Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014

TD de Mécanique Analytique
Corrigé de la série N° 2
Parcours Physique Moderne : Portrait de phase. Formalisme de Hamilton.

Corrigé de l'exercice 1

Une particule de masse m évolue à une dimension x. Elle est soumise à la force

$$F(x) = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}, \quad k > 0, \gamma > 0.$$

La force dépend d'une seule variable x. Le problème est à une seule dimension.

1. La force se compose de deux termes : le terme $-kx$ est la force de rappel ou élastique, elle est conservative. Le deuxième terme est $-k\dot{x} = -kv$ et il correspond à la force de frottement visqueux, qui est une force dissipative.
2. Pour appliquer le PFD, calculons l'accélération. Soit $\mathcal{R}(O, xyz)$ un référentiel galiléen. Comme le problème est à une dimension alors

$$\vec{V} = \dot{x}\vec{i} \text{ et } \vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i}, \text{ la force est } \vec{F} = -(kx - \gamma\dot{x}).$$

Alors le PFD donne

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} \Longrightarrow m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

comme $p = m\dot{x}$ et $\dot{p} = m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} = -kx - \gamma\frac{p}{m}$, on peut écrire

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \frac{p}{m} \\ \dot{p} & = & -kx - \frac{\gamma}{m}p \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$$

ce qui implique que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix}.$$

3. Chercher les directions principales dans l'espace de phases, revient à chercher les directions dans lesquelles A est diagonale et donc à diagonaliser la matrice A. Les vecteurs propres définissent les directions principales. Notons par D la matrice diagonalisée associée à A

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_i, (i = 1, 2) \text{ sont les valeurs propres,}$$

alors $\exists\ S$ tel que $D = S^{-1}AS$. Notons par $V_{1,2}$ les vecteurs propres. Soit $(X, P)^T$ les coordoonées dans la base des vecteurs propres. Alors,

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}$$

ce qui donne comme solutions

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \lambda_1 X \Longrightarrow \frac{dX}{X} = \lambda_1 dt \Longrightarrow X(t) = X(0)e^{\lambda_1 t}\\ \dot{P} &= \lambda_2 P \Longrightarrow \frac{dP}{P} = \lambda_2 dt \Longrightarrow P(t) = P(0)e^{\lambda_2 t}.\end{aligned}$$

Retrouvons les valeurs propres λ_i. Pour ce faire, résolvons le polynôme caractéristique associé à A :

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -k & -\lambda - \frac{\gamma}{m} \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda(\lambda + \frac{\gamma}{m}) + \frac{k}{m} = 0$$

dont le descriminant $\Delta = \frac{\gamma^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}$ et donc

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\gamma}{m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

dont les valeurs dépendent du signe de discriminant Δ que nous allons discuter.

• Les éléments de la matrice de passage S[1] peuvent être calculés en déterminant les vecteurs propres V_1 et V_2 que l'on donne sans calcul

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix} \\ \text{et pour la matrice de passage } S &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} & -\sqrt{\Delta} + \frac{\gamma}{m} \\ -2k & -2k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

— $\underline{\Delta > 0} \Longrightarrow \gamma > 2\sqrt{km}$: les racines $\lambda_{1,2}$ sont réelles et négatives puisque $\frac{\gamma}{m} > \sqrt{\Delta}$. Ainsi les solutions X et P sont

$$\begin{aligned} Log\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right) &= \lambda_1 t \Longrightarrow t = Log\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} \\ P(t) &= P(0)e^{\lambda_2 Log\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}}} = P(0)e^{Log\left(\frac{X(t)}{X(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} = KX(t)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\end{aligned}$$

avec $\lambda_2/\lambda_1 > 1$. Rappelons que le portrait de phase donné par $P = P(X)$ est représenté dans la base $V_{1,2}$ des vecteurs propres.

Analyse :

• Comme λ_1 et λ_1 sont négatives, alors $P(t) \to 0$ et $X(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

• Le rapport $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ car $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

Ainsi le portrait de phase est représenté dans la figure .... .

— $\underline{\Delta < 0}$ si $\gamma < 2\sqrt{km}$: on pose $\Delta = i\sqrt{|\Delta|} = i\omega \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\omega$ avec $\lambda_1 = \lambda_2^*$ avec $X(t) = X(0)e^{(-\frac{\gamma}{2m}+i\omega)t} = |X(0)|e^{i\phi_0}e^{(-\frac{\gamma}{2m}+i\omega)t}$ et $P(t) = P(0)e^{(-\frac{\gamma}{2m}-i\omega)t} = |P(0)|e^{i\phi_0}e^{(-\frac{\gamma}{2m}-i\omega)t}$.

