

Plus généralement, on appellera « constante du mouvement » tout opérateur ne dépendant pas explicitement du temps et dont le crochet de Poisson avec H est nul.

Structure symplectique et transformations canoniques

Le crochet de poisson est un élément central de l'approche hamiltonienne, qui met sur un pied d'égalité les $2n$ variables dynamiques. Du point de vue mathématique, il s'agit d'un produit bilinéaire antisymétrique qui dote l'espace des phases d'une structure algébrique dite structure «symplectique».

On constate que dans le cas particulier où

$f = q_k$ et $g = p_k$ on a:

$$\{q_i, p_j\} = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$$

et on obtient les crochets de Poisson entre les variables conjugués :

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \text{ et } \{q_i, q_j\} = 0 \text{ et } \{p_i, p_j\} = 0$$

Propriétés des crochets de Poisson

Nous présentons quelques propriétés

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, c\} &= 0 \quad (c \text{ est une constante}) \\ \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \\ \{f_1 f_2, g\} &= f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2 \\ \frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \\ \{f, q_i\} &= -\frac{\partial f}{\partial p_i} \\ \{f, p_i\} &= \frac{\partial f}{\partial q_i}\end{aligned}$$

On appelle par l'identité de Jacobi, l'expression suivante

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$$

On démontre aussi que

$$\frac{d}{dt} \{f, g\} = \left\{ \frac{df}{dt}, g \right\} + \left\{ f, \frac{dg}{dt} \right\}$$

Propriétés des crochets de Poisson



$$(A, B)_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

Propriété n° 1



$$(A, B) = -(B, A)$$

$$\begin{aligned} (A, B) &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} + \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \right] \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \right] \\ &= -(B, A) \end{aligned}$$

Propriété n° 2



$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$$

$$\begin{aligned}\{A, B + C\} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial (B + C)}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial (B + C)}{\partial q_i} \right] \\&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \left(\frac{\partial B}{\partial p_i} + \frac{\partial C}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} + \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) \right] \\&= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) \right] \\&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right] \\&= \{A, B\} + \{A, C\}\end{aligned}$$

Propriété n° 3



$$\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C$$

$$\begin{aligned}\{A, B.C\} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial (B.C)}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial (B.C)}{\partial q_i} \right] \\&= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \left(B \frac{\partial C}{\partial p_i} + C \frac{\partial B}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(B \frac{\partial C}{\partial q_i} + C \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \right] \\&= \sum_{i=1}^n \left[B \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right) + C \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \right] \\&= B \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] + C \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial C}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial C}{\partial q_i} \right] \\&= B\{A, C\} + C\{A, B\}\end{aligned}$$

Propriété n° 4



$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$

$$\begin{aligned} & \{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\partial_q A \partial_p \sum_{i=1}^n [\partial_q B \partial_p C - \partial_p B \partial_q C] - \partial_p A \partial_q \left(\sum_{i=1}^n [\partial_q B \partial_p C - \partial_p B \partial_q C] \right) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\partial_q C \partial_p \sum_{i=1}^n [\partial_q A \partial_p B - \partial_p A \partial_q B] - \partial_p C \partial_q \left(\sum_{i=1}^n [\partial_q A \partial_p B - \partial_p A \partial_q B] \right) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\partial_q B \partial_p \sum_{i=1}^n [\partial_q C \partial_p A - \partial_p C \partial_q A] - \partial_p B \partial_q \left(\sum_{i=1}^n [\partial_q C \partial_p A - \partial_p C \partial_q A] \right) \right] \end{aligned}$$

