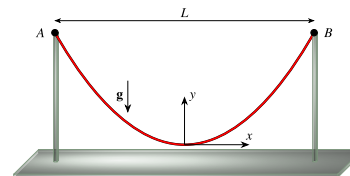
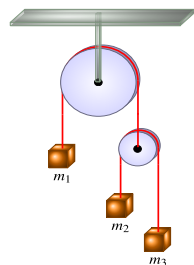
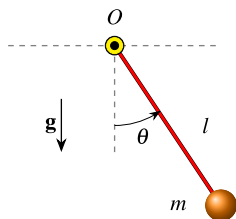
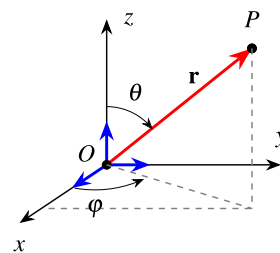
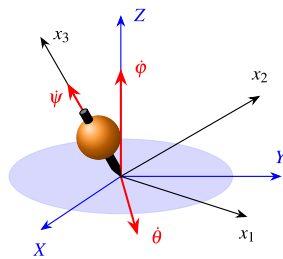
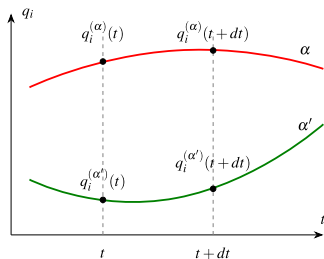


Mécanique analytique

P. Amiot et L. Marleau



Mécanique analytique

P. Amiot et L. Marleau

Département de physique, de génie physique et d'optique ★ Université Laval ★ Québec ★ Canada

Cet ouvrage a été rédigé avec *Scientific WorkPlace* (SWP) et composé avec MiKTeX

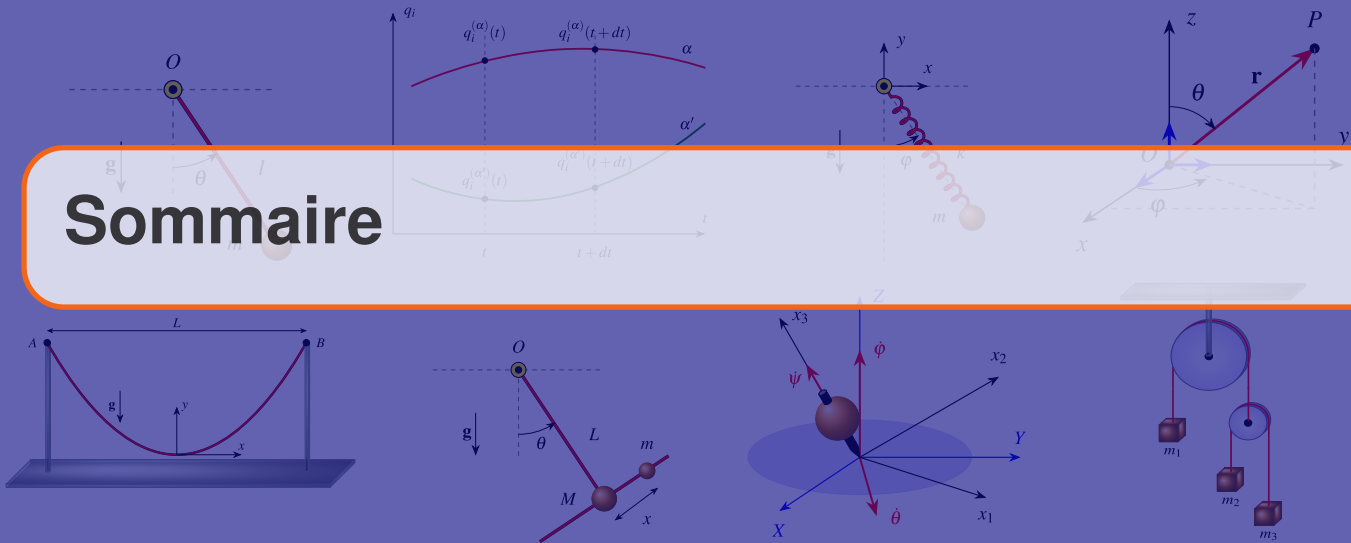
© 1998-2018 P. Amiot et L. Marleau

Département de physique, de génie physique et d'optique

Université Laval, Québec, Canada

Tous droits réservés. Aucun extrait de cet ouvrage ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de l'auteur.

Sommaire



1	RAPPEL	1
1.1	Trajectoire et cinématique d'une particule ponctuelle ..	2
1.2	Plusieurs particules ponctuelles	6

1.3	Éléments de dynamique	6
1.4	Travail et Énergie	14
1.5	Systèmes à N particules et forces extérieures	17
1.6	Degrés de liberté	24
1.7	Exercices	29
2	FORMALISME DE LAGRANGE	35
2.1	Coordonnées généralisées	36
2.2	Principe de base	38
2.3	Variation fonctionnelle	41
2.3.1	Identité de Beltrami	49
2.4	La fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$	51
2.4.1	Forces conservatrices	52
2.4.2	Forces non conservatrices	57
2.5	Coordonnées curvilignes	58
2.6	Contraintes holonomes et non-holonomes	69
2.6.1	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	73
2.7	Lois de conservation et constantes du mouvement	76
2.7.1	Variables cycliques	76
2.7.2	Lagrangien indépendant du temps	82
2.7.3	Théorème de Noether	91

2.8	Invariance de jauge	96
2.9	Quelques caractéristiques, propriétés, limites...	104
2.10	Symétrie de l'espace-temps ★★	108
2.10.1	Mécanique non relativiste ★★	109
2.10.2	Mécanique relativiste ★★	115
2.10.3	Autres types de « mécanique » ★★	118
2.11	Exercices	120
3	APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS	137
3.1	Cas simples en mécanique	139
3.1.1	Particule dans un champ gravitationnel	139
3.1.2	Particule suspendue à un ressort	141
3.1.3	Particule suspendue au bout d'une tige rigide	146
3.1.4	Pendule plan suspendu par un ressort de masse nulle	152
3.2	Exemples non mécaniques	157
3.2.1	Principe de Fermat	157
3.3	Problème à deux corps	161
3.4	Le potentiel central	164
3.4.1	Potentiel en r^{-1}	168
3.4.2	Potentiel en r^{-n}	177
3.5	Exercices	184

4	FORMALISME CANONIQUE	189
4.1	Transformation de Legendre	191
4.2	L'hamiltonien	193
4.2.1	L'espace des phases	197
4.3	Quelques exemples	202
4.3.1	Particule soumise à une force en une dimension	202
4.3.2	Particule soumise à une force en trois dimensions	203
4.3.3	Particule dans un champ central	205
4.4	Crochets de Poisson	212
4.4.1	Définition	212
4.4.2	Propriétés	217
4.4.3	Variables canoniques	218
4.5	Moments généralisés	220
4.6	Transformations canoniques	225
4.6.1	Fonctions génératrices	229
4.6.2	Quelques transformations canoniques particulières	238
4.6.3	Quelques exemples	240
4.6.4	Interprétation géométrique des crochets de Poisson★★	251
4.7	La méthode de Hamilton-Jacobi	262
4.7.1	L'objectif	262
4.7.2	L'approche	265
4.7.3	Une seconde approche★	267

4.7.4	Quelques exemples	271
4.8	L'énergie cinétique $T(q_i, p_i)$ en coordonnées généralisées	290
4.9	Interprétation de la fonction S	293
4.10	Mécanique ondulatoire ★★	295
4.10.1	Système mécanique et optique géométrique ★★	295
4.10.2	Action et phase ★★	298
4.10.3	Vitesse de phase ★★	298
4.10.4	Indice de réfraction d'un « milieu » mécanique ★★	301
4.10.5	Équation d'onde ★★	303
4.11	L'espace des phases ★	307
4.11.1	Flot hamiltonien ★	308
4.11.2	Incompressibilité du flot ★	310
4.11.3	Densité d'états et théorème de Liouville ★★	314
4.12	Variables angles-actions ★	316
4.12.1	Variables d'angles ★	319
4.12.2	Variables d'actions ★	320
4.12.3	Fonction génératrice ★	324
4.13	Systèmes intégrables ★★★	327
4.13.1	Théorème d'Arnold-Liouville ★★★	327
4.13.2	Variables angles-actions ★★★	330
4.14	Exercices	346

5	THÉORIE DES PERTURBATIONS	357
5.1	L'idée de base : « varier » les constantes	358
5.2	Les approximations	361
5.2.1	Méthode par série	362
5.2.2	Méthode itérative	363
5.2.3	Méthode de la moyenne	365
5.3	Exemple	366
5.4	Méthode canonique de perturbations	370
5.5	Autre exemple	372
5.5.1	Développement en série	376
5.5.2	Solution itérative.	382
5.5.3	Méthode de la moyenne	386
5.6	Exercices	391
6	MOUVEMENT D'UN SOLIDE INDÉFORMABLE	393
6.1	Degrés de liberté du solide	394
6.2	Énergie cinétique	398
6.3	Axes principaux et tenseur d'inertie	404
6.4	Moment cinétique d'un solide	414
6.5	Approche vectorielle et équations d'Euler	419
6.6	Angles d'Euler et approche lagrangienne	428

6.7	Toupie symétrique libre	434
6.8	Toupie symétrique pesante	440
6.9	Toupie asymétrique libre et stabilité	457
6.10	Exercices	461

7 MÉCANIQUE LAGRANGIENNE DES MILIEUX CONTINUS

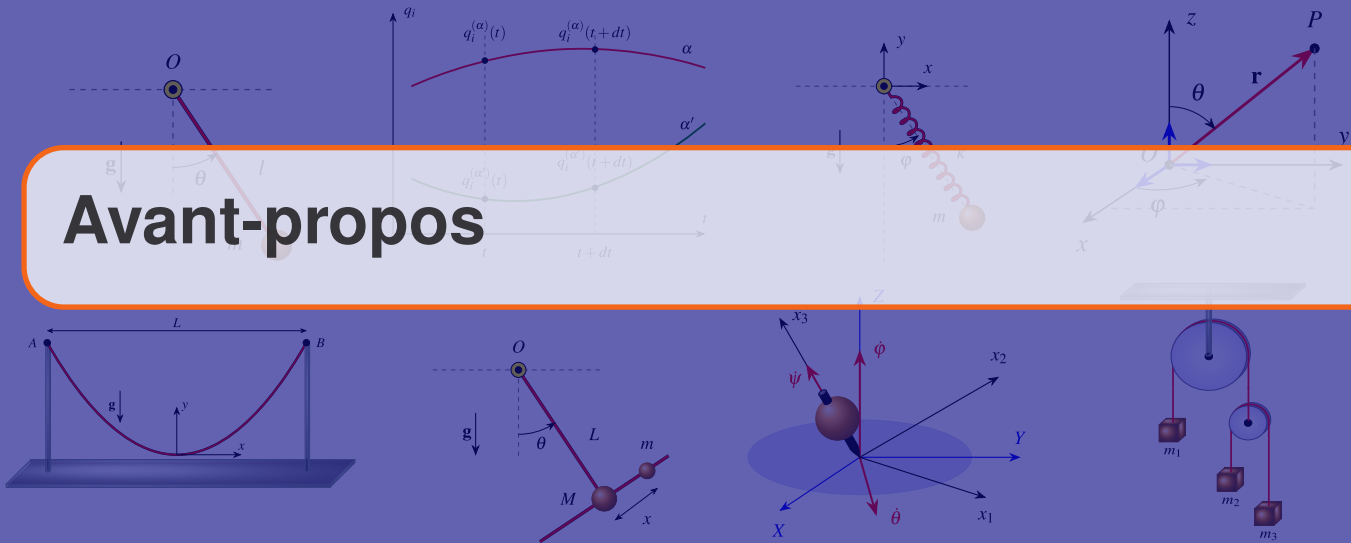
7.1	Le passage à la limite continue ★	470
7.1.1	Cas simple : corde élastique en 1D	470
7.2	Formulation lagrangienne ★★	475
7.2.1	Densité lagrangienne et localité des interactions	475
7.2.2	Equations d'Euler-Lagrange du champ	477
7.2.3	Transformations de jauge	482
7.3	Théorie classique des champs ★★	484
7.3.1	Cadre général	484
7.3.2	Exemple : électrodynamique classique	488
7.3.3	Tenseur énergie-impulsion	494
7.3.4	Formulation relativiste de la théorie des champs	498
7.4	Densité hamiltonienne ★★	499

A	Notations, unités et constantes de physique,...	505
A.1	Notations	505
A.2	Unités SI	507
A.3	Facteurs de conversion	510
A.4	Unités naturelles	513
A.5	Constantes fondamentales de physique	514
A.5.1	Constantes universelles	514
A.5.2	Constantes électromagnétiques	515
A.5.3	Constantes astronomiques	516
A.5.4	Constantes atomiques	517
A.5.5	Constantes physico-chimiques	517
A.6	Systèmes de coordonnées	519
A.6.1	Coordonnées cartésiennes	519
A.6.2	Coordonnées cylindriques	522
A.6.3	Coordonnées sphériques	526
A.6.4	Coordonnées curvilignes (cas général)	530
B	Aide-mémoire	535
B.0.1	Métriques :	535
B.0.2	Mécanique lagrangienne :	536
B.0.3	Mécanique hamiltonienne	538

B.0.4	Transformations canoniques	539
B.0.5	Méthode Hamilton-Jacobi	540
B.0.6	Théorie des perturbations	541
B.0.7	Corps rigides	543

C	Références	545
----------	-------------------	------------

Avant-propos



Version 2018.09.24.16.42

Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours de Mécanique analytique (PHY-2000) du Département de physique, de génie physique et d'optique de l'Université Laval dans

le cadre de son programme de physique du 1^{er} cycle (B.Sc.). Il présente les principales notions de la mécanique classique avancée, soit le formalisme de Lagrange, le formalisme canonique, la théorie des perturbations et le mouvement d'un solide rigide et la mécanique des milieux continus : Chapitre 1 : Une revue des concepts et quantités qui jouent un rôle important en mécanique est présentée. Le lecteur est présumé déjà connaître l'essentiel du contenu de ce chapitre. Chapitre 2 : Le formalisme de Lagrange est introduit. On décrit la construction du lagrangien pour divers systèmes physiques et les équations d'Euler-Lagrange. Chapitre 3 : Quelques applications de la méthode de Lagrange sont élaborées ainsi que leurs propriétés importantes et leurs conséquences physiques. Chapitre 4 : Le formalisme canonique est développé. On y décrit tour à tour l'hamiltonien, les équations canoniques, les crochets de Poisson, les transformations canoniques et la méthode de Hamilton-Jacobi. Chapitre 5 : La théorie des perturbations est introduite par la méthodes de la variations des constantes. Chapitre 6 : La mécanique du solide indéformable, version scalaire, est résumée. Puis, on voit le tenseur d'inertie et on passe à la méthode vectorielle avec les équations d'Euler. On y introduit les angles d'Euler et les changements de référentiel. Finalement, on donne un exemple simple d'un cas vectoriel, la toupie symétrique, en utilisant le lagrangien et les équations du mouvement qui en découlent. Chapitre 7 : Le formalisme lagrangien

pour la mécanique des milieux continus est élaboré. On généralise la procédure pour englober des systèmes physiques continus non mécanique en introduisant des notions élémentaires de théories des champs. L'annexe contient un résumé des notations (Annexe A.1), une description des systèmes d'unités (Annexes A.2), un tableau des constantes fondamentales en physique (Annexe A.5), une description des systèmes de coordonnées, un aide-mémoire et quelques références complémentaires.

Toutefois, certaines sections sont de niveau plus avancé et peuvent être ignorées dans une première lecture. À titre d'indication, les titres de ces sections de l'ouvrage sont suivis d'étoiles (★) dont le nombre signale le niveau de difficulté ou de pertinence au cours.

Bonne lecture !

P. Amiot et L. Marleau.

*Département de physique, de génie physique et d'optique
Université Laval, Québec, Canada*

Mises à jour

Version 2018.09.24 :

- Graphiques refaits avec tikz.
- Corrections mineures.