• La partie réelle des λ_i, $-\frac{\gamma}{2m}$ est responsable de l'amortissement alors que la partie imaginaire l'est pour les oscillations et donc la fréquence d'oscillations est $\nu = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}$.

1. Nous aurons besoin de cette matrice s'il fallait réexprimer les solutions dans la base d'origine, c'est à dire réexprimer les solutions en terme de $p = p(x)$.

Les vecteurs propres sont dans ce cas sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{|\Delta|} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sqrt{|\Delta|} \\ 0 \end{pmatrix} = V_1^*$$

Au lieu de représenter le portrait de phase dans la base des vecteurs propres $V_{1,2}$, qui sont complexes, on choisit de les représenter dans la base formée par les parties réelles et imaginaires de V_1 que l'on note

$$W_1 = \mathrm{Re}(V_1) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{m} \\ -2k \end{pmatrix}$$

et

$$W_2 = \mathrm{Im}(V_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{|\Delta|} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce dernier choix est adopté car X et P sont complexes et P est conjugué de X et donc le portrait de phase est obtenu en représentant $Y_2 = \mathrm{Im}(X) = X(0)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin(\omega t + \phi_0)$ en fonction de $Y_1 = \mathrm{Re}(X_1) = X(0)e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\omega t + \phi_0)$ et dont la représentation graphique est une spirale logarithmique.

Corrigé de l'exercice 2

Pour tracer le portrait de phase, on calcule d'abord le lagrangien, ensuite on détermine le moment conjugué, un seul degré de liberté puisque le problème est à une dimension, et enfin on calcule le hamiltonien en fonction de la coordonnée généralisée, x, et de son moment conjugué, p. Utilisant le fait que le hamiltonien est conservé, on en déduit l'équation de $p = p(x)$.

1. **Lagrangien :**
   <u>si $0 < x < L$</u>
   La particule est libre alors $V(x) = 0$. Le module de la vitesse est $v = \dot{x}$, ce qui donne pour l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ et enfin $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.
   <u>si $x < 0$ ou $x > L$:</u> $V(x) = +\infty$ et donc cette région est inaccessible à la particule.
2. **Moment conjugué**
   Le moment conjugué est donné par
   $$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}.$$
3. **Hamiltonien**
   Le hamiltonien est donné par $\mathcal{H}(x, p) = p\dot{x} - \mathcal{L} = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}$.
4. **Portrait de phase**
   Nous avons tous les ingrédients pour tracer le portrait de phase. Sachant que $\mathcal{H}(x, p)$ ne dépend pas explicitement du temps, donc c'est une intégrale première. Aussi $\mathcal{H}(x, p) = E \Longrightarrow \frac{p^2}{2m} = E \Longrightarrow p = \pm\sqrt{2mE}$. Donc le moment conjugué est une fonction constante paramétrée par E. Pour une valeur de E, la représentation graphique de $p = p(x)$ est donc

une droite d'équation $p = +\sqrt{2mE}$ parallèle à l'axe des abcisses où la particule se déplace de $x = 0$ vers $x = L$, et d'aquation $p = -\sqrt{2mE}$ quant la particule se déplace de $x = L$ vers $x = 0$.

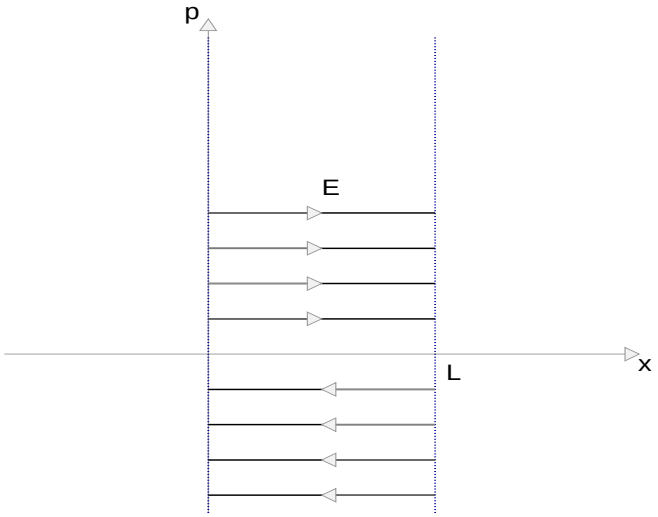

FIGURE 1 – Portrait de phase de la particule libre. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs de l'énergie E.

Corrigé de l'exercice 3

Soit le potentiel $U(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\beta x^2$. Rappelons que les points stables sont les positions d'équilibre du système mécanique décrit par ce potentiel.