Pour n = 1

$$\begin{aligned} & \{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} \\ &= \partial_q A \partial_p \left[\partial_q B \partial_p C - \partial_p B \partial_q C \right] - \partial_p A \partial_q \left[\partial_q B \partial_p C - \partial_p B \partial_q C \right] \\ &+ \partial_q C \partial_p \left[\partial_q A \partial_p B - \partial_p A \partial_q B \right] - \partial_p C \partial_q \left[\partial_q A \partial_p B - \partial_p A \partial_q B \right] \\ &+ \partial_q B \partial_p \left[\partial_q C \partial_p A - \partial_p C \partial_q A \right] - \partial_p B \partial_q \left[\partial_q C \partial_p A - \partial_p C \partial_q A \right] \\ &= \partial_q A \partial_{p,q} B \partial_p C + \partial_q A \partial_q B \partial_{p,p} C - \partial_q A \partial_{p,p} B \partial_q C - \partial_q A \partial_p B \partial_{p,q} C \\ &- \partial_p A \partial_{q,q} B \partial_p C - \partial_p A \partial_q B \partial_{q,p} C + \partial_p A \partial_{q,p} B \partial_q C + \partial_p A \partial_p B \partial_{q,q} C \\ &+ \partial_q C \partial_{p,q} A \partial_p B + \partial_q C \partial_q A \partial_{p,p} B - \partial_q C \partial_{p,p} A \partial_q B - \partial_q C \partial_p A \partial_{p,q} B \\ &- \partial_p C \partial_{q,q} A \partial_p B - \partial_p C \partial_q A \partial_{q,p} B + \partial_p C \partial_{q,p} A \partial_q B + \partial_p C \partial_p A \partial_{q,q} B \\ &+ \partial_q B \partial_{p,q} C \partial_p A + \partial_q B \partial_q C \partial_{p,p} A - \partial_q B \partial_{p,p} C \partial_q A - \partial_q B \partial_p C \partial_{p,q} A \\ &- \partial_p B \partial_{q,q} C \partial_p A - \partial_p B \partial_q C \partial_{q,p} A + \partial_p B \partial_{q,p} C \partial_q A + \partial_p B \partial_p C \partial_{q,q} A \end{aligned}$$

Or

$$\partial_{p,q} = \partial_{q,p}$$

d'où :

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$



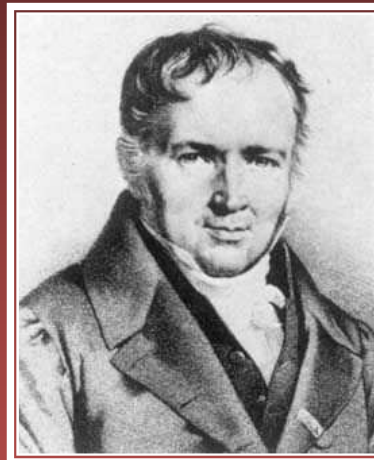
C'est l'identité de Jacobi

Mise en œuvre



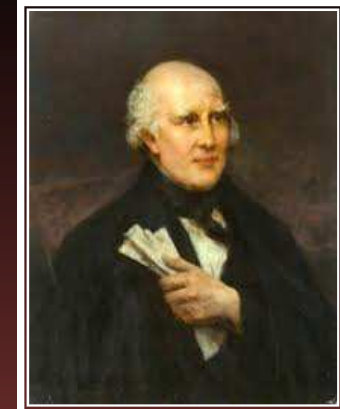
Voir applications pédagogiques

$$\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$



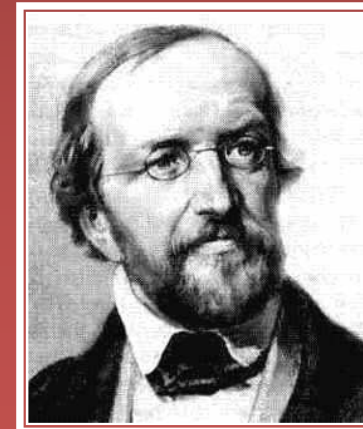
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (f, g)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$



Et maintenant, c'est à vous de jouer.

A vos dossiers pédagogiques.



§-3-

Transformations canoniques

Transformations canoniques (TC)

De même que dans un espace vectoriel euclidien, on peut s'intéresser à des « isométries », c'est-à-dire à des transformations qui conservent la structure euclidienne. Dans l'espace des phases, on peut considérer des transformations qui conservent le crochet de Poisson et qui sont alors appelées « transformations canoniques ».