Version 2016.01.06 :

- Refonte du style de mise en page.
- Utilisation du package hyperref pour activer les hyperliens dans la table des matières (globale ou partielle au début de chaque chapitre), dans l'index et dans le texte (équations, figures, problèmes,...).
- Corrections mineures.

Version 2016.01.06 :

- Refonte du style de mise en page.
- Utilisation du package hyperref pour activer les hyperliens dans la table des matières (globale ou partielle au début de chaque chapitre), dans l'index et dans le texte (équations, figures, problèmes,...).
- Corrections mineures.

Version 2015.08.17 :

- Présentation : Ajout d'exercices en fin de chapitres.
- Corrections mineures.

Version 2012.12.12 :

- Corrections mineures.

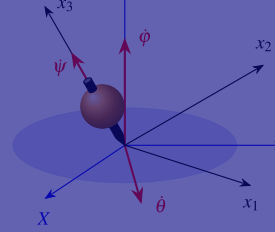
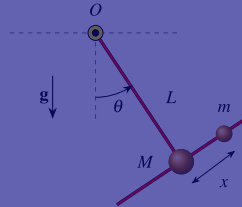
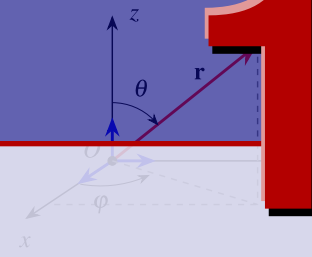
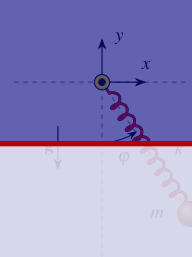
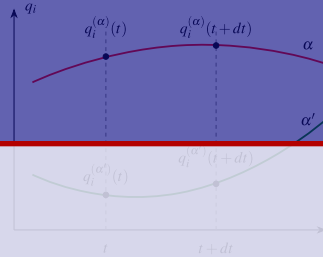
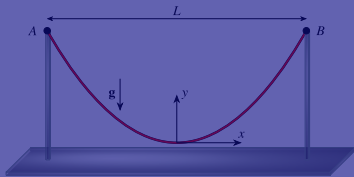
Version 2011.11.02 :

- Présentation : Ajout d'encadrés colorés pour les exemples, exercices et remarques.
- Corrections mineures.

Version 2011.08.30 :

- Chapitre 2 : Ajout d'une nouvelle section (Symétrie de l'espace-temps)
- Chapitre 4 : Ajout de trois nouvelles sections (Mécanique ondulatoire, L'espace des phases, Systèmes intégrables)
- Chapitre 7 : Ajout d'un nouveau chapitre sur la Mécanique lagrangienne des milieux continus
- Présentation : Certaines figures ont été refaites pour donner un effet 3D
- Corrections mineures. ■

RAPPEL



Chapitre 1

1.1	Trajectoire et cinématique d'une particule ponctuelle	2
1.2	Plusieurs particules ponctuelles	6
1.3	Éléments de dynamique	6
1.4	Travail et Énergie	14
1.5	Systèmes à N particules et forces extérieures	17
1.6	Degrés de liberté	24
1.7	Exercices	29

NOUS COMMENÇONS par un rappel de la mécanique newtonienne. Ceci nous permettra de mettre en perspective comment les approches lagrangienne et hamiltonienne se distinguent de par leur concepts même si le but ultime est de retrouver les mêmes équations de mouvement et les mêmes

solutions.

1.1 Trajectoire et cinématique d'une particule ponctuelle

La particule ponctuelle est sans dimension. C'est une création de l'esprit, un modèle, représentant un objet physique qui n'est animé que d'un mouvement de translation (pas de rotation sur lui-même). On admet ici que notre espace physique est à trois dimensions auquel on adjoint le temps qui n'est pas ici une dimension mais un paramètre immuable et indépendant des objets physiques et de leur évolution dont il sert à mesurer le taux.

Nous représentons l'espace physique par un espace à trois dimensions à l'échelle, doté d'une origine notée O et de trois axes orientés. La position instantanée de la particule est notée par un point P dont la position est entièrement définie par un triplet de nombres appelés coordonnées du point et qui mesurent généralement des longueurs ou des angles (voir figure 1.1). Ces coordonnées seront souvent notées x_i ou q_i . Il est souvent pratique de parler du *vecteur* position de la particule, noté $\mathbf{x}$ ou $\mathbf{r}$ qui va de l'origine O au point P .

L'évolution du système physique sera décrite par une courbe ou trajectoire C , décrivant le déplacement continu du point P dans notre espace de configuration. On conçoit cette évolution comme résultant d'un paramètre invariant qui *augmente*. On le choisit

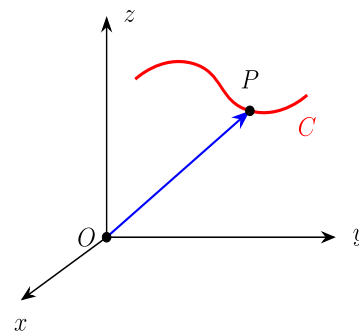


Figure 1.1 ▲
Trajét d'une particule

généralement et pour des raisons pratiques comme étant le temps, noté t , mais ce choix n'est pas unique. Le point P se déplaçant avec le temps sa position, $\mathbf{x}$, variera dans le temps et la trajectoire sera décrite par $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en terme des composantes par :

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Qui dit mouvement pense intuitivement à une rapidité de mouvement. Cette notion, ce concept est quantifié par la définition de la vitesse $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \equiv \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (1.2)$$

Notons par la lettre u le paramètre (arbitraire) dont la variation génère la trajectoire (il peut être ou non le temps). Alors la longueur s de la trajectoire entre u_0 et u_1 , est donnée par :

$$s(u_0, u_1) = \int_{u_0}^{u_1} du \sqrt{\sum_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2} \quad (1.3)$$

où u varie de façon monotone entre u_0 et u_1 . Alors on peut écrire (voir figure 1.2) :

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \equiv v \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (1.4)$$

On voit immédiatement que :

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{e}_{\parallel} \quad (1.5)$$

un vecteur unitaire dans la direction du vecteur $\mathbf{T}$ qui donne la tangente à la trajectoire au point P . En effet

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (1.6)$$

On obtient ainsi $\mathbf{V} = \mathbf{e}_{\parallel}v$ ou $\mathbf{e}_{\parallel}$ donne la direction et v la grandeur de la vitesse (vectorielle) $\mathbf{V}$. Par abus de langage, v s'appelle aussi la vitesse. Ce qu'il faut souligner, c'est que $\mathbf{V}$ est toujours tangent (c'est un vecteur) à la trajectoire. D'ailleurs, pourvu que le paramètre p varie de façon monotone (et continue) le vecteur $\frac{d\mathbf{x}}{dp}$ est tangent à la trajectoire, le cas $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ n'est qu'un cas particulier.

Intuitivement la vitesse $\mathbf{V}$ peut varier le long de la trajectoire (voir figure 1.3). Pour quantifier cet effet nous définissons l'accélération $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \equiv \dot{\mathbf{V}} \equiv \ddot{\mathbf{x}} \quad (1.7)$$

et clairement

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{e}_{\parallel})}{dt} \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_{\parallel} + v\frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{dt} \end{aligned} \quad (1.8)$$

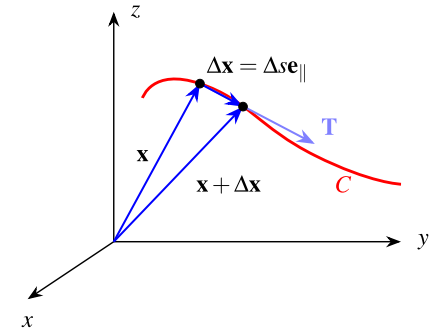


Figure 1.2 ▲
Déplacement le long d'une trajectoire courbe.

Parce que $\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \mathbf{e}_{\parallel} = 1$ alors $\frac{d(\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \mathbf{e}_{\parallel})}{dt} = 2\mathbf{e}_{\parallel} \cdot \frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{dt} = 0$. Ainsi $\frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{dt}$ est perpendiculaire à $\mathbf{e}_{\parallel}$ qui est tangent à la trajectoire. Donc $\frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{dt}$ est normal à cette trajectoire. Appelons $\mathbf{e}_{\perp}$ le vecteur unitaire normal à la trajectoire (dans la direction de $\frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{dt}$ c'est-à-dire dans le plan instantané de la trajectoire). On calcule

$$\frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{dt} \right| \mathbf{e}_{\perp} = \left| \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{ds} \right| \mathbf{e}_{\perp} = \left| \frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{ds} \right| v \mathbf{e}_{\perp}. \quad (1.9)$$

On écrit par définition, $\rho^{-1} = \left| \frac{d\mathbf{e}_{\parallel}}{ds} \right|$. On a donc pour $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_{\perp} + \frac{dv^2}{dt^2} \mathbf{e}_{\parallel}. \quad (1.10)$$

Ainsi l'accélération $\mathbf{a}$ a une composante tangente à la trajectoire ($\mathbf{e}_{\parallel}$) de valeur $\frac{dv^2}{dt^2}$ et une composante normale à la trajectoire ($\mathbf{e}_{\perp}$) de valeur $\frac{v^2}{\rho}$. On peut montrer que ρ est le rayon de courbure de la trajectoire. En effet, dans le voisinage immédiat du point P , la trajectoire peut être approximée par un arc de cercle, ρ serait alors le rayon de ce cercle. Plus la trajectoire est courbée autour de P , plus la vitesse changera rapidement selon $\mathbf{e}_{\perp}$. De fait, plus ρ sera petit et plus la composante normale de $\mathbf{a}$, $\frac{v^2}{\rho}$, sera grande.

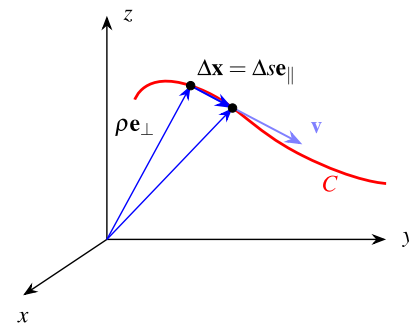


Figure 1.3 ▲
Accélération sur une trajectoire courbe.

1.2 Plusieurs particules ponctuelles

Pour représenter la position de N particules dans notre espace de configuration à 3 dimensions nous avons besoin de N triplets de nombres (total $3N$)

$$\mathbf{r}_v = (x_{v1}, x_{v2}, x_{v3}) ; \quad v = 1, 2, \dots, N. \quad (1.11)$$

L'évolution d'un tel système sera représentée par N trajectoires (une par particule) dans cet espace.

Il est souvent utile d'imaginer un espace abstrait comptant $3N$ dimensions, $3N$ coordonnées y sont nécessaires pour décrire la position d'un point de cet espace qui donne à lui seul la position instantanée des N particules. Par un léger abus de notation on note les coordonnées de ce point $\{x_i ; i = 1, 2, \dots, n = 3N\}$ et on peut parler de la trajectoire du système dans cet espace.

Ainsi, assez typiquement on écrira alors des expressions comme la force par exemple :

$$F_i(x_j, t) \text{ (} i^{\text{ème}} \text{ composante)} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.12)$$

1.3 Éléments de dynamique

Trois postulats proposés par Newton permettent de décrire la dynamique mouvement d'un système quelconque de N particules.

1. Première loi de Newton ou principe de l'inertie : le mouvement d'un corps isolé est rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.
2. Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique de translation : Ce principe relie la force à la masse et l'accélération par l'équation fondamentale du mouvement

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1.13)$$

où $\mathbf{F}$ désigne la somme des forces extérieures exercées sur l'objet, m est sa masse et $\mathbf{a}$ correspond à l'accélération de son centre d'inertie.

3. Troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques : Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B

L'équation fondamentale du mouvement prend plusieurs formes (pas nécessairement équivalentes)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} ; \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} ; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.14)$$

La quantité $\mathbf{F}$ est la force. Elle détermine le système et est déterminée empiriquement, c'est-à-dire c'est l'expérience qui nous en donne l'expression.

Cette expression qui est vraie pour

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (1.15)$$

le demeure pour un nombre n de degrés de liberté. Pour alléger, écrivons

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \quad (1.16)$$

un vecteur à n composantes. Intégrant m dans $\mathbf{F}$ (qui n'aura plus les dimensions d'une force mais celles d'une accélération) écrivons l'opération de Newton :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) ; \quad (1 \text{ équation vectorielle à } n \text{ composantes, } n \in \mathbb{N}) \\ \ddot{x}_i &= f_i(x_j, \dot{x}_j, t) ; \quad (n \text{ équations scalaires, } i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.18)$$

ou encore

$$\ddot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_\mu, \dot{\mathbf{x}}_\mu, t) ; \quad v, \mu = 1, 2, \dots, N \text{ particules.} \quad (1.19)$$

$$(N \text{ équations vectorielles à 3 composantes}) \quad (1.20)$$

L'équation de Newton, en tant que loi physique se doit d'obéir à certaines symétries que nous fait découvrir l'observation de la nature. On dit alors que la mécanique classique doit être invariante par rapport aux transformations de Galilée. Cette invariance est valable pour les systèmes physiques fermés. Il n'y a qu'un seul

tel système, c'est l'Univers mais en pratique les effets des corps *éloignés* sont souvent négligeables et on fait l'approximation que le système est fermé. Cela signifie que tous les corps qui jouent un rôle significatif sur le système sont inclus dans le système. Il n'y a pas de *force extérieure*. Cette dernière notion de force extérieure peut également être utile, mais nous y reviendrons.

L'étude d'un système physique peut se faire entre t_0 et t ou entre $t_0 + s$ et $t + s$ (on peut refaire aujourd'hui une expérience faite hier et obtenir les mêmes résultats). Ainsi,

$$\ddot{x}_i = f_i(x_j, \dot{x}_j, t) = f_i(x_j, \dot{x}_j, t + s) \quad (1.21)$$

où s est quelconque. On en conclut que f ne peut dépendre du temps et donc

$$\ddot{x}_i = f_i(x_j, \dot{x}_j) ; \quad n = 3N \text{ équations.} \quad (1.22)$$

Postulons que les résultats d'une expérience sont indépendants de l'endroit où elle est faite. Si je déplace d'une même distance orientée, $\mathbf{a}$, chaque particule du système physique alors sa position passe de $\mathbf{x}_v$ à $\mathbf{x}_v + \mathbf{a}$ (v compte les particules) alors que $\dot{\mathbf{x}}_v$ demeure $\dot{\mathbf{x}}_v$ puisque $\dot{\mathbf{a}} = 0$. La loi de Newton $\ddot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_\mu, \dot{\mathbf{x}}_\mu)$ doit être indépendante de $\mathbf{a}$, ce qui impose que $\mathbf{f}_v$ dépende de $\mathbf{x}_\mu$ sous la forme $\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda$ puisque

$$\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda \rightarrow (\mathbf{x}_\mu + \mathbf{a}) - (\mathbf{x}_\lambda + \mathbf{a}) \equiv \mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda \quad (1.23)$$

donc

$$\ddot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda, \dot{\mathbf{x}}_\mu). \quad (1.24)$$

On sait également par expérience que la physique est la même pour deux observateurs se déplaçant l'un par rapport à l'autre avec une vitesse constante (*translation* de vitesses). Cela impose soit

$$\mathbf{f}_v = \begin{cases} \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda) \\ \text{ou} \\ \mathbf{f}_v(\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_\lambda, \dot{\mathbf{x}}_\mu - \dot{\mathbf{x}}_\lambda). \end{cases} \quad (1.25)$$

On admet également que la physique au Canada est la même qu'en Australie, même s'ils ont la tête en bas. Par conséquent les lois physiques, comme l'équation de Newton ne peuvent pas dépendre de l'orientation de notre système de référence. Un tel changement d'un angle ϕ autour d'un axe $\mathbf{e}_\perp$ se note, en coordonnées cartésiennes

$$\mathbf{r} \rightarrow \phi \mathbf{e}_\perp \times \mathbf{r} \quad (1.26)$$

ou, si on écrit $\mathbf{r}$ sous forme (matricielle) d'un vecteur où les éléments sont les composantes de $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r} \rightarrow G\mathbf{r} ; \text{ où } G = \text{matrice } 3 \times 3 \text{ pour une particule} \quad (1.27)$$