1. Les points fixes sont les positions pour lesquelles le potentiel est extremal. Calculons la dérivée de $U(x)$

$$\frac{dU(x)}{dx} = x^5 - x^3 + \beta x = x(x^4 - x^2 + \beta).$$

La dérivée est nulle pour $x = 0$ ou $x^4 - x^2 + \beta = 0$. Pour ce deuxième terme, posons $X = x^2$ ce qui donne comme équation $X^2 - X + \beta = 0$ dont le descriminant est $\Delta = 1 - 4\beta$. Etudions les positions d'équilibre en fonction du signe de Δ.

— $\Delta < 0 \Longrightarrow \beta > 1/4$: Pas de solution réelle. Le seul point fixe est $x = 0$. Comme

$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = \beta > 0$$

alors c'est une position d'équilibre stable.

— $\Delta > 0 \Longrightarrow \beta < 1/4$: alors les solutions en X sont

$$X \;=\; x^2 = +1 \pm \sqrt{1 - 4\beta}$$

ainsi on distingue si

- $\underline{\beta > 0}$, c'est à dire $0 < \beta < 1/4$, il y a 5 points fixes $x = -x_2, -x_1, 0, -x_1, -x_2$ avec

$$x_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2}} \text{ et } x_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2}}.$$

- $\underline{\beta < 0}$, le potentiel a seulement trois points fixes $x = -x_2, 0, x_2$.

Corrigé de l'exercice 4

On étudie classiquement le mouvement d'un électron de masse m et de charge $-e$ soumis à l'attraction électrostatique d'un noyau de charge $+Ze$. Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) sont utilisées comme coordonnées généralisées. Le référentiel $\mathcal{R}$ dont l'origine est confondue avec le noyau peut être considéré comme un référantiel galiléen.

1. L'électron est soumis à l'action de l'attraction coulombienne du noyau ainsi

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-Ze^2}{r} = -\frac{k}{r}.$$

2. Le lagrangien est donné par $\mathcal{L}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = T - V$. Calculons T :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) \Longrightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

et le lagrangien devien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + \frac{k}{r}.$$

Pour déduire $\mathcal{H}(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$, calculons d'abord les moments conjugués

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Le hamiltonien s'écrit alors comme suit

$$\mathcal{H} = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - \frac{k}{r}.$$

Comme le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, il est conservé.

3. Soit L le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. On peut utiliser la relation

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \{\mathcal{H}, \vec{L}\} + \frac{\partial\vec{L}}{\partial t}$$

comme $\vec{L}$ ne dépend pas explicitement du temps, alors

$$\{\mathcal{H}, \vec{L}\} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Or on sait que pour une force centrale, ce qui est le cas de cet exercice, le moment de la force par rapport à l'origine est nul et en utilisant le théorème du moment cinétique on en déduit que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Longrightarrow \{\mathcal{H}, \vec{L}\} = 0.$$

On en conclut que le moment cinétique orbital est conservé.

4. Comme le moment cinétique orbital est conservé, ce qui donne une contrainte sur les variables décrivant le système et donc les trois variables (r, θ, φ) ne sont pas indépendantes. Nous utilisons (r, θ) comme coordonnées généralisées. On prend alors $\varphi = \text{Cte}$ ce qui implique que $\dot{\varphi} = 0$ et $p_\varphi = 0$ et le nouveau hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}.$$

5. Les équations de Hamilton sont

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} \implies \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \implies \dot{p}_r = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} \implies \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} \implies \dot{p}_\theta = 0. \end{cases}$$

On en déduit que p_θ est une intégrale première. Ce qui était prévu étant donné que θ est une variable cyclique du nouveau hamiltonien.

6. L'équation d'un cercle est donnée par $r = \text{Cte} = r_c$. Démontrer que ce mouvement est possible revient à trouver une solution physique r_c des équations de Hamilton. En effet, $r = r_c \implies \dot{r} = 0 \implies p_r = 0$ ce qui permet d'écrire, en utilisant les équations de Hamilton,

$$-\frac{p_\theta^2}{mr_c^3} + \frac{k}{r_c^2} = 0 \implies r_c = 0 \text{ ou } r_c = \frac{p_\theta^2}{mk}$$

et l'on retient la deuxième solution. Ce qui montre bien qu'un mouvement circulaire est possible. Pour démontrer qu'il est stable, il suffit de montrer que le potentiel effectif $\tilde{V}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ est minimal pour $r = r_c$. En effet

$$\frac{\partial \tilde{V}(r)}{\partial r} = 0 \implies r = r_c$$

et $r < r_c$ $\tilde{V}(r) < 0$ et pour $r > r_c$ $\tilde{V}(r) > 0$ ce qui démontre bien que $\tilde{V}(r_c)$ est minimale.