Translation, rotation, homothétie,...etc.

On dit que des q_i et des p_i que ce sont des variables canoniques généralisées. Ce n'est pas un euphémisme puisqu'il n'y a pratiquement aucune limite à ce qu'elles peuvent représenter physiquement. Nous en verrons d'ailleurs à quelques exemples. Puisque tel est le cas, il doit exister des transformations entre ces différents choix. Nous noterons Q_i et P_i les nouvelles variables canoniques obtenues suite à une telle transformation.

$$q_i, p_i \xrightarrow{\text{T.C.}} Q_i, P_i$$

On n'est pas surpris par contre de constater que ces transformations sont soumises à des conditions assez sévères. En effet, les q_i et p_i sont généralisés mais obéissent à

$$\{q_k, q_j\} = 0, \quad \{p_k, p_j\} = 0, \quad \{q_k, p_j\} = \delta_{kj} \quad (4.89)$$

et les équations canoniques

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.90)$$

sont invariantes de forme. Ainsi, à la suite d'une transformation des q_i et p_i vers les Q_i et P_i et définissant un nouvel hamiltonien que nous noterons $H'(Q_i, P_i)$, c'est-à-dire

$$q_i, p_i, H(q_i, p_i) \xrightarrow{\text{T.C.}} Q_i, P_i, H'(Q_i, P_i)$$

Transformations canoniques (TC)

Principe de base



Changement de variables dans l'espace des phases :

$$(q_i, p_i) \longrightarrow (Q_i, P_i)$$

Soit le système canonique associé à l'hamiltonien $H(q_i, p_i, t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, n \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Effectuons la transformation suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_j = Q_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \\ P_j = P_j(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \end{array} \right.$$

Définition

Une transformation canonique est une transformation inversible des $2n$ variables (q_i, p_i) en $2n$ variables (Q_i, P_i) , tel que les équations du mouvement soient encore canoniques. C'est-à-dire qu'il existe une fonction $K(Q_i, P_i, t)$ telle que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad i = 1, \dots, n \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \quad i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

« Le hamiltonien change mais pas les équations canoniques »

Condition suffisante pour qu'une transformation soit canonique

Soit $F(q_i, Q_i)$ une fonction quelconque, et considérons la transformation:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}; \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}; \quad i = 1, \dots, n$$

C'est une transformation des variables (q_i, p_i) en les variables (Q_i, P_i) .

Pour qu'une telle transformation soit canonique, il suffit que l'expression suivante :



$$p_i dq_i - P_i dQ_i = dF$$

soit une différentielle exacte à t constant.



Voir démonstration

En effet :

$$F(q_i, Q_i)$$


$$dF = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial q_i}}_{p_i} dq_i + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial Q_i}}_{-P_i} dQ_i = p_i dq_i - P_i dQ_i$$

Fonction génératrice :

La fonction $F(q_i, Q_i)$ est appelée fonction génératrice de la transformation canonique.

Le choix de la fonction F conduit à des équations implicites très simples pour la transformation canonique.

On exprime cette fonction au moyen des variables (q_i, Q_i, t) et on note cette fonction $F_1(q_i, Q_i, t)$ qui est également une fonction génératrice.

De façon analogue, on peut introduire les différentes fonctions suivantes:

Variables indépendantes	Variables dépendantes	Générateurs
q_i, Q_i	p_i, P_i	$F_1(q_i, Q_i, t)$
q_i, P_i	p_i, Q_i	$F_2(q_i, P_i, t)$
p_i, Q_i	q_i, P_i	$F_3(p_i, Q_i, t)$
p_i, P_i	q_i, Q_i	$F_4(p_i, P_i, t)$

Étudions un peu plus en détails les cas $F_1(q_i, Q_i, t)$, $F_2(q_i, P_i, t)$. Dans le cas $F_1(q_i, Q_i, t)$

$$\frac{dF_1}{dt} = \{F_1, H\}_{q,Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (4.108)$$

$$= \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (4.109)$$

Ici, il est suffisant de comparer les fonctions à intégrer dans $\delta \int_1^2 L dt = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) &= \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H'(Q_i, P_i, t) + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &\quad + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Cette équation est satisfaite si on identifie, q_i, Q_i et donc $\dot{q}_i$ et $\dot{Q}_i$ comme étant indépendantes.