Clairement, si

$$\mathbf{r} \rightarrow G\mathbf{r} \quad (1.28)$$

alors

$$\dot{\mathbf{r}} \rightarrow G\dot{\mathbf{r}} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{r}} \rightarrow G\ddot{\mathbf{r}} \quad (1.29)$$

donc l'invariance de

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \implies G\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(G\mathbf{r}, G\dot{\mathbf{r}}) \quad (1.30)$$

implique

$$\mathbf{f}(G\mathbf{r}, G\dot{\mathbf{r}}) = G\mathbf{f}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (1.31)$$

Complétons tout cela avec les autres lois de Newton avant de revenir plus tard sur certaines conséquences des résultats ci-dessus. Dans un système fermé, la loi d'action-réaction stipule que si un corps, noté par l'indice $\mathbf{v}$ agit avec une force $\mathbf{F}_{\mu\mathbf{v}}$ sur un corps μ alors ce corps μ agit sur $\mathbf{v}$ avec une force $\mathbf{F}_{\mu\mathbf{v}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{v}\mu}$. Ainsi si nous n'avons que deux corps, avec $\mathbf{r}_{\mathbf{v}} = (x_{\mathbf{v}1}, x_{\mathbf{v}2}, x_{\mathbf{v}3})$

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} \quad (1.32)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \quad (1.33)$$

ou de façon générale, pour N corps (sans somme sur $\mathbf{v}$)

$$m_{\mathbf{v}} \ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}} = \sum_{\mu=1, \mu \neq \mathbf{v}}^N \mathbf{F}_{\mathbf{v}\mu} = - \sum_{\mu=1, \mu \neq \mathbf{v}}^N \mathbf{F}_{\mu\mathbf{v}}. \quad (1.34)$$

(un corps n'exerce pas de force externe sur lui-même $\mathbf{F}_{vv} = 0$ selon la 3e loi de Newton)

Cette loi a une conséquence immédiate et importante : la conservation du moment linéaire total. Sommons ci-dessus sur v

$$\sum_{v=1}^N m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \sum_{v=1}^N \sum_{\mu=1, \mu \neq v}^N \mathbf{F}_{v\mu} = 0 \quad (1.35)$$

donc puisque les masses ne changent pas

$$\sum_{v=1}^N m_v \ddot{\mathbf{r}}_v = \frac{d}{dt} \left(\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v \right) = 0. \quad (1.36)$$

La quantité dérivée est donc une constante dans le temps, c'est-à-dire $\sum_{v=1}^N m_v \dot{\mathbf{r}}_v = \mathbf{C}$.

Il est habituel de définir le moment $\mathbf{p}_v = m \dot{\mathbf{r}}_v$. Nous aurons donc

$$\sum_{v=1}^N \mathbf{p}_v = \mathbf{C} \equiv \mathbf{P} : \text{ le moment linéaire total.} \quad (1.37)$$

Remarque 1.1

i En conclusion : le moment (linéaire) total d'un système fermé est une constante du mouvement. **i**

On définit le moment angulaire d'une particule par

$$\mathbf{l}_v = \mathbf{r}_v \times \mathbf{p}_v = m_v \mathbf{r}_v \times \dot{\mathbf{r}}_v \quad (1.38)$$

donc

$$\dot{\mathbf{l}}_v = m_v \dot{\mathbf{r}}_v \times \dot{\mathbf{r}}_v + m_v \mathbf{r}_v \times \ddot{\mathbf{r}}_v = 0 + m_v \mathbf{r}_v \times \ddot{\mathbf{r}}_v \quad (1.39)$$

$$= \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_v = \mathbf{r}_v \times \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{v\mu}. \quad (1.40)$$

Définissant le moment angulaire total du système

$$\mathbf{L} = \sum_{v=1}^N \mathbf{l}_v = \sum_{v=1}^N m_v \mathbf{r}_v \times \dot{\mathbf{r}}_v \quad (1.41)$$

alors

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{v=1}^N \mathbf{r}_v \times \sum_{\mu=1}^N \mathbf{F}_{v\mu} = \sum_{\mu,v=1}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_{v\mu} \quad (1.42)$$

$$= \sum_{\mu,v=1, \mu \neq v}^N \mathbf{r}_v \times \mathbf{F}_{v\mu} \quad (\text{puisque } \mathbf{F}_{vv} = 0) \quad (1.43)$$

$$= \sum_{v,\mu > v}^N (\mathbf{r}_v - \mathbf{r}_\mu) \times \mathbf{F}_{v\mu} \quad (\text{puisque } \mathbf{F}_{v\mu} = -\mathbf{F}_{\mu v}) \quad (1.44)$$

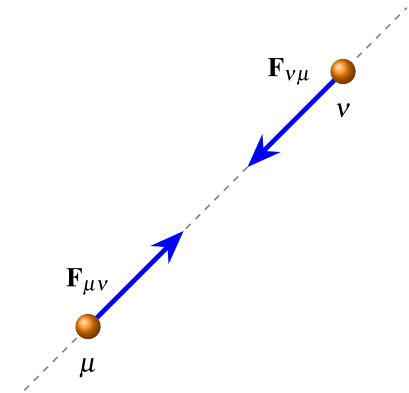


Figure 1.4 ▲
Forces entre deux particules.

où la 2^e ligne tient compte du fait qu'une particule n'agit pas sur elle-même, soit $\mathbf{F}_{\nu\nu} = 0$, et la 3^e ligne que $\mathbf{F}_{\nu\mu} = -\mathbf{F}_{\mu\nu}$.

Or, le vecteur $\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu$ est dans la direction reliant les particules ν et μ . Si la force entre ces particules est dans cette direction

$$\mathbf{F}_{\nu\mu} \parallel (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu)$$

comme sur la figure 1.4, alors le produit vectoriel (dénnoté par $\times$) sera zéro

$$(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\mu) \times \mathbf{F}_{\nu\mu} = 0$$

et $\dot{\mathbf{L}} = 0$ donc

$$\mathbf{L} = \text{constante.}$$

Remarque 1.2

i Par conséquent : si les particules constituant un système fermé n'agissent les unes sur les autres que selon la droite qui les relie, alors le moment angulaire total du système est une constante du mouvement.



1.4 Travail et Énergie

Lorsqu'une force $\mathbf{F}$ agit sur un système physique, disons une particule, on dit qu'elle effectue un travail sur ce système. Ceci

cause un changement de l'énergie de ce système. Soit une trajectoire C_1 entre les temps t_0 et t . Calculons la quantité $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ le long de cette trajectoire

$$\begin{aligned}
 \int_{x(t_0)}^{x(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} &= \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \stackrel{\text{traj. phys.}}{=} \int_{t_0}^t \left(m \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} dt \\
 &= \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} (v^2) dt \\
 &= \frac{1}{2} m v^2(t) - \frac{1}{2} m v^2(t_0) = T - T_0. \quad (1.45)
 \end{aligned}$$

Ici, à la seconde ligne, nous avons utilisé la relation

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \\
 &= 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 2 \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}
 \end{aligned}$$

Appelant $T = \frac{1}{2} m v^2$ l'énergie cinétique, on voit que l'application de la force $\mathbf{F}$ se traduit par un changement de cette énergie cinétique. Notons cependant que l'intégrale ci-dessus se fait le long d'une trajectoire. Le résultat peut donc dépendre de cette trajectoire (voir figure 1.5), c'est-à-dire de façon générale

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}.$$

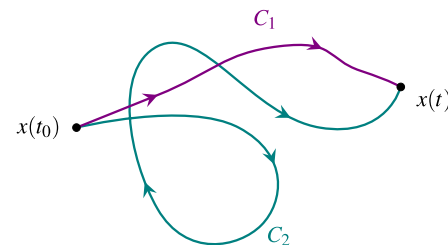


Figure 1.5 ▲
Trajectoires entre les temps t_0 et t .

Dans certains cas cependant, et ils sont physiquement importants, l'intégrale ne dépend pas de la trajectoire mais uniquement des points initial et final, on dit qu'elle est conservatrice (la force). Strictement parlant, il s'agit d'une propriété mathématique, c'est-à-dire qui résulte de la façon dont $\mathbf{F}$ dépend de $\mathbf{x}, \mathbf{v}, t$. Il se trouve que dans monde physique réel, plusieurs forces peuvent être décrites par de telles fonctions. Lorsque tel est le cas, l'intégrale de $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ sur un parcours fermé est évidemment nul.

$$0 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{S \in C} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.46)$$

où l'application du théorème de Stokes est responsable de la dernière branche de cette équation avec S une surface dont la courbe fermée C marque la frontière. Comme cette surface est arbitraire mais que le résultat de l'intégrale doit toujours être nul alors la fonction à intégrer doit être nulle

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 : \quad \text{force conservatrice.} \quad (1.47)$$

Dans ce cas il est toujours possible d'écrire $\mathbf{F}$ comme le gradient d'une fonction scalaire. On écrit

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x}) \quad (1.48)$$

et on appelle $V(\mathbf{x})$ l'énergie potentielle. Ainsi le travail fait par une telle force entre les points $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}$ sera

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \nabla V(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = V(\mathbf{x}_0) - V(\mathbf{x}) = V_0 - V. \quad (1.49)$$

On avait vu que ce même travail était donné par $T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)$. Nous aurons donc

$$T + V = T_0 + V_0 : \quad \text{Énergie conservée.} \quad (1.50)$$

Lorsque la force qui agit sur une particule est conservatrice on peut définir une constante du mouvement (indépendante de t) qu'on appelle l'énergie $E = T + V$. Physiquement la force est donnée par $-\nabla V$, on peut donc remplacer V par $V + \text{constante}$ sans changer la force $\mathbf{F}$. On change alors la valeur de E en $E + \text{constante}$. L'échelle d'énergie ne peut donc être fixée qu'à une constante additive près. En pratique on fixe la valeur de $V(\mathbf{x})$ à une certaine valeur, V_0 , pour une $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0$ et V_0 étant arbitraires.

1.5 Systèmes à N particules et forces extérieures

Supposons un ensemble de N particules interagissant entre elles et sur lesquelles peuvent également agir des forces extérieures. Notons m_i la masse de la $i^{\text{ème}}$ particule, $\mathbf{F}_i$ la force externe qui agit sur elle et $\mathbf{F}_{ij}$ la force due à l'interaction de la $j^{\text{ème}}$ particule sur la $i^{\text{ème}}$. Évidemment $\mathbf{F}_{jj} = 0$ et par la troisième loi de Newton $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Pour la $i^{\text{ème}}$ particule, l'équation de mouvement est

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (1.51)$$

Sommant sur toutes les particules

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} : \text{ force externe totale } \quad (1.52)$$

parce que $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = 0$. Avec $M = \sum_i m_i$: masse totale des N particules,

$$\mathbf{F} = M \left[\frac{1}{M} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \right] = M \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{x}_i \right] \quad (1.53)$$

d'où

$$\mathbf{F} = M \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X} : \text{ où } \mathbf{X} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{x}_i \quad (1.54)$$

donne la position du centre de masse du système. Le mouvement du centre de masse se fait comme si toute la masse y était concentrée et que la force externe totale s'y appliquait, *quelle que soit* l'interaction entre les particules. Définissant le moment linéaire total où $\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{X}}$, on aura

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P} \quad \text{où } \mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (1.55)$$

Si la force extérieure disparaît, $\mathbf{F} = 0 = \frac{d}{dt} \mathbf{P}$ alors $\mathbf{P} = \text{constante}$.

Après le moment linéaire total, étudions le moment angulaire total. Nous aurons évidemment par rapport à l'origine Ox

$$\mathbf{L} = \sum_i^N \mathbf{l}_i = \sum_i^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i \quad (1.56)$$

mesuré à partir de l'origine du système de coordonnées utilisées. Il est utile d'utiliser les coordonnées relatives que nous noterons les $\mathbf{x}'_i$, et définis par $\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{X} \implies \mathbf{x}_i = \mathbf{X} + \mathbf{x}'_i$,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i^N m_i \mathbf{x}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i = \sum_i^N m_i (\mathbf{X} + \mathbf{x}'_i) \times (\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{x}}'_i) \\ &= \sum_i^N m_i (\mathbf{x}'_i \times \dot{\mathbf{x}}'_i + \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{x}}'_i + \mathbf{x}'_i \times \dot{\mathbf{X}}) \end{aligned}$$

mais $\sum_i m_i \mathbf{x}_i = 0$ donc $\sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}'_i = 0$ aussi, et alors

$$\mathbf{L} = \sum_i^N m_i \mathbf{x}'_i \times \dot{\mathbf{x}}'_i + M \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{L}_r + \mathbf{L}_{\text{CM}} \quad (1.57)$$

où

$$\mathbf{L}_r = \sum_i^N m_i \mathbf{x}'_i \times \dot{\mathbf{x}}'_i$$

et

$$\mathbf{L}_{\text{CM}} = M \mathbf{X} \times \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \times \mathbf{P}..$$

Ainsi le moment angulaire total par rapport à l'origine d'un système inertiel est la somme vectorielle du mouvement angulaire relatif des particules par rapport au CM et d'un moment angulaire correspondant à la totalité de la masse centrée au CM par rapport à l'origine du système inertiel.

Voici un sommaire des propriétés globales d'un système de particules :

Propriétés globales	Dynamique
$M = \sum_i m_i$	
$M\mathbf{X} = \sum_i m_i \mathbf{x}_i$	
$\mathbf{P} = M\mathbf{V} = M\dot{\mathbf{X}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$	$M\mathbf{A} = M\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}$
$M\mathbf{A} = M\ddot{\mathbf{X}} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$	
$T = \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$	
$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$	$\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau}$

On peut passer d'un ensemble de particules ponctuelles à un corps de volume fini en remplaçant de façon adéquate les sommes par des intégrales. Dans ce cas on voit apparaître des densité de masse $\rho(\mathbf{x})$ telles que

$$M = \int_{\text{Volume}} \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}. \quad (1.58)$$

Supposons maintenant qu'au lieu de considérer un ensemble de

particules de masses $m_1, m_2, \dots$ nous avons affaire à un milieu continu comme un solide. Le même raisonnement que dans les sections précédentes s'applique encore avec toutefois un traitement qui diffère quelque peu :

1. La particule de masse m_i localisée à la position $\mathbf{x}_i$ est remplacée par un élément de masse $\rho(\mathbf{x}) d^3x$ à la position $\mathbf{x}$ où $\rho(\mathbf{x})$ et d^3x sont la densité de masse et l'élément de volume en trois dimensions respectivement.
2. Les propriétés des particules $\mathbf{X}_i$ sont remplacées par des fonctions de la position $\mathbf{X}(\mathbf{x})$.
3. Les sommes $\sum_i$ sont remplacées par des intégrales.