Les facteurs de ces variables indépendantes, doivent donc être identiques

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q_j, Q_j, t) = p_i(q_j, Q_j, t) \\ P_i &= -\frac{\partial}{\partial Q_i} F_1(q_j, Q_j, t) = P_i(q_j, Q_j, t) \\ H' &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.111)$$

Clairement ces lois de transformation nous permettent d'écrire les $2n$ variables dépendantes (ici les p_i et P_i) en fonction des $2n$ variables indépendantes (ici les q_i et Q_i). Ces $2n$ équations peuvent se mettre sous la forme *plus habituelle*

$$q_i = q_i(Q_j, P_j, t) : \quad n \text{ équations} \quad (4.112)$$

$$p_i = p_i(Q_j, P_j, t) : \quad n \text{ équations} \quad (4.113)$$

ce qui permet de calculer H'

$$\begin{aligned} H'(Q_i, P_i, t) &= H(q_i(Q_j, P_j, t), p_i(Q_j, P_j, t), t) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} F_1(q_i(Q_j, P_j, t), Q_i, t). \end{aligned} \quad (4.114)$$

En étudiant les équations de transformation obtenues ci-dessus, on constate que

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial}{\partial Q_j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j},$$
$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i}$$

ainsi donc, un test du caractère canonique de la transformation

$$p_i = p_i(q_j, Q_j, t) : n \text{ équations}$$

$$P_i = P_i(q_j, Q_j, t) : n \text{ équations}$$

est qu'elle doit satisfaire

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$$

ce qui est équivalent à

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{et} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}.$$

Dans le cas $F_2(q_i, P_i, t)$ ce sont les q_i et les P_i qui sont considérés indépendants. On calcule

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (4.121)$$

Ici la comparaison des fonctions à intégrer n'est pas suffisante et nous devons récrire au complet

$$\begin{aligned} \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \\ \delta \int_1^2 \left\{ \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H' + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i \right. \\ \left. + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Le problème vient de ce que les Q_i ne sont pas considérés indépendants ici et donc les $\dot{Q}_i$ ne

le sont pas. Intégrons par partie le premier terme à droite

$$\delta \int_1^2 \sum_i^n P_i \dot{Q}_i dt = \delta \int_1^2 \left(\frac{d}{dt} \sum_i^n P_i Q_i \right) dt - \delta \int_1^2 \sum_i^n \dot{P}_i Q_i dt. \quad (4.123)$$

$$= \underbrace{\delta \sum_i^n P_i Q_i \Big|_1^2}_{=0 \text{ pcq points fixes}} - \delta \int_1^2 \sum_i^n \dot{P}_i Q_i dt. \quad (4.124)$$

Maintenant nous pouvons comparer les fonctions à intégrer

$$\begin{aligned} \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H &= - \sum_i^n \dot{P}_i Q_i - H' + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &\quad + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.125)$$

et identifier les facteurs des variables indépendantes, $\dot{q}_i$ et $\dot{P}_i$

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} F_2(q_j, P_j, t) = p_i(q_j, P_j, t) \\
Q_i &= \frac{\partial}{\partial P_i} F_2(q_j, P_j, t) = Q_i(q_j, P_j, t) \\
H' &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{4.126}$$

Ici encore les variables dépendantes apparaissent exprimées en fonction des variables indépendantes. Comparant les expressions pour p_i et Q_i , le test du caractère d'une transformation de type F_2 est

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_i}{\partial P_j} &= \frac{\partial}{\partial P_j} \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j} \\
\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F_2}{\partial P_j} \right) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_j}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}
\tag{4.127}$$

On peut vérifier alors que

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{et} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}.
\tag{4.128}$$

$$\begin{aligned}
(q_j, Q_j, t) &= p_i(q_j, Q_j, t) \\
(q_j, Q_j, t) &= P_i(q_j, Q_j, t)
\end{aligned}
\tag{4.129}$$