Voici quelques exemples pour des relations énoncées ci-haut :

Propriétés globales	Milieu continu
$M = \sum_i m_i$	$M = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x$
$M\mathbf{X} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i$	$M\mathbf{X} = \int \rho(\mathbf{x}) d^3x$
$\mathbf{P} = M\mathbf{V} = M \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$	$\mathbf{P} = M\mathbf{V} = \int \mathbf{v} \rho(\mathbf{x}) d^3x$
$M\mathbf{A} = M \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$	$M\mathbf{A} = \int \mathbf{a} \rho(\mathbf{x}) d^3x$
$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$	$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\int \mathbf{v}^2 \rho(\mathbf{x}) d^3x$
$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i$	$\mathbf{L} = \int \mathbf{x} \times \mathbf{v} \rho(\mathbf{x}) d^3x$

Exemple 1.1

◆ Système simple unidimensionnel :

Si la force $F = F(x)$ et qu'en une dimension il existe une fonction $V(x)$ telle que

$$F(x) = -\frac{\partial}{\partial x}V(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (1.59)$$

Supposons $V(x)$ comme sur la figure 1.6 et étudions une particule qui serait soumise à une telle force. Nous avons

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = T + V. \quad (1.60)$$

Évidemment $T \geq 0$ et donc $E \geq V(x)$ toujours. Donc $E \geq E_0$. Ceci contraint le mouvement. Par exemple si $E = E_1$, alors le mouvement sera limité à la région entre x_1^- et x_1^+ . Par contre si $E = E_2$, alors non seulement la région $x_2^- \leq x \leq x_2^+$ est-elle possible mais aussi la région $x \geq x_2^{++}$. ◆

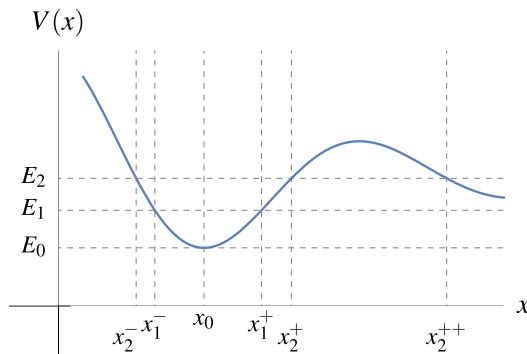


Figure 1.6 ◀▶
Particule dans un potentiel.

En une dimension il est simple d'obtenir la solution à partir de l'équation pour l'énergie ci-dessus. En effet, isolant $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} (E - V(x))^{\frac{1}{2}} \quad (1.61)$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (1.62)$$

Intégrant,

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \quad (1.63)$$

ou formellement $t - t_0 = f(x, E) - f(x_0, E)$ où on isole $x = x(t - t_0, E, x_0)$: solution unique si on connaît E et $x_0 = x(t_0)$.

1.6 Degrés de liberté

La notion de degré de liberté jouera un rôle important dans les chapitres qui vont suivre. Cette section est consacrée à la première étape de cette notion.

La première caractéristique des degrés de liberté est qu'ils se comptent. Un système physique a un, deux, trois, ..., N degrés de liberté.

Le degré de liberté est la généralisation du nombre de directions indépendantes selon lesquelles une particule peut se déplacer dans l'espace physique. Ainsi, une particule ponctuelle pouvant se déplacer dans une direction possède un degré de liberté ; elle en possède deux si elle peut se déplacer dans un espace à deux dimensions, etc.... Des forces agissant selon une ou plusieurs de ces directions peuvent limiter le mouvement de la particule à un domaine fini selon ces directions sans faire disparaître le degré de liberté. Par exemple, si une particule est libre de se déplacer selon l'axe Ox seulement, elle a un degré de liberté. Si une force, disons harmonique, $F_x = -kx$, agit sur la particule, le domaine de variation de la particule sera réduit de $-x_0$ à $+x_0$ selon son énergie $E = \frac{kx_0^2}{2}$, et la particule a toujours un degré de liberté. Cependant si cette force

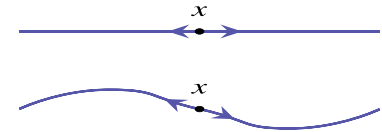


Figure 1.7 ▲
Trajet d'une particule.

est caractérisée par une tige rigide qui empêche tout mouvement, alors le domaine de variation du mouvement est réduit à zéro et la particule perd son degré de liberté. Dans l'exemple considéré ici (voir figure 1.7) la direction du mouvement est une droite (cartésienne). C'est un espace à une dimension géométrique correspondant à un degré de liberté physique. La particule pourrait ne pouvoir se déplacer que selon une courbe quelconque, disons la deuxième courbe de la figure 1.7. Encore une fois la particule n'a qu'un seul degré de liberté, une courbe étant un espace à une dimension, un seul nombre ou coordonnée étant suffisant pour déterminer la position de tout point sur la courbe, par exemple la distance orientée (+ ou -) par rapport à une origine O quelconque.

On peut donc prendre pour règle que le nombre de degrés de liberté d'une particule est égal au nombre de coordonnées nécessaires et suffisantes pour déterminer la position de la particule. En général, compter le nombre de coordonnées nécessaires n'est pas difficile ; un système physique comptant n particules pouvant toutes se déplacer dans un espace à D dimensions aura nD degrés de liberté même si ces particules sont en interaction à condition que ces interactions ne limitent pas à zéro les domaines de variation. Prenons par exemple deux particules ponctuelles, 1 et 2 dans un espace à deux dimensions (voir figure 1.8). Ce système compte $2 \times 2 = 4$ degrés de liberté. Pour décrire ces 4 degrés de liberté on peut choisir les 4 coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2 . On peut aussi choisir

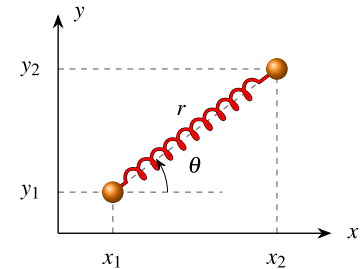


Figure 1.8 ▲

Deux particules ponctuelles reliées par un ressort.

x_1, y_1, θ et r , cette dernière coordonnée mesurant la distance entre les deux particules. À chaque fois, quatre coordonnées sont nécessaires et suffisantes pour décrire les directions selon lesquelles les composantes du système peuvent se déplacer, c'est-à-dire définir exactement la position des deux particules du système. Dans ce problème il existe des familles de solutions, correspondant à des conditions initiales spéciales, qui ont comme caractéristique, soit $\theta = \text{constante}$ soit que $r = \text{constante}$ et où il apparaît donc que le domaine de variation de certaines coordonnées est réduit à zéro, semblant indiquer que le nombre de degrés de liberté est maintenant de moins de quatre. Il n'en est rien, le système continue d'avoir quatre degrés de liberté, un simple changement des conditions initiales demandera quatre coordonnées encore une fois pour décrire le mouvement. Le nombre de degrés de liberté ne se compte pas dans la solution mais est une propriété intrinsèque du système physique.

Supposons maintenant que le ressort soit remplacé par une tige rigide sans masse de longueur l (voir figure 1.9). Le domaine de variation de la distance entre les deux particules est réduit à zéro. Un degré de liberté vient de disparaître. En effet on peut écrire soit

$$r = l \quad \Rightarrow \quad dr = 0$$

soit

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = l$$

alors

$$dr = d\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right) = 0.$$

Dans la première équation, on lit directement que r est réglé à la valeur l . Il ne reste que les degrés de liberté décrits par x_1, y_1, θ . Dans la deuxième équation, on lit qu'il existe une relation de dépendance entre quatre coordonnées (x_1, y_1, x_2, y_2) . Algébriquement cela signifie que trois seulement des quatre coordonnées sont indépendantes. Ainsi donc un degré de liberté est décrit mathématiquement par une coordonnée indépendante. Cela signifie que, physiquement, un degré de liberté correspond à une *direction généralisée* le long de laquelle le système peut se déplacer indépendamment des autres *directions*, c'est-à-dire en les gardant constantes. Clairement ici, si on varie x_1, x_2 , et y_1 par exemple, alors y_2 n'est pas libre de prendre n'importe quelle valeur. y_2 est contraint de prendre la valeur telle que $\sqrt{\quad} = l$ ci-dessus. Ce n'est pas un degré de liberté puisqu'il n'est pas indépendant des autres.

Nous aurons à revenir sur la notion de degré de liberté. Notons ici que nous les comptons dans l'espace physique, en général l'espace à 3 dimensions dans lequel se situe la mécanique classique (ou ses sous-espaces à 2 ou 1 dimensions). Il existe aujourd'hui des domaines d'études en physique, par exemple celui appelé *systèmes dynamiques*, où on préfère travailler dans un espace des phases qui contient les vitesses en plus des coordonnées. Par exemple, l'espace

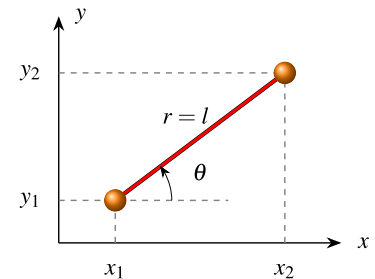


Figure 1.9 ▲

Deux particules ponctuelles reliées par une tige rigide.

des phases correspondant à notre espace physique habituel décrit, disons par les coordonnées x , y , et z , comprendra également les vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$, et $\dot{z}$. C'est un espace à 6 dimensions et il est commun en système dynamique de compter coordonnées et vitesses comme étant des degrés de liberté. En fait, de façon plus générale, l'état d'un système à un instant t peut être représenté par un point

$$x(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$$

dans un espace à $2n$ dimensions qui constitue l'espace des phases. Comme nous le verrons, la chose se justifie aisément mais nous garderons ici notre notion de degré de liberté défini dans l'espace physique seulement. Simple question de convention. Nous reviendrons sur cette question plus loin.

1.7 Exercices

1.1 Coordonnées polaires

Considérez un vecteur en coordonnées polaires (ρ, ϕ) : $\mathbf{R} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y = \rho \mathbf{e}_\rho$. Dérivez rigoureusement le vecteur accélération en coordonnées polaires, $\mathbf{a} = d^2\mathbf{R}/dt^2$.

1.2 Bloc sur un plan incliné

Un bloc de masse m est posé sur un coin de masse M incliné de $\theta = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale. Le système est initialement au repos et les coefficients de friction sont tous nuls (figure 1.10).

- Quelle doit être l'accélération horizontale du coin par rapport à la table pour que le bloc m demeure au repos par rapport au coin ?
 - Quelle force doit-on alors appliquer sur le coin ?
 - Considérons le cas où aucune force externe autre que gravitationnelle n'est appliquée sur le système, décrivez en la dynamique (solutionnez les équations de mouvement).
- Indice : Le bloc et le coin bougent tous deux par rapport au sol. Toutefois, si on se place dans le repère du coin, le bloc glisse sur un plan incliné de $\theta = 30^\circ$.

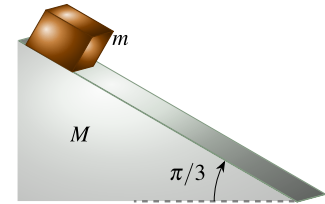


Figure 1.10 ▲
Problème 1.2.

1.3 En apesanteur

À quelle vitesse angulaire par rapport à sa vitesse actuelle la

Terre devrait-elle tourner pour que nous soyons en apesanteur à sa surface ?

1.4 Bille sur une sphère

Une bille glisse sans frottement sur une sphère de rayon r . À partir du sommet (figure 1.11). À quel angle par rapport à la verticale quittera-t-elle la surface ?

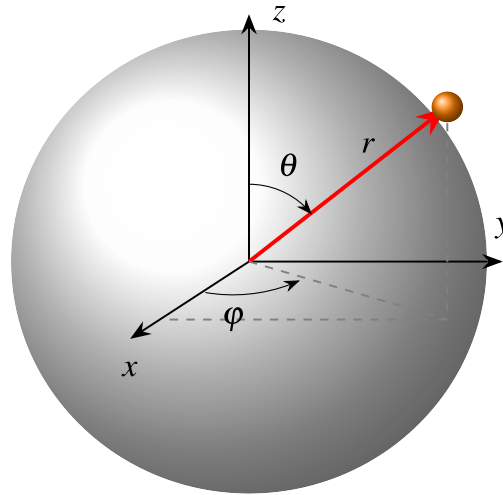


Figure 1.11 ◀▶
Problème 1.4.

1.5 Bille sur un anneau mince

Un anneau mince de masse M et de rayon R tourne autour de son axe vertical (figure 1.12). Une petite bille de masse m peut glisser librement et sans frottement sur l'anneau. Si lorsque

la bille est au sommet, la vitesse angulaire de l'anneau est ω_0 , quelle est la vitesse angulaire lorsque la bille se trouve à un angle $\theta = \pi/4$ rad par rapport à la verticale ?

1.6 Disques concentriques

Un disque de moment d'inertie $4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ tourne librement sur lui-même à raison de 3 rad/s. Un deuxième disque, de moment d'inertie $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ glisse sur un axe et se dépose sur le premier, puis les deux tournent ensemble.

- Quelle est la vitesse angulaire de l'ensemble ?
- Quelle est la variation d'énergie cinétique du système ?

1.7 Virage serré

Une voiture de masse m prend un virage de rayon r , incliné vers l'intérieur d'un angle θ (figure 1.13). Quelle est la vitesse maximale à laquelle la voiture peut prendre le virage sans déraper ? Le coefficient de friction statique est μ .

1.8 Une échelle

Une échelle de longueur L et de poids p est posée sur un plancher rugueux et contre un mur sans frottement. Le coefficient de friction statique du plancher est $\mu = 0.6$.

- Déterminez l'angle maximal θ entre le mur et l'échelle pour que l'échelle ne glisse pas.
- Déterminez la force exercée par le mur pour cette valeur de θ .

1.9 Particules

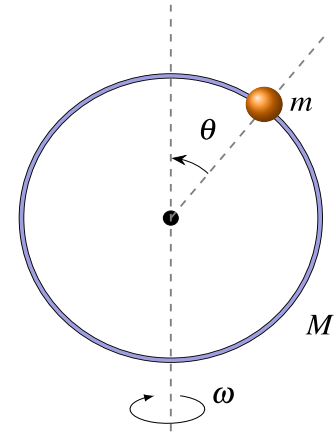


Figure 1.12 ▲
Problème 1.5.

Une particule de masse $m_1 = 4 \text{ kg}$ se déplace à la vitesse $5 \mathbf{e}_x \text{ m/s}$ tandis qu'une particule de masse $m_2 = 2 \text{ kg}$ se déplace à $2 \mathbf{e}_x \text{ m/s}$.

- Quelle est l'énergie cinétique du centre de masse ?
- Quelle est l'énergie cinétique relative ?

1.10 Un obus

Un obus de masse $M = 5 \text{ kg}$ se déplace à une vitesse $v = 10 \text{ m/s}$ dans l'espace explode en deux parties de masses égales

- Si le premier fragment a une vitesse $v_1 = -2 \text{ m/s}$, quelle est la vitesse du deuxième fragment ?
- Quelle est l'énergie cinétique totale initiale et finale ?
- Quelle est l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse avant et après l'explosion ?
- Quelle est l'énergie cinétique totale initiale et finale pour un observateur dans le repère du centre de masse de l'obus ?
- Discutez les résultats

1.11 Un haltère

Un haltère est constitué de 2 masses égales reliées par une tige de masse négligeable de longueur $2a$. L'haltère est collé sur une table-tournante qui tourne à la vitesse angulaire ω . L'haltère est orienté selon un rayon, son milieu étant situé à une distance R du centre de la table-tournante. Quel est le moment cinétique total de l'haltère.

1.12 Potentiel unidimensionnel

Une particule ponctuelle de masse m est soumise au potentiel 1-D :

$$V(x) = 4x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{50}x^6$$

Approximer au second ordre la solution $x(t)$ autour de $x = 0$.

1.13 Deux corps

Deux corps de masses M et $m \ll M$ gravitent l'un autour de l'autre. Décrire le mouvement radial ($r(t)$) de la masse m autour de la masse M . (Faites les approximations nécessaires en remplaçant le potentiel efficace par une série de Taylor tronquée au second ordre).

1.14 2^e loi de Kepler

Selon la 2^e loi de Kepler relative au mouvement planétaire (trajectoire elliptique), la droite joignant le Soleil et une planète balaie des aires égales en des temps égaux. Montrer que ce phénomène découle de la conservation du moment cinétique.

1.15 Champ de force

Un champ de force est donné par :

$$\mathbf{F}_1 = \left(2x(y-1) + ze^x, 4y + x^2, e^x - \frac{1}{z} \right)$$

Une particule de masse m est déplacée dans ce champ par une

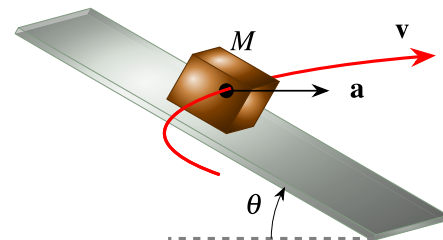


Figure 1.13 ▲
Problème 1.7.

force externe $\mathbf{F}_{\text{EXT}}$, le long de la trajectoire :

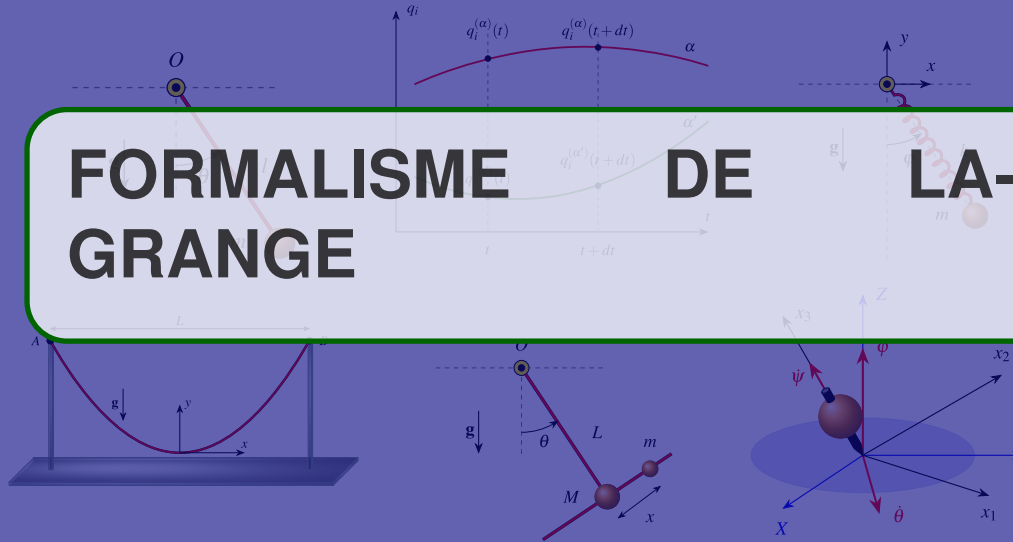
$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad t \in [\pi, 3\pi/4]$$

- (a) Cette force est-elle dérivée d'un potentiel ? Si oui, quel est ce potentiel ?
- (b) Quelle est la variation d'énergie cinétique du système lors du parcours de la trajectoire $\mathbf{r}(t)$?



2

FORMALISME DE LAGRANGE



Chapitre 2

2.1	Coordonnées généralisées	36
2.2	Principe de base	38
2.3	Variation fonctionnelle	41
2.4	La fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$	51
2.5	Coordonnées curvilignes	58
2.6	Contraintes holonomes et non-holonomes	69
2.7	Lois de conservation et constantes du mouvement	76
2.8	Invariance de jauge	96
2.9	Quelques caractéristiques, propriétés, limites...	104
2.10	Symétrie de l'espace-temps ★★	108
2.11	Exercices	120

LE FORMALISME DE LAGRANGE permet d'étudier une vaste gamme de problèmes en mécanique. En ce sens, il est équivalent au formalisme de Newton mais, il a sur ce dernier un certain nombre d'avantages. D'abord, il est fondé sur un principe théorique fondamental et élégant. Il utilise

des quantités scalaires plutôt que vectorielles et cela permet de lui donner une forme indépendante des coordonnées utilisées. C'est également la porte d'entrée à une foule de méthodes qui forment la base de la physique moderne en mécanique quantique et dans les théories de champs classiques et quantiques.

Nous présenterons d'abord la méthode dans un cadre assez simple pour ensuite en souligner certaines limites d'application. L'intérêt et les avantages de ce formalisme deviendront graduellement évidents.

2.1 Coordonnées généralisées

Afin de souligner l'invariance de forme selon les types de coordonnées utilisées, nous parlerons de *coordonnées généralisées* que nous noterons q_i . Elles sont absolument quelconques sauf pour les limitations que nous verrons dans la section sur les contraintes.

Remarque 2.1

i Rappel historique : Joseph Louis de Lagrange

Joseph Louis, comte de Lagrange (en italien Giuseppe Lodovico de Lagrangia), né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813 (à 77 ans), est un mathématicien, physicien mécanicien et astronome italien.

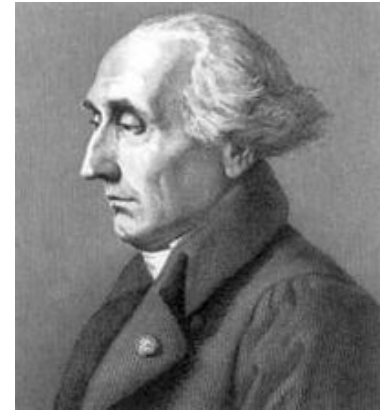


Figure 5.2 ▲

Joseph Louis, comte de Lagrange, né Giuseppe Lodovico de Lagrangia, (1736 - 1813).

En mathématiques :

- Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques ;
- Démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés ;
- On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange.

En physique :

- Précise le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756 ;
- Invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange ;
- Développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange ;
- Entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (1772).

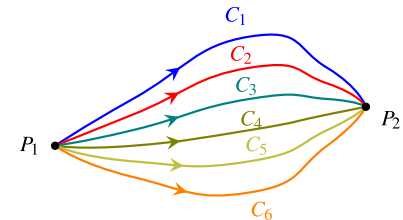


Figure 2.2 ▲
Trajectoires entre points P_1 et P_2 .

2.2 Principe de base

Nous discutons ici d'une particule ponctuelle dont la position instantanée est donnée par les trois nombres notés $\{q_i \mid i = 1, 2, 3\}$. Cette particule suit une trajectoire qui se développe avec le temps t et dont l'équation

$$q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

est le résultat recherché. Le long de la trajectoire, on définira les composantes de la vitesse généralisée $\{\dot{q}_i \mid i = 1, 2, 3\}$ définies par

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Notre expérience consiste en une source de particules (identiques, avec les mêmes conditions initiales) que nous situons au point P_1 et en un détecteur que nous situons en P_2 . À un temps noté t_1 nous émettons une particule en P_1 (de coordonné $q_i(t_1)$). Nous ne nous intéressons qu'aux particules détectées en P_2 à un temps t_2 tel que $t_2 - t_1$ est le même pour toutes les expériences. Nous répétons l'expérience un bon nombre de fois. À priori, il y a un nombre infini de trajectoires possibles pour les particules satisfaisant les paramètres de l'expérience : $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$ (voir figure 2.2). Pour les distinguer les unes des autres, utilisons le paramètre α tel que la trajectoire C_α obéit aux équations

$$q_i^{(\alpha)} = q_i^{(\alpha)}(t) \quad (2.3)$$

où, pour un i donné $q_i^{(\alpha)}(t) \neq q_i^{(\alpha')}(t)$ pour $\alpha \neq \alpha'$ (deux trajectoires différentes). Cependant, ayant observé l'expérience à de multiples reprises, nous constatons que les particules ayant satisfait les paramètres de l'expérience ont *toutes* utilisé la même trajectoire, disons C_0 . La nature semble donc préférer cette trajectoire et la choisit toujours.

La méthode de Lagrange compare les trajectoires possibles entre elles, assigne une quantité à chaque trajectoire et nous donne un critère pour choisir la bonne. Pour ce faire, nous calculerons (en principe) une quantité, notée $S(\alpha)$, qui caractérise la trajectoire α

$$S(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q_i^{(\alpha)}(t), \dot{q}_i^{(\alpha)}(t), t\right) dt \quad (2.4)$$

où la fonction L , qui reste à déterminer, dépend des $q_i(t)$, des $\dot{q}_i(t)$ et, possiblement, explicitement de t lui-même. On aurait pu prévoir que L ait une dépendance en $\ddot{q}_i$ — mais l'expérience nous indique que ce n'est pas nécessaire. Ayant calculé (en principe) $S(\alpha)$ pour toutes les trajectoires, nous décidons de la bonne en comparant les différentes valeurs obtenues pour S . Pour pouvoir choisir un α donné, il s'offre à nous une variété de critère de sélection : On peut choisir que S prenne une valeur particulière en ce point (cette méthode est un peu trop arbitraire et se généralise mal) ou que S ait un comportement particulier. Le comportement le plus simple à identifier, c'est celui d'un point stationnaire, là où S est un

extremum. C'est le cas de $\bar{\alpha}$ sur la figure 2.3, mais également de α^1 . Dans ce qui suit, nous supposons toujours qu'il s'agit de $\bar{\alpha}$ (bien que ce soit difficilement démontrable). Nous écrirons donc la condition qui décrit le minimum de $S(\alpha)$

$$\left. \frac{dS(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\bar{\alpha}} = 0 \implies dS(\alpha)|_{\bar{\alpha}} = 0 \quad (2.5)$$

et qui définit $\bar{\alpha}$ et fixe ainsi la *bonne* trajectoire sur laquelle S prend la valeur extrême (minimale) $S(\bar{\alpha})$.

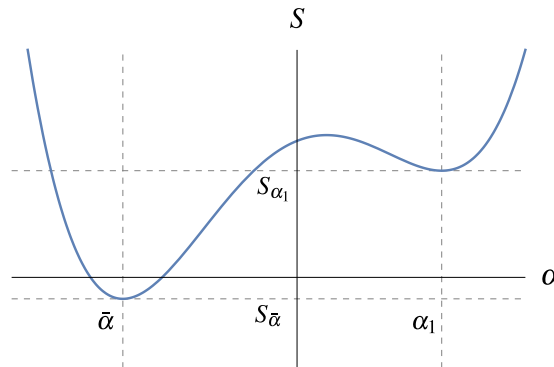


Figure 2.3 ◀▶
Minimisation de l'action.

La quantité S s'appelle l'action et le principe énoncé ci-dessus est le principe de moindre action. C'est un principe variationnel, c'est-à-dire nous recherchons un point fixe de S tel que la variation $dS = 0$. Aujourd'hui, on tend à baser toutes les lois de la physique sur de tels principes.

2.3 Variation fonctionnelle

Ci-dessus nous avons écrit

$$dS = 0 \quad (2.6)$$

comme si la variation de S en était une au sens habituel, c'est-à-dire le long d'une trajectoire. Or, ce n'est pas le cas du tout, la variation est faite en comparant des trajectoires, c'est-à-dire en variant selon les fonctions $q_i^{(\alpha)}(t)$ (voir figure 2.4). On notera de telles variations à l'aide du symbole δ plutôt que du symbole d qui est utilisé pour le calcul différentiel. La distinction est claire

$$\text{différence } d : dq_i^{(\alpha)}(t) = q_i^{(\alpha)}(t + dt) - q_i^{(\alpha)}(t) \quad (2.7)$$

$$\text{variation } \delta : \delta q_i^{(\alpha)}(t) = q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha')}(t). \quad (2.8)$$

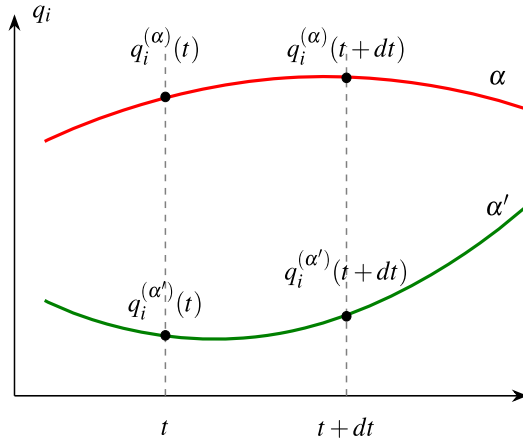


Figure 2.4 ◀▶
Variations des trajectoires.

Sur une trajectoire donnée on connaît $q_i^{(\alpha)} = q_i^{(\alpha)}(t)$ et les vitesses $\dot{q}_i^{(\alpha)}(t)$ sont fixées. Mais en comparant des trajectoires, on constate sur la figure 2.5 qu'entre α et α' , $\delta q^{(\alpha)}(t)$ est le même qu'en comparant α avec α'' , ce qui n'est pas le cas pour la variation de la vitesse généralisée $\delta \dot{q}^{(\alpha)}(t)$. Les variations des vitesses sont donc indépendantes des variations des coordonnées dans ce formalisme parce que nous comparons des trajectoires différentes. Ces variations étant à temps constant, c'est-à-dire par exemple ici

$$q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha')}(t) = q_i^{(\alpha)}(t) - q_i^{(\alpha'')}(t) = \delta q_i^{(\alpha)}(t) \quad (2.9)$$

alors que

$$\dot{q}_i^{(\alpha)}(t) - \dot{q}_i^{(\alpha')}(t) \neq \dot{q}_i^{(\alpha)}(t) - \dot{q}_i^{(\alpha'')}(t) \quad (2.10)$$

les variations en α et en temps t sont indépendantes et on peut écrire

$$\delta \dot{q}_i^{(\alpha)}(t) = \delta \left(\frac{d}{dt} q_i^{(\alpha)}(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(\delta q_i^{(\alpha)}(t) \right). \quad (2.11)$$

Si nous calculons la différentielle ordinaire d'une fonction $f(x, y)$, c'est-à-dire df , nous obtiendrons

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (2.12)$$

si les variations dx et dy sont indépendantes. Le même type d'opération s'applique au calcul variationnel. Par exemple pour la quantité L

$$\delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t. \quad (2.13)$$

Le dernier terme $\frac{\partial L}{\partial t} \delta t$ ne contribue pas puisque $\delta t \equiv 0$, les variations étant prises à temps constant. Alors, on peut écrire

$$\delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \quad (2.14)$$

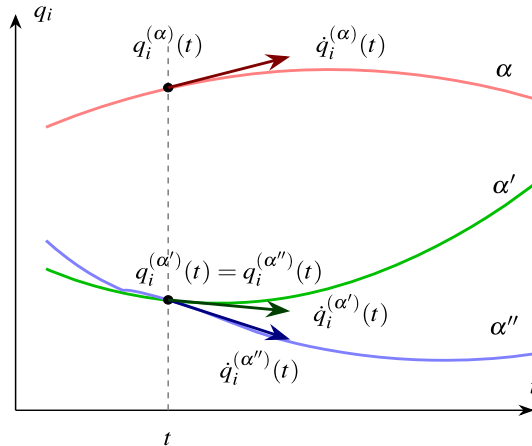
Pour appliquer le principe de moindre action nous devons calculer la variation de l'action, soit

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad (2.15)$$

Rappelons qu'on peut intervertir les variations en t (calcul différentiel) et en α (calcul variationnel). De plus, on pose que

$$\delta q_i(t_1) = 0 = \delta q_i(t_2)$$

parce que selon les paramètres de l'expérience, la particule est nécessairement en P_1 au temps t_1 et en P_2 au temps t_2 , donc toute variation de la trajectoire laisse les coordonnées généralisées q_i intactes aux temps t_1 et t_2 . En effet, ces deux points ne sont pas variés, toutes les trajectoires considérées devant les relier.

**Figure 2.5** ◀▶

Comparaison des trajectoires α et α' :
 $\delta q^{(\alpha)}(t)$ est le même.

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i)}{dt} \right] dt.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Intégrons par parties le deuxième terme du crochet []

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d(\delta q_i)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (2.17)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (2.18)$$

où le premier terme de droite est zéro puisque $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, les points $P_{1,2}$ étant fixes donc non variables. Remplaçant, nous avons, en mettant δq_i en évidence

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt = 0. \quad (2.19)$$

Pour aller plus loin nous devons faire l'hypothèse que les δq_i sont indépendants les uns des autres. En termes physiques, cette indépendance des δq_i signifie que les q_i sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune contrainte les reliant. Ils doivent donc correspondre à des degrés de liberté physique du système.

Posant donc que les q_i sont indépendants et comme ils sont quelconques, la seule façon de satisfaire cette équation est que chaque terme dans [] de (2.19) soit identiquement nul, c'est-à-dire

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.20)$$

généralement écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2.21)$$

Ce sont les fameuses équations d'*Euler-Lagrange*.

Remarque 2.2

i Rappel historique : Leonhard Euler

Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg (Empire russe), est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. .

Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

Euler est considéré comme l'un des plus grands et des plus prolifiques mathématiciens de tous les temps. **i**



Figure 5.2 ▲
Leonhard Euler (1707 - 1783).