De la même façon, on trouve

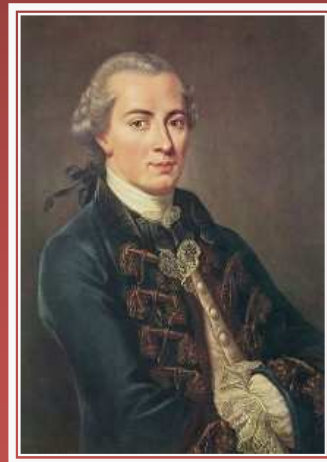
Var. ind.	Générateurs	Transformation			Éqs. de la T.C.
q_i, Q_i	$F_1(q_i, Q_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$
q_i, P_i	$F_2(q_i, P_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
p_i, Q_i	$F_3(p_i, Q_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$	$\frac{\partial P_j}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$
p_i, P_i	$F_4(p_i, P_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$	$\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$

Remarque importante

Les transformations $F_1(q_i, Q_i, t)$, $F_2(q_i, P_i, t)$ etc., ne génèrent pas de transformations différentes mais simplement des façons différentes de générer une transformation donnée. Evidemment, deux fonctions F_1 différentes par exemple vont en général générer des transformations différentes.

Dans la pratique, il suffit de se donner une fonction $F_i (i=1, \dots, 4)$ de deux groupes de variables. Les deux premières équations expriment les nouvelles variables en fonction des anciennes, et la troisième donne le nouveau hamiltonien en fonction des nouvelles variables.

Si une transformation est engendrée par une fonction F_i , on dit que F_i est une fonction génératrice de cette transformation.



Crochets de poisson et transformations canoniques

Lorsqu'on opère sur un système une transformation canonique:

$$q_i \longrightarrow Q_i \text{ et } p_i \longrightarrow P_i$$

Que deviennent les crochets de Poisson entre les nouvelles variables?

Théorème

Les crochets de Poisson sont indépendants du jeu de variables canoniques dans lequel ils sont exprimés, ainsi:

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$$

Remarque importante

Les crochets de Poisson peuvent être utilisés pour vérifier le caractère canonique d'une transformation. En effet:

Une transformation est canonique si les crochets de Poisson sont invariants par rapport à cette transformation:



$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$$

Quelques transformations canoniques particulières

1. Transformation identité:

La transformation canonique F_2 ayant la forme

$$F_2(q, P) = \sum_i q_i P_i$$

donne

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = P_k$$

$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = q_k$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H$$

Ici F_2 correspond donc à la transformation identité.

2. Transformations ponctuelles

Une transformation canonique de la forme

$$F_2(q, P) = \sum_i f_i(q, t) P_i \quad (4.131)$$

implique

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial f_i(q, t)}{\partial q_k} P_i$$

$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = f_k(q, t)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

génère des nouvelles coordonnées Q_k qui ne dépendent pas des moments. Une telle transformation est dite ponctuelle. On note que les f_i étant arbitraires, toute transformation ponctuelle est alors canonique!

3. Échange coordonnée-moment

La transformation de type F_1 ayant la forme

$$F_1 = \sum_i q_i Q_i \quad (4.132)$$

mène aux relations

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = Q_k \\ P_k &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = -q_k \\ H' &= H \end{aligned}$$

correspondant à un échange entre coordonnée généralisée et moment. Comme on le constate, la notion de coordonnée spatiale et quantité de mouvement se confondent en mécanique hamiltonienne puisque elles peuvent être tout aussi assignées à la coordonnée ou au moment généralisé.