Une fois solutionnées, les équations d'*Euler-Lagrange* définissent un ensemble d'expressions

$$q_i = q_i(t) \quad (2.22)$$

qui sont les équations définissant la trajectoire désirée que nous identifions à la trajectoire physique.

Nous avons débuté en parlant d'une particule mais clairement, cela n'a eu aucun impact dans le développement de cette équation. Elle demeure valable pour un système à un nombre arbitraire, n , de degrés de liberté pourvu qu'ils ne soient pas contraints. Nous obtiendrons alors n équations pour $i = 1, 2, \dots, n$. De plus, rien n'a été dit sur les coordonnées généralisées $\{q_i\}$ à l'exception du fait qu'elles doivent être indépendantes. Elles sont quelconques et mesurent des longueurs, des angles, des.... La forme de l'équation n'est pas affectée par le choix des $\{q_i\}$. Nous avons donc ici une recette qui fonctionne dès que nous savons construire le Lagrangien pour un système physique.

Remarque 2.3

i On remarque ici qu'étant donné que les q_i sont quelconques, ils n'ont pas nécessairement les mêmes dimensions. Là où dans l'équation de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.23)$$

toutes les composantes (de gauche et de droite) de cette équation vectorielle ont une dimension de $[MLT^{-2}]$, il n'en va pas de même des composantes de l'équation d'Euler-Lagrange^a. Elles n'auront dimension de forces que si q_i a les dimensions de longueur. L'approche lagrangienne fait automatiquement la cuisine des dimensions. Elle est dimensionnellement homogène. 

^a $[M]$ dimension de masse, $[L]$ dimension de longueur et $[T]$ dimension de temps.

2.3.1 Identité de Beltrami

Un cas particulier fréquent est celui où la fonction L est indépendante de t . L'équation d'Euler-Lagrange prend alors la forme suivante, appelée identité de Beltrami :

$$L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = C = \text{constante}$$

Pour arriver à démontrer ce résultat, considérons la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \frac{dq_i}{dt} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

En isolant $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ on trouve

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i = \frac{dL}{dt} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.24)$$

Par ailleurs, en multipliant l'équation d'Euler-Lagrange (2.21) par $\dot{q}_i$, on a

$$\dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

En substituant dans (2.24) dans la dernière équation,

$$\begin{aligned} \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{dL}{dt} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left(L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) - \frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned}$$

Alors si la fonction L est indépendante de t ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), l'identité se simplifie pour donner l'identité de Beltrami

$$\frac{d}{dt} \left(L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) = 0$$

ou

$$L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = C = \text{constante.}$$

où C est une constante d'intégration.

Deux exemples célèbres mettent à profit cet identité :

1. La courbe brachistochrone : On cherche à trouver la courbe reliant un point A à un point B , situé à une altitude plus faible, tel qu'un objet partant du point A sans vitesse initiale et glissant sans frottement sur la courbe rejoigne le plus rapidement possible le point B (voir problèmes à la fin du chapitre).
2. Le principe de Fermat : L'objectif est de déterminer un chemin optique plan, en se basant sur le principe qui stipule que : *La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit extrémale* (voir section 3.2.1).

2.4 La fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

Il est évident, toute la validité de la méthode repose sur le choix ou la définition de L . Il devrait être également évident, étant donné que les équations d'Euler-Lagrange prétendent résoudre le problème mécanique en ayant la trajectoire physique comme solution, que ces équations devraient correspondre aux équations de Newton. On peut de fait démontrer la forme de L à partir des équations de Newton. Nous en postulons la forme et vérifierons le bien fondé de notre hypothèse.

2.4.1 Forces conservatrices

On appelle une force conservatrice (sur une particule), une force $\mathbf{F}$ telle que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Une telle force $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ peut s'écrire alors

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

où $V(\mathbf{r})$ est appelé le potentiel ou l'énergie potentielle puisque mathématiquement le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire est toujours nul :

$$\nabla \times (\nabla f(\mathbf{r})) = 0$$

On vérifie facilement alors qu'on peut écrire

$$L = T - V \quad (2.26)$$

où T est l'énergie cinétique.

Vérifions maintenant que les équations d'Euler–Lagrange correspondent bien aux équations de Newton pour une particule soumise à une telle force. Utilisons ici les coordonnées cartésiennes que nous noterons $x_i = (x, y, z)$. Alors

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2, \quad V = V(x_j). \quad (2.27)$$

Donc

$$L = T - V = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 - V(x_j). \quad (2.28)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour le degré de liberté x_i (i fixé) demande que l'on calcule

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m\ddot{x}_i \quad (2.30)$$

L'équation d'Euler-Lagrange donne donc ici

$$m\ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (2.31)$$

ou

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i. \quad (2.32)$$

Il y a donc équivalence complète avec Newton.

Dans l'approche lagrangienne, on apprend à raisonner à partir de concepts d'énergie, potentielle et cinétique, au lieu de concepts de force. Les deux approches sont évidemment équivalentes physiquement, mais les énergies n'étant pas des quantités vectorielles, elles sont conceptuellement plus faciles à utiliser dans une vaste gamme de problèmes. En physique quantique par exemple, la notion de force n'a aucune signification mais les notions d'énergie demeurent valables. C'est une raison de plus pour se familiariser avec leur utilisation. De plus, la force au sens de Newton est une action

instantanée à distance. En relativité, une telle chose est impossible. La notion de force est donc une création purement classique et macroscopique et contrairement à notre intuition, son intérêt est limité.

Quelques exemples importants :

Il est important de noter que nous n'avons identifié que quatre types d'interactions (*forces*) fondamentales dans la nature : gravitationnelle, électromagnétique, faible et forte. Les deux dernières étant purement quantiques, seules les deux premières se manifestent en physique classique.

Lagrange nous propose de déduire les équations de mouvement à partir des énergies potentielles au lieu d'utiliser l'approche newtonienne qui implique l'introduction de forces

$$\mathbf{F} \rightarrow V(r)$$

tel que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

À l'échelle macroscopique, on a :

- 1. **Gravitation** : La force gravitationnelle varie en r^{-2} où r est la distance entre les masses M et m

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = \frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Alors selon Lagrange requiert $\mathbf{F}_{\text{grav}} \rightarrow V_{\text{grav}}(\mathbf{r})$ où

$$V_{\text{grav}}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r} \propto -\frac{1}{r}. \quad (2.34)$$

- **Interaction coulombienne** : La force électromagnétique (coulombienne) varie en r^{-2} où r est la distance entre les charges q_1 et q_2

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r.$$

Alors selon Lagrange requiert $\mathbf{F}_{\text{Coulomb}} \rightarrow V_{\text{Coulomb}}(\mathbf{r})$ où.

$$V_{\text{Coulomb}} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \propto -\frac{1}{r}. \quad (2.35)$$

- **Oscillateur harmonique** : La force **harmonique** (ex: le ressort parfait) s'écrit

$$\mathbf{F}_{\text{harm.}} = -k(x - x_0)$$

où $(x - x_0)$ est l'étirement p/r à la position d'équilibre et k est la constante de rappel du ressort. Alors selon Lagrange requiert

$\mathbf{F}_{\text{harm.}} \rightarrow V_{\text{harm.}}(\mathbf{r})$ où

$$V_{\text{harm.}} = \frac{k(x - x_0)^2}{2}. \quad (2.36)$$

Bien que n'étant pas une interaction fondamentale de la nature, elle joue fréquemment un rôle important dans les calculs. En effet dans des systèmes à géométrie un peu compliquée, l'énergie potentielle d'une particule peut prendre une allure assez quelconque comme sur la figure 2.7.

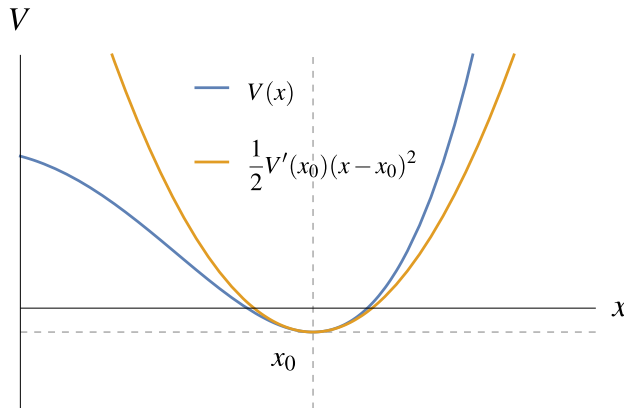


Figure 2.7 ◀▶

L'énergie potentielle quelconque d'une particule au voisinage de x_0 correspond à un extremum de $V(x)$. Le développement en série $V(x)$ près de x_0 mène à un potentiel harmonique.

Cependant au voisinage de x_0 correspondant à un extremum de $V(x)$, on peut faire le développement en série

$$V(x) \approx V(x_0) + (x - x_0)V'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}V''(x_0) + \dots \quad (2.37)$$

Le premier terme est une constante sans grand intérêt. Le second terme est nul puisque que le minimum de V se trouve en x_0 , c'est-à-dire $V'(x_0) = 0$. La première approximation non triviale est donc

$$V(x) \sim \frac{(x-x_0)^2}{2} \left[\frac{d^2V}{dx^2} \right]_{x_0} = \frac{k}{2} u^2 = V_{\text{harm.}}(u) \quad (2.38)$$

où

$$u = (x - x_0) \quad \text{et} \quad k = \left[\frac{d^2V}{dx^2} \right]_{x_0} : \text{un nombre.} \quad (2.39)$$

Ainsi pour bon nombre de matériaux, la première réponse à un (petit) déplacement hors d'équilibre est harmonique. Ceci est d'une grande importance pratique.

2.4.2 Forces non conservatrices

Mathématiquement, peu de fonctions $\mathbf{F}$ dérivent d'un gradient

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \neq -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (2.40)$$

Il en est ainsi par exemple des forces de frictions que l'on écrit souvent empiriquement comme

$$F_{\text{frict.}} = -k_{(n)} \dot{x}^n \quad (2.41)$$

où typiquement $n \approx 1$ pour les basses vitesses (écoulement laminaire) et $n \approx 2$ pour des vitesses plus élevées (écoulement turbulent).

La constante k dépend entre autres de la géométrie du problème et sa détermination est généralement empirique.

Pour tenir compte de tels effets, il faut alors définir une force généralisée, de composantes Q_i et notre équation d'Euler-Lagrange devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2.42)$$

En général, il faut être prudent dans la détermination de Q_i puisque les *composantes* ne sont pas nécessairement cartésiennes et que les équations n'ont même pas toutes les mêmes dimensions !

Il existe une exception notable et qui apparaît aujourd'hui comme extraordinairement importante. Nous en discuterons plus loin dans le cadre de l'invariance de jauge et nous verrons qu'elle correspond à l'interaction électromagnétique complète.

2.5 Coordonnées curvilignes

On écrit communément

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (2.43)$$

où il est entendu que

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.44)$$

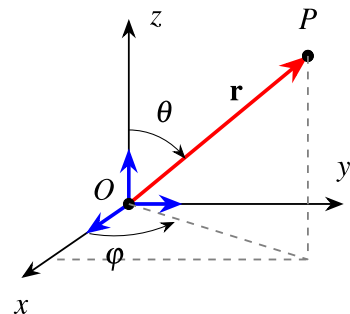


Figure 2.8 ▲

Coordonnées cartésiennes versus coordonnées sphériques.

Cette notation peut rapidement prêter à confusion. En effet, en coordonnées cartésiennes dans un repère inertiel, il n'y a pas de problème

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (2.45)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z \quad (2.46)$$

donc

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (2.47)$$

et

$$\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (2.48)$$

Cette simplicité vient du fait que x, y et z ont tous les trois des dimensions de longueur et que leurs axes sont fixes et orthogonaux. Qu'arrive-t-il lorsqu'on passe à d'autres coordonnées ? Prenons par exemple les coordonnées sphériques où

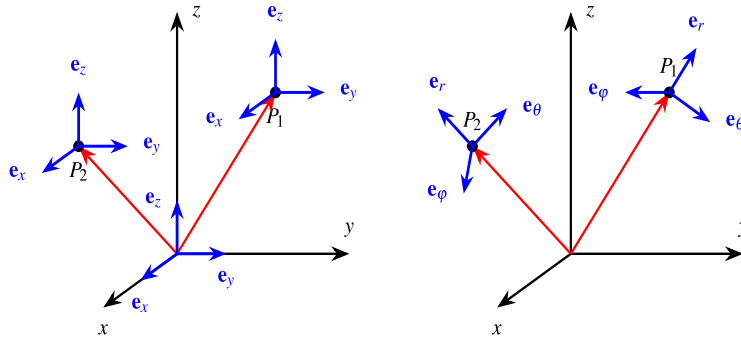
$$\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi) \quad (2.49)$$

où θ et φ sont des angles (voir figure 2.8). Doit-on sans ambiguïté définir

$$\dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) ? \quad (2.50)$$

Deux problèmes surgissent ici, dus aux faits que (voir figure 2.9) :

1. r, θ et φ n'ont pas les mêmes dimensions,
2. leurs axes sont orthogonaux mais ne sont pas fixes.

**Figure 2.9** ◀▶

Coordonnées cartésiennes versus coordonnées sphériques.

Les axes cartésiens (a) demeurent parallèles à eux-mêmes en différents points, ici P_1 et P_2 alors qu'en (b) on voit que les axes du système sphérique sont en tous points perpendiculaires l'un à l'autre mais (P_1) n'est pas parallèle à (P_2) , etc...

En effet, si nous écrivons le rayon vecteur

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (2.51)$$

nous obtenons

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z \quad (2.52)$$

parce que $\dot{\mathbf{e}}_x = \dot{\mathbf{e}}_y = \dot{\mathbf{e}}_z = 0$. On n'a cette simplicité qu'en coordonnées

cartésiennes. De fait, sachant que

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (2.53)$$

on calcule

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta.\end{aligned}\quad (2.54)$$

On sait que

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

et

$$\mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2. \quad (2.55)$$

on obtient

$$\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (2.56)$$

Les coordonnées étant r, θ et φ , clairement

$$T \neq \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2. \quad (2.57)$$

mais bien

$$T = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (2.58)$$

De façon générale, on écrira alors

$$T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad : \text{ coordonnées généralisées.} \quad (2.59)$$

Pour les coordonnées cartésiennes, on identifie, $q_i = (x, y, z)$ et

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

alors que pour les coordonnées sphériques, $q_i = (r, \theta, \varphi)$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Ici, dans les deux cas, g_{ij} est diagonal parce que les deux systèmes d'axes restent orthogonaux en tout point. Pour le cas sphérique, les g_{ij} ne sont pas des constantes, mais des fonctions de la position qui tiennent compte simultanément du fait que θ et φ n'ont pas des dimensions de longueur et du fait que les axes $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_\varphi$ varient en direction d'un point à l'autre de l'espace. g_{ij} s'appelle la métrique (tenseur métrique) et il apparaît généralement dans la définition de l'élément de longueur souvent noté

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.62)$$

En coordonnées cartésiennes

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (2.63)$$

alors qu'en coordonnées sphériques

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2 \quad (2.64)$$

et on écrit de façon générale

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j. \quad (2.65)$$

C'est là la définition formelle de la métrique, g_{ij} , qui a une dépendance sur les coordonnées (en général). Fondamentalement la métrique permet de définir la longueur dans un espace donné. On vérifie facilement ci-dessus que g_{ij} est identique au g_{ij} qui nous permet de définir sans ambiguïté l'énergie cinétique T par

$$T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (2.66)$$

Tout ceci est très important pour obtenir les équations du mouvement, spécialement lorsque les coordonnées utilisées ne sont pas les coordonnées cartésiennes. En effet, dans le cas des coordonnées cartésiennes, l'équation de Newton est $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ avec les composantes

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}_i) = F_i \quad (2.67)$$

là où $x_i = (x, y, z)$ pour $i = 1, 2, 3$. Du lagrangien

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - V(x_i), \quad (2.68)$$

les équations d'Euler-Lagrange nous donnent

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (2.69)$$

Identifiant $\mathbf{F} = -\nabla V$, les deux équations sont identiques et Euler-Lagrange concorde avec Newton.

En coordonnées sphériques, par contre, l'équation de Newton pour θ n'est pas

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\theta}) = F_\theta. \quad (2.70)$$

Sachant que le lagrangien sera

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r, \theta, \phi) \quad (2.71)$$

l'équation d'Euler-Lagrange nous donnera

- pour $q_i = r$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r, \theta, \phi) \right] \quad (2.72)$$

$$= m\dot{r} \quad (2.73)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad (2.74)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi) \right] \quad (2.75)$$

$$= m r \dot{\theta}^2 + m r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (2.76)$$

donc

$$m \ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 + m r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (2.77)$$

• Pour θ , avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi) \right] \\ &= m r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} \quad (2.80)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi) \right] \quad (2.81)$$

$$= m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (2.82)$$

donc

$$m r^2 \ddot{\theta} + 2 m r \dot{r} \dot{\theta} - m r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = - \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad (2.83)$$

ce qui n'était pas à priori évident. On sait retrouver ce résultat à partir de l'équation de Newton si on fait attention dans le calcul de $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$. Cependant la cuisine est relativement désagréable. La méthode lagrangienne nous donne « automatiquement » la bonne équation. On remarquera qu'en divisant par mr^2 , l'équation en θ est

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = -\frac{1}{mr^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (2.84)$$

- Finalement pour ϕ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left[\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r, \theta, \phi) \right] \quad (2.85)$$

$$= mr^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (2.86)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = mr^2 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2mr \dot{r} \dot{\phi} \sin^2 \theta + 2mr^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \quad (2.87)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - V(r, \theta, \phi) \right] \quad (2.88)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.89)$$

donc

$$mr^2 \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2mr \dot{r} \dot{\phi} \sin^2 \theta + 2mr^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (2.90)$$

Il est à noter que le côté gauche est de la forme

$$\ddot{q}_i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (2.91)$$

C'est ce qui s'appelle la dérivée covariante par rapport au temps D_t du vecteur vitesse de composante $\dot{q}_i$.

$$\begin{aligned} D_t \dot{q}_i &= \left(\delta_{ik} \frac{d}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \right) \dot{q}_k \\ &= \ddot{q}_i + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned}$$

Ici, si $q_i = (r, \theta, \varphi)$ pour $i = 1, 2, 3$, l'équation en θ correspond à $i = 2$ et au lieu de $\frac{d}{dt} \dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$, la bonne définition de la dérivée par rapport au temps, tenant compte des unités et du fait que les vecteurs unitaires varient d'un point à l'autre, sera

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r} \dot{r} + \Gamma_{12}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{13}^2 \dot{r} \dot{\varphi} + \Gamma_{21}^2 \dot{r} \dot{\theta} + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta} \dot{\theta} \\ &+ \Gamma_{23}^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + \Gamma_{31}^2 \dot{\varphi} \dot{r} + \Gamma_{32}^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} + \Gamma_{33}^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Donc nous avons des termes additionnels

Tenant compte du fait que $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ on identifie, pour les coor-

données sphériques

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^2 &= 0, \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\
 \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{23}^2 = 0, \\
 \Gamma_{22}^2 &= 0, \\
 \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2, \\
 \Gamma_{33}^2 &= \sin \theta \cos \theta,
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

À partir de L on peut identifier les Γ_{jk}^1 et les Γ_{jk}^3 de la même façon. Ce qui distingue les coordonnées cartésiennes, c'est que tous les $\Gamma_{jk}^i = 0$, c'est le seul système de coordonnées pour lequel c'est vrai (et uniquement parce que l'espace considéré ici est plat, c'est-à-dire sa courbure est nulle). Ces facteurs géométriques, Γ_{jk}^i , appelés symboles de Christoffel, jouent donc un rôle important. On peut les calculer par la formule

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_l \left[(g^{-1})_{il} \left[\frac{\partial g_{lj}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} \right] \right] \tag{2.93}$$

où g^{-1} est la matrice inverse de g . On voit qu'ils sont entièrement déterminés par la métrique, g . Cette cuisine compliquée, la méthode lagrangienne la fait automatiquement. Ce n'est pas le moindre de

son intérêt !¹

2.6 Contraintes holonomes et non-holonomes

Il peut exister plusieurs types de contraintes, par exemple $x = a$ signifie que le mouvement est gelé en x et qu'il est contraint de ne se faire que dans le plan yz passant par $x = a$. Il ne reste que deux degrés de liberté, y et z . On peut également avoir une contrainte du type

$$\dot{y} = a, \quad (2.94)$$

c'est-à-dire la vitesse selon y est contrainte d'avoir la valeur a . Cette équation s'intègre trivialement pour donner

$$y = at + b. \quad (2.95)$$

Soit le lagrangien (avant de tenir compte des contraintes)

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (2.96)$$

Si la contrainte est $x = a$ donc $\dot{x} = 0$, on devra écrire

$$L = \frac{m}{2} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(a, y, z) \quad (2.97)$$

¹Vector Analysis, M. Spiegel, Schaum.

et nous n'aurons que deux équations d'Euler-Lagrange, une pour y et une pour z .

Si la contrainte est $\dot{y} = a$ donc $y = at + b$, on devra écrire

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + a^2 + \dot{z}^2) - V(x, at + b, z) \quad (2.98)$$

et nous n'aurons que deux équations d'Euler-Lagrange, ici une pour x et une pour z . Notons que ces solutions seront paramétrées par b s'il reste inconnu.

De façon générale une contrainte s'écrit sous la forme

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} . \quad (2.99)$$

Les cas d'inégalité correspondent à des contraintes *non holonomes*. En fait, on définit comme contraintes *holonomes*, les contraintes qui s'écrivent

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$$

ou plus généralement

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt} h(q_i, t) = 0 \quad \text{soit} \quad h(q_i, t) = C \quad (2.100)$$

où $h(q_i, t)$ est une fonction quelconque des coordonnées (et du temps). On appelle *non holonomes* celles qui n'obéissent pas à une telle relation, soit que

1. $f(q_i, \dot{q}_i, t) \neq \frac{d}{dt} h(q_i, t)$
2. ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) < 0$ ou $f(q_i, \dot{q}_i, t) > 0$.

Par ailleurs, si l'équation de la contrainte holonome dépend du temps, elle est dite rhéonome. Si elle n'en dépend pas, elle est dite scléronome.

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} \neq 0 \quad \text{contrainte rhéonome}$$

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{contrainte scléronome}$$

Nous parlons de trajectoires, c'est-à-dire de l'existence de fonctions

$$q_i = q_i(t) \longrightarrow \dot{q}_i = \dot{q}_i(t). \quad (2.101)$$

Par conséquent, pour une contrainte holonome

$$f(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{d}{dt} h(q_i, t) = \sum_i \frac{\partial h}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (2.102)$$

De telles trajectoires satisfont

$$h(q_i, t) = C \quad : \text{une constante.} \quad (2.103)$$

Dans les deux exemples vus précédemment les contraintes sont holonomes.

Nous avons d'abord étudié $x = a$. Cette contrainte est triviale puisque nous avons déjà la solution $x(t) = a$ et il s'agit de la constante du mouvement que h doit représenter. Ainsi, nous aurons simplement $h = x = a$ où $C = a$ et

$$f = \frac{dh}{dt} = \dot{x} = 0. \quad (2.104)$$

On pourrait être tenter d'imposer la contrainte $x = a$ en définissant

$$f = x - a = 0$$

mais ceci mène à la forme

$$h = \int (x(t) - a) dt = \left(\int x(t) dt \right) - a = C.$$

Ainsi formulée, la contrainte signifie que la position moyenne en x de la particule est une constante, ce qui est tout à fait correct mais dénué d'intérêt. En fait, l'information pertinente provient plutôt de la relation avec f qui correspond ici à la définition d'une constante du mouvement.

Par contre, le deuxième cas étudié correspond à

$$\dot{y} = a \quad (2.105)$$

et nous écrivons

$$f = \dot{y} - a = 0 \quad (2.106)$$

ce qui mène à

$$h = y - at = C. \quad (2.107)$$

De façon générale, une contrainte holonome est intégrable au sens où on peut (même si c'est compliqué) l'écrire sous une forme permettant une substitution exacte dans le lagrangien, faisant ainsi disparaître les degrés de liberté contraints. Physiquement on peut visualiser la contrainte comme étant due à une force extérieure telle que son effet impose au mouvement d'être contraint. Selon ce point de vue : Si cette force est indépendante des (c'est-à-dire la même pour) trajectoires possibles, alors la contrainte est holonome. Si cette force dépend de la trajectoire (varie d'une trajectoire à l'autre) alors la contrainte est non-holonome.

2.6.1 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Si un lagrangien L dépend de degrés de liberté contraints, les équations d'Euler-Lagrange qu'on peut en déduire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.108)$$

ne sont pas valides. Elles ne peuvent donc pas représenter nos équations de mouvement. Ce lagrangien est inutile. Or, lorsque les contraintes sont non-holonomes nous sommes en général incapable d'extraire exactement les degrés de liberté contraints du lagrangien.

Même pour certaines contraintes holonomes, l'exercice peut être difficile. Il existe une méthode, dite des multiplicateurs de Lagrange, qui peut alors être utile. Nous la présentons sans démonstration.

Soit un lagrangien, $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ décrivant un système mécanique dont les trajectoires doivent obéir à une contrainte qu'on sait exprimer comme

$$f(q_j, \dot{q}_j, t) = 0. \quad (2.109)$$

On construit alors un lagrangien auxiliaire, L'

$$L' = L + \lambda f(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.110)$$

pour lequel on suppose que la contrainte est (temporairement) levée. Ceci étant, les n degrés de liberté peuvent être considérés comme indépendants et les n équations de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.111)$$

sont valides. En principe, on peut résoudre pour obtenir les équations de la trajectoire

$$q_i^{(\text{ph})} = q_i(t, \lambda) \quad (2.112)$$

qui seront paramétrées par λ puisque L' en dépend. On peut en calculer les

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt}q_i = \dot{q}_i(t, \lambda). \quad (2.113)$$

On remplace alors dans l'équation de contrainte

$$f(q_i(t, \lambda), \dot{q}_i(t, \lambda), t) = 0 \quad (2.114)$$

qui permet de calculer la valeur de λ

$$\lambda = \bar{\lambda} \quad (2.115)$$

permettant à la contrainte d'être satisfaite. On remplace alors cette valeur de $\lambda = \bar{\lambda}$ dans les équations de la trajectoire pour obtenir les équations de la trajectoire contrainte

$$q_i = q_i(t, \bar{\lambda}) \quad ; i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.116)$$

Pour simple qu'elle soit en apparence, cette méthode n'est pas triviale d'application. En effet, on doit prévoir de

$$f(q_i(t, \lambda), \dot{q}_i(t, \lambda), t) = 0 \quad (2.117)$$

que la solution dépende de t , c'est-à-dire $\lambda = \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(t)$ dépendra généralement de t . Or, si l'équation de contrainte dépend des $\dot{q}_j$ alors

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.118)$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \lambda \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) + \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.119)$$

et nous voyons apparaître non plus seulement λ mais aussi $\dot{\lambda}$ inconnu. C'est d'ailleurs toujours le cas pour les contraintes non-holonomes.

Nous ne pousserons pas plus loin la présentation de cette méthode qui nous mènerait à des divergences considérables. Pour ceux qui sont intéressés on peut consulter les livres de Goldstein ou de Saletan et Cramer par exemple.

2.7 Lois de conservation et constantes du mouvement

Dans certains cas, il est possible de simplifier la résolution des équations d'Euler-Lagrange.

2.7.1 Variables cycliques

Il existe bien des situations où le lagrangien dépend d'une certaine variable $\dot{q}$ mais ne dépend pas de q . On appelle q une variable cyclique et de l'équation d'Euler-Lagrange pour q

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.120)$$

on tire, du fait de l'indépendance de L en q , que

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.121)$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.122)$$

d'où nous concluons que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{constante.} \quad (2.123)$$

Cette quantité est appelée constante du mouvement. On la nomme aussi intégrale première.

Pour un système à n degrés de liberté $\{q_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ nous aurons n équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.124)$$

En mécanique, ces équations sont des équations différentielles du 2^{ième} ordre, c'est-à-dire chaque équation est du type

$$f_i(\ddot{q}_j, \dot{q}_j, q_j, t) = 0. \quad (2.125)$$

Pour fixer de façon unique la solution d'une équation du 2^{ième} ordre nous avons besoin de deux conditions, qu'elles soient initiales,

finales, limites... Techniquement cela signifie que l'intégration de chacune de ces équations requiert deux constantes d'intégration. Comme il y a n équations cela fait $2n$ constantes (les n C_j et les n C'_j avec $j = 1, 2, \dots, n$) qui seront indépendantes puisque fixées arbitrairement dans le laboratoire.

$$q_i = q_i(t, C_j, C'_j) ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.126)$$

Ajoutant

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t, C_j, C'_j) ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.127)$$

nous avons $2n$ équations qui dépendent des $2n$ constantes. Un tel système peut en principe s'inverser pour obtenir

$$\left. \begin{array}{l} C_i = C_i(t, q_j, \dot{q}_j) \\ C'_i = C'_i(t, q_j, \dot{q}_j) \end{array} \right\} = 2n \text{ constantes}, \quad (2.128)$$

Physiquement, ce sont les données d'un problème qui fixent ces constantes. Le but de l'exercice est d'arriver à exprimer les q_i en fonction de ces constantes et du temps.

Exemple 2.1

◆ Prenons l'exemple simple de l'oscillateur harmonique à une dimension

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \quad (2.129)$$

Ici, $n = 1$, nous n'aurons qu'une seule équation donc deux constantes d'intégration. L'équation d'Euler-Lagrange est

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (2.130)$$

dont la solution peut s'écrire de plusieurs façons

Solution	Constantes d'intégration
$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$	A, δ
$x(t) = B \cos(\omega t + \Delta)$	B, Δ (ici, $B = A$)
$x(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$	C, D

Ici A, B, C et D sont des amplitudes et δ et Δ des phases. Ces trois solutions sont absolument équivalentes. Pour les fins d'illustration prenons la dernière forme

$$x(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (2.131)$$

$$\dot{x}(t) = \omega C \cos \omega t - \omega D \sin \omega t. \quad (2.132)$$

Ces deux équations s'inversent assez facilement en

$$C = x(t) \sin \omega t + \frac{\dot{x}(t)}{\omega} \cos \omega t \quad (2.133)$$

$$D = x(t) \cos \omega t - \frac{\dot{x}(t)}{\omega} \sin \omega t. \quad (2.134)$$



1. Conditions initiales

Supposons qu'à un temps initial $t = t_0$, la position et la vitesse sont connues (ou mesurées)

$$x(t_0) = x_0$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

où x_0 et $\dot{x}_0$ sont des constantes. On identifie facilement C et D

$$C = x_0 \sin \omega t_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t_0 \quad (2.135)$$

$$D = x_0 \cos \omega t_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t_0 \quad (2.136)$$

et la solution prend la forme

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[x_0 \sin \omega t_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos \omega t_0 \right] \sin \omega t \\ & + \left[x_0 \cos \omega t_0 - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t_0 \right] \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.137)$$

2. Conditions limites

Supposons qu'on sache qu'à un temps $t = t_0$, la position est

$x(t_0) = x_0$ et qu'à un autre temps $t = t_1$, la position est $x(t_1) = x_1$ où x_0 et x_1 sont connues (mesurées) :

$$\text{à } t = t_0 : \quad x_0 = C \sin \omega t_0 + D \cos \omega t_0 \quad (2.138)$$

$$\text{à } t = t_1 : \quad x_1 = C \sin \omega t_1 + D \cos \omega t_1 \quad (2.139)$$

On peut inverser ces deux équations pour obtenir

$$C = \frac{x_0 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \quad (2.140)$$

$$D = \frac{x_0 \sin \omega t_1 - x_1 \sin \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \quad (2.141)$$

et la solution s'écrit

$$x(t) = \left[\frac{x_0 \cos \omega t_1 - x_1 \cos \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \right] \sin \omega t \quad (2.142)$$

$$+ \left[\frac{x_0 \sin \omega t_1 - x_1 \sin \omega t_0}{\sin \omega(t_0 - t_1)} \right] \cos \omega t. \quad (2.143)$$

3. Conditions mixtes

Mais en général, toutes sortes de quantités peuvent être déterminées (expérimentalement) pour fixer la solution : position, vitesse, angle, énergie, moment cinétique (plus d'une dimension), etc...