Fiche de synthèse 2



Ce qu'il faut absolument savoir

Variables indépendantes	Fonction génératrice	Equations de transformation
(q_i, Q_i)	$F_1(q_i, Q_i)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}; \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}; \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
(q_i, P_i)	$F_2(q_i, P_i)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}; \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}; \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$
(p_i, Q_i)	$F_3(p_i, Q_i)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}; \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}; \quad K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
(p_i, P_i)	$F_4(p_i, P_i)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}; \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}; \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

Mise en œuvre



Voir applications pédagogiques

$$p_i dq_i - P_i dQ_i = dF$$

Condition suffisante



$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$$

Condition nécessaire

**Nouvel Hamiltonien
(Kamiltonien)**

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Application pédagogique

Soit la transformation :

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \\ Q = A \tan\left(\frac{q}{p}\right) \end{cases}$$

Montrer que cette transformation est canonique de deux manières différentes. En déduire la fonction génératrice correspondante.

- Première méthode

$$\begin{aligned} pdq - PdQ &= pdq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \left(\frac{pdq - qdp}{p^2 + q^2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(pdq + qdp) = d\left(\frac{1}{2}pq\right) = dF(p, q) \end{aligned}$$

d'où :

$$F(p, q) = \frac{1}{2}pq$$

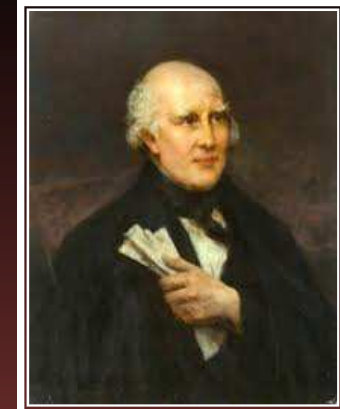
F est la fonction génératrice correspondante.

- Deuxième méthode

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \cdot \frac{\partial P}{\partial p} = 1$$

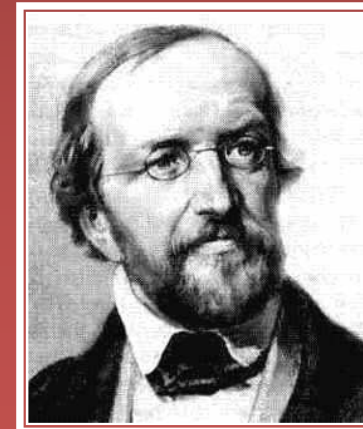
En effet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p}{p^2 + q^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} = - \frac{q}{p^2 + q^2} \\ \frac{\partial P}{\partial q} = q \\ \frac{\partial P}{\partial p} = p \end{array} \right.$$



Et maintenant, c'est à vous de jouer.

A vos dossiers pédagogiques.



§-4-

Formalisme de Hamilton-Jacobi

Formalisme de Hamilton-Jacobi

Une transformation canonique très Spéciale



$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

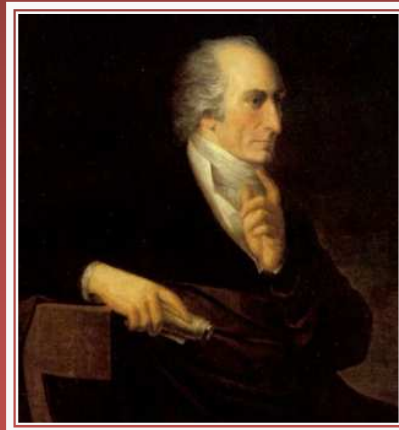
EHJ



Formalisme de Hamilton-Jacobi

Préambule

« Il s'agit d'une méthode d'intégration d'un système canonique. Jacobi avait remarqué qu'un système canonique est le système différentiel associé à une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre (système appelé système caractéristique) ».



Formalisme de Hamilton-Jacobi

Soit la transformation canonique : $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$

Et soit le nouvel hamiltonien : $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$

Principe : opérer une T.C. tel que les (Q_i, P_i) soient précisément $2n$ constantes du mouvement.

Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 & (1) \Leftrightarrow Q_i = \beta_i = \text{Cte} \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 & (2) \Leftrightarrow P_i = \alpha_i = \text{Cte} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} q_i = q_i(Q_j, P_j, t) = q_i(\beta_j, \alpha_j, t) \\ p_i = p_i(Q_j, P_j, t) = p_i(\beta_j, \alpha_j, t) \end{cases}$$

Formalisme de Hamilton-Jacobi

Pour y arriver nous cherchons la fonction génératrice, ici choisie de type $F_2(q_i, p_i, t)$ donc du type $F_2(q_i, \alpha_i, t)$ que nous noterons de façon standard $S(q_i, \alpha_i, t)$ tel que:

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

De cette façon $K = 0$ nous assure que les équations (1) et (2) seront satisfaites. La T.C. est de type F_2 et donc :

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Le but recherché est $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$, ce sera notre équation fondamentale après remplacement des p_i dans H .

Formalisme de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, p_i, t\right) = 0$$

C'est l'équation de Hamilton-Jacobi, une équation différentielle pour S. Cette Équation différentielle du premier ordre en n variables nécessitera n constantes d'intégration qui sont précisément les constantes α_i .

Une fois solutionnée, c.à.d. une fois que l'on connaît S, il ne reste qu'à opérer les T.C.

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial q_i} = p_i(q_j, \alpha_j, t) \\ Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_i} \\ \quad = Q_i(q_j, \alpha_j, t) = \beta_i \end{array} \right.$$

Formalisme de Hamilton-Jacobi

Ces n équations peuvent s'inverser en $q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t)$.

Où on identifie l'un des α_i , ici α_1 comme valeur numérique (constante) de H :

$$S(q_i, \alpha_i, t) = -\alpha_1 t + W(q_i, \alpha_i)$$

Une simplification apparaît lorsque $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Dans ce cas, par séparations de variables, on peut écrire:

$$H = \alpha_1$$

Comme

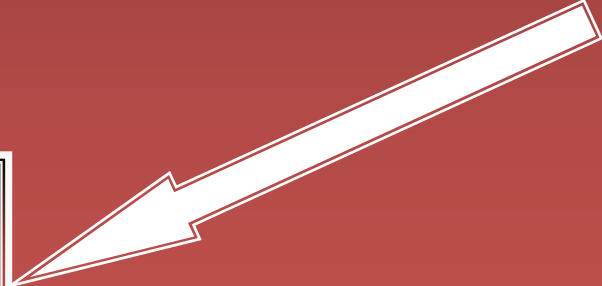
$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \Rightarrow p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

Formalisme de Hamilton-Jacobi

L'équation de Hamilton-Jacobi se ramène à :

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_i$$

C'est l'équation caractéristique de H.J pour la fonction

$$W(q_i, \alpha_i)$$


Fiche de synthèse 3



Ce qu'il faut absolument savoir

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$



$$S_i \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$



$$S(q_i, \alpha_i, t) = -\alpha_1 t + W(q_i, \alpha_i)$$



$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_i$$

Mise en œuvre



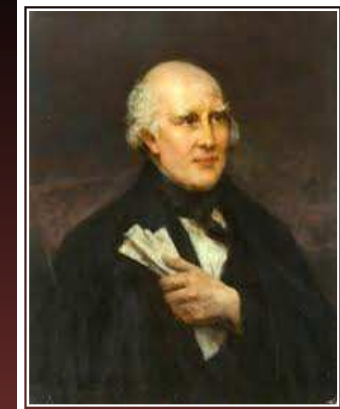
Voir applications pédagogiques



$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

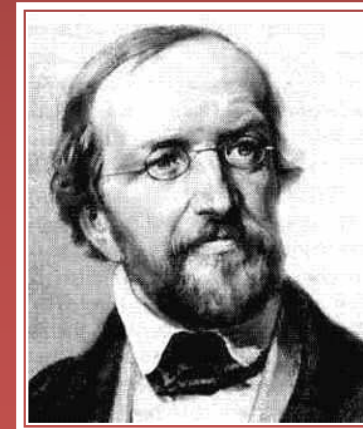
EHJ





Et maintenant, c'est à vous de jouer.

A vos dossiers pédagogiques.



FIN DU CHAPITRE 5

**MERCI DE VOTRE
ATTENTION**



Rachid MESRAR

***Professeur de l'enseignement supérieur
Bureau 37 Département de physique
Faculté des sciences
Agadir***

email: r.mesrar@uiz.ac.ma