Clairement si le lagrangien L ne dépend pas explicitement de q_i , on peut en déduire que le système mécanique lui-même ne dépend pas de cette variable. Donc L n'est pas affecté par une variation de q_i , et suggère qu'on peut identifier une symétrie par rapport à une telle variation et en dégager un invariant.

Par exemple, si $q_i = x$ est une mesure de longueur, l'impulsion associée sera $p_i = m\dot{x}$ est l'impulsion associée. Une invariance de L par rapport à une translation selon x implique que le système physique ne dépend pas de la position en x , Puisque c'est le cas, le potentiel doit être constant et la force selon x nulle. Donc il y aura conservation de la quantité de mouvement $p_i = m\dot{x}$.

De la même façon, si $q_i = \theta$ est un angle, le moment correspondant est le moment cinétique $p_i = I\dot{\theta}$. L'invariance de L par rapport à une rotation d'angle θ implique alors L'invariance de L p/r une rotation d'angle θ implique qu'aucun moment de force n'est exercé sur le système. Donc il y aura conservation d'une composante du moment cinétique.

2.7.2 Lagrangien indépendant du temps

Nous avons vu qu'en général le lagrangien est une fonction qui peut dépendre explicitement du temps

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

et la forme des équations d'Euler-Lagrange implique directement des dérivées par rapport au temps. Qu'advient-il alors si un lagrangien donné ne possède aucune dépendance explicite par rapport au temps $L = L(q_i, \dot{q}_i)$?

Considérons l'énergie cinétique

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2$$

où $\mathbf{v}_{\alpha} = \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$ et $\mathbf{r}_{\alpha}$ sont les composantes de positions spatiales. En fonction de coordonnées généralisées q_i , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\alpha}^2 &= \frac{d\mathbf{r}_{\alpha}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\alpha}}{dt} \\ &= \left(\sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

Ici, on fait cette distinction entre composantes de positions spatiales $\mathbf{r}_{\alpha}$ et coordonnées généralisées q_i , parce qu'en général, les coordonnées généralisées q_i peuvent être choisies d'être différentes des composantes de positions spatiales $\mathbf{r}_{\alpha}$.

Si

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} = 0$$

on parle alors de *contraintes scléronomes*. Alors l'énergie cinétique est uniquement une fonction quadratique de $\dot{q}_i$, c'est-à-dire

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.144)$$

où $m_{ij}(q)$ est une matrice réelle et symétrique

$$\begin{aligned} m_{ij}(q) &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_1} & \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_1} & & & \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque 2.4

i On note ici que l'énergie cinétique T est alors une fonction homogène du second degré en $\dot{q}_i$, c'est -à-dire que

$$T(q, \lambda \dot{q}) = \lambda^2 T(q, \dot{q})$$



La dérivée totale du lagrangien par rapport au temps est alors donnée par

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right)$$

En utilisant les équations d'Euler-Lagrange.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{dL}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \end{aligned}$$

Remarque 2.5

i Rappelons que nous avons déjà obtenu ce résultat : lorsque la fonction L est indépendante de t , l'équation d'Euler-Lagrange

mène à l'identité de Beltrami :

$$L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = C = \text{constante}$$



On trouve que la dérivée totale de la quantité $H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$ est nulle

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0$$

et H correspond donc bien à une quantité invariante ou conservée, appelée intégrale de Jacobi,

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

ou ici on définit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Définition 2.1

Moment canonique

On définit le **moment canonique** à partir du lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$

comme

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$



Définition 2.2

i Intégrale de Jacobi/Hamiltonien :

H correspond donc bien à une quantité invariante ou conservée, appelée **intégrale de Jacobi**,

$$\begin{aligned} H &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L \end{aligned}$$

ou $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.



Mais que représente H ?

1. Si le potentiel ne dépend que de la position $V = V(q)$, on a

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_{ij}(q) \dot{q}_j$$

D'où

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_j \dot{q}_i - T + V \\ &= 2T - T + V = T + V = E \end{aligned} \quad (2.145)$$

est l'énergie mécanique totale du système. On a donc conservation de l'énergie d'un système mécanique si celui-ci est invariant par translation dans le temps (système autonome ou fermé : contraintes et potentiel ne dépendant pas explicitement du temps). Il faut noter qu'ici V ne contient que le travail des forces externes ou appliquées (absence des forces de contrainte).

2. Par ailleurs, si $V = V(q, \dot{q})$, on a

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \\ &= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + V \\ &= 2T - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + V \\ &= T + V - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \end{aligned}$$

C'est le cas de la force de Lorentz où, par exemple, on obtient

ainsi

$$H = T + qU = E$$

et H correspond à la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie électrique.

3. Dans d'autres cas, H est conservé, mais cette quantité ne correspond pas nécessairement à l'énergie

$$H \neq T + V.$$

Autres cas particuliers :

1. Si les contraintes sont scléronomes ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) mais V dépend explicitement du temps (par exemple : particules placées dans un champ extérieur variable), alors

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \\ \frac{dH}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Encore une fois, $H = E$ et l'énergie varie comme

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.146)$$

Un tel cas correspond à un système ouvert, recevant ou perdant de l'énergie par l'intermédiaire du champ imposé.

2. Si le lagrangien $L(q, Q, \dot{q}, \dot{Q}, t)$ d'un système permet la séparation de la dépendance temporelle suivante $L = L_1(q, \dot{q}) + L_2(Q, \dot{Q}, t)$, alors

$$H_1 = \dot{q} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} - L_1$$

est une intégrale première.

3. Un système mécanique fermé n'est possible que pour V ne dépendant pas explicitement du temps. Si le système possède n degrés de liberté, alors il y a au plus $2n - 1$ intégrales premières indépendantes : elles correspondent aux $2n$ conditions initiales moins une, servant à fixer le choix de l'origine des temps :

$$q_i(t) = q_i(C_1, \dots, C_{2n}, t) = q_i(C_1, \dots, C_{2n-1}, t + t_0)$$

4. Toutes les quantités conservées qui sont liées aux propriétés de l'espace-temps sont additives (énergie E , impulsion $\mathbf{p}$ et moment cinétique $\mathbf{L}$). Cela est dû au fait que leur définition

ne dépend pas de l'existence ou non d'une interaction entre les particules.

2.7.3 Théorème de Noether

Le théorème de Noether établit une relation d'équivalence entre les lois de conservation et les symétries d'un système. Par symétrie, on entend invariance des lois physiques par rapport à certaines transformations. Il fut énoncé en 1918 par la mathématicienne Emmy Noether à Göttingen et fut qualifié par Albert Einstein de « monument de la pensée mathématique ». Il est devenu un outil courant en physique théorique, où on tente, autant que faire se peut, de décrire les phénomènes en termes de symétrie d'espace, de charges, de temps et autres.

Remarque 2.6

i Rappel historique : Amalie Emmy Noether

Amalie Emmy Noether (23 mars 1882 - 14 avril 1935) est une mathématicienne allemande spécialiste d'algèbre abstraite et de physique théorique. Elle a révolutionné les théories des anneaux, des corps et des algèbres. En physique, le théorème de Noether explique le lien fondamental entre la symétrie et les lois de conservation.



Figure 5.2 ▲
Amalie Emmy Noether (1882 - 1935).

Théorème 2.1**Théorème de Noether :**

À toute transformation infinitésimale qui laisse invariante l'action correspond une quantité qui est conservée.

Pour démontrer ce théorème, nous introduisons une famille de trajectoires représentée par des coordonnées généralisées $\tilde{q}_i(u)$ qui dépendent de façon continue d'un paramètre u . La trajectoire qui nous intéresse $q_i(t)$ coïncide avec $\tilde{q}_i(t, u)$ à disons, $u = 0$, c'est-à-dire

$$\tilde{q}_i(t, u = 0) = q_i(t).$$

Si le lagrangien L est indépendant de u , c'est-à-dire si $L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L(q, \dot{q}, t)$, alors la quantité

$$O(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{du} \Big|_{u=0} \quad (2.147)$$

est une constante du mouvement (ou intégrale première).

On démontre cette relation comme suit : L étant indépendant de u ,

$$\frac{dL}{du} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{du} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{du} = 0.$$

Cependant

$$\frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{du} = \frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_i}{du}$$

et suivant l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}.$$

Alors substituant, on a

$$\begin{aligned} \frac{dL}{du} &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) \frac{d\tilde{q}_i}{du} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_i}{du} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{du} \right) = 0. \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèse est donc une constante du mouvement.

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{du} = C.$$

En posant $u = 0$, $\tilde{q}_i(t, u) \rightarrow q_i(t)$, $\dot{\tilde{q}}_i(t, u) \rightarrow \dot{q}_i(t)$ et on trouve

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{du} \Rightarrow \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{du} \Big|_{u=0} = C$$

ce qui prouve le théorème.

La quantité $O(q_k, \dot{q}_k)$ est alors une constante du mouvement (ou intégrale première).

Exemple 2.2**◆ Invariance par rapport à une translation**

Supposons qu'un système soit invariant p/r à une translation dans une direction x . La translation correspond au changement de coordonnée $\tilde{q}_i(u) = q_i + u$, pour i tel que q_i soit associé à la coordonnée x de chaque particule du système et $\tilde{q}_k(u) = q_k$ pour les autres. Alors, d'après le théorème de Noether,

$$O = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{du} \Big|_{u=0} = C$$

mais ici

$$\frac{d\tilde{q}_k}{du} \Big|_{u=0} = 1$$

$$O = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\alpha p_{\alpha,x} = P_x \quad (2.148)$$

est un invariant : c'est la somme des composantes x des impulsions généralisées. Alors P_x est un invariant (quantité conservée) c'est-à-dire une constante du mouvement. ◆

Exemple 2.3**◆ Invariance par rapport à une translation en 3D**

Soit un système invariant p/r à une translation dans chacune des trois directions. En répétant l'exercice plus haut on voit que P_x , P_y et P_z sont des invariants, c'est-à-dire l'impulsion totale

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \quad (2.149)$$

est une constante du mouvement. À noter que ceci est valable pour les quantités de mouvement comme pour les moments cinétiques d'un système. 

Exemple 2.4

Invariance par rapport à une rotation

De façon similaire, s'il y a invariance p/r à une rotation ϕ autour d'un axe Oz , la composante selon z du moment cinétique total du système est alors conservée.

$$O = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \sum_{\alpha} L_{\alpha,z} = L_z$$



Exemple 2.5

Invariance par rapport à une rotation dans toutes les directions

S'il y a invariance p/r à une rotation dans toutes les directions, le système possède une symétrie sphérique et chacune des composantes du moment cinétique L_x, L_y, L_z ainsi que le moment cinétique total

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \quad (2.150)$$

sont conservés.



2.8 Invariance de jauge

On appelle transformation de jauge une transformation de L en L' telle que

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} F(q_i, t) \quad (2.151)$$

où F est une fonction des q_i et de t (appelée génératrice de la transformation) et

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.152)$$

Remplaçant L par L' dans la définition de l'action, S devient S'

$$\begin{aligned}
 S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q_i, \dot{q}_i, t) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q_i, t) dt \\
 &= S + F(2) - F(1)
 \end{aligned} \tag{2.153}$$

où $F(1) = F(q_i(t_1), t_1)$ donc $\delta F(2) = \delta F(1) = 0$ puisque $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

Ainsi

$$\delta S' = \delta S. \tag{2.154}$$

Or, comme la physique est déterminée par l'extrémisation de S , ou de S' , rien n'est changé ici. Comme $\delta S' = \delta S$, on décrit la même physique, les trajectoires seront les mêmes.

On constate cependant que le passage de L à L' change la forme du lagrangien. En effet, supposons que

$$L = T - V(q_i, t). \tag{2.155}$$

Alors une transformation de jauge générée par $F(q_i, t)$ nous donne

$$L' = T - V(q_i, t) + \sum_i \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t}. \tag{2.156}$$

Puisque F est une fonction de q_i et de t , appelons

$$V'(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t}. \quad (2.157)$$

Ainsi

$$L' = T - V'(q_i, t) + \sum_i \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (2.158)$$

Le dernier terme est linéaire en $\dot{q}_i$ et fait que la forme de L n'est pas inchangée.

Opérons une deuxième transformation de jauge, générée par la fonction $G(q_i, t)$. Nous obtenons de L' un nouveau lagrangien, L''

$$L''(q_i, \dot{q}_i, t) = L'(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} G(q_i, t) \quad (2.159)$$

$$= L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} (F(q_i, t) + G(q_i, t)) \quad (2.160)$$

c'est-à-dire

$$L'' = T - V''(q_i, t) + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} (F + G) \quad (2.161)$$

où

$$V''(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial}{\partial t} [F(q_i, t) + G(q_i, t)]. \quad (2.162)$$

On voit donc que L' est invariant de forme sous une transformation de jauge qui laisse la physique inchangée. Aujourd'hui, on a admis le principe théorique qu'il s'agit de la forme la plus générale que peut prendre un lagrangien, c'est-à-dire que les seules interactions possibles sont des interactions de jauge. C'est cette philosophie qui a permis l'unification de trois des quatre interactions fondamentales en théorie du champ.

Le terme en $\dot{q}_i$, c'est-à-dire $\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i$, est la forme $\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla F$, c'est-à-dire le produit scalaire entre le vecteur $\dot{\mathbf{q}}$ et un champ vectoriel (local) que la transformation de jauge nous donne comme étant le gradient de F , ∇F .

Supposons maintenant que notre lagrangien L s'écrive initialement

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i, t) + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(q_i, t) \quad (2.163)$$

où $\mathbf{A}(q_i, t)$ est un vecteur quelconque, et non un gradient. Alors une transformation de jauge

$$L \xrightarrow{\mathbf{F}} L'$$

donne

$$L' = L - V'(q_i, t) + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}'(q_i, t) \quad (2.164)$$

où

$$V'(q_i, t) = V(q_i, t) - \frac{\partial F(q_i, t)}{\partial t} \quad (2.165)$$

$$\mathbf{A}'(q_i, t) = \mathbf{A}(q_i, t) + \nabla F(q_i, t). \quad (2.166)$$

La forme du lagrangien est clairement restée la même et nous savons que la physique (la trajectoire) n'est pas affectée par la transformation de jauge. En physique moderne, on adopte aujourd'hui une approche basée sur l'axiome suivant : la nature est telle qu'observée, invariante de jauge (interaction électromagnétique). Nous devons donc développer un formalisme physique qui respecte cet aspect de la nature et qui soit invariant de jauge. En mécanique classique, cela signifie que le lagrangien le plus général que l'on peut écrire à priori devra être invariant de forme sous une transformation de jauge, c'est-à-dire devra être de la forme

$$L = T - V(q_i, t) + \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(q_i, t) \quad (2.167)$$

où V et $\mathbf{A}$ sont des champs locaux, scalaire et vectoriel respectivement. La conclusion qui s'impose est que les seules interactions permises par la nature sont celles décrites par ce lagrangien. Il nous reste donc à vérifier quel type d'interaction existe dans la nature, au niveau classique, sur la base de cet axiome d'invariance de jauge.

Typiquement donc une interaction invariante de jauge dépendra des vitesses puisque L contient le terme $\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(q_i, t)$, donc la force dépendra des vitesses. Clairement cette force n'est pas conservatrice au sens vu dans le chapitre précédent, néanmoins de telles forces trouvent leur place dans le formalisme lagrangien. Examinons le type de forces qui émergent de

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{m}{2} \sum_j \dot{x}_j^2 - V(\mathbf{x}, t) + \sum_j \dot{x}_j A_j(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.168)$$

qui restera invariant de forme lors d'une transformation de jauge même dans le cas général où

$$\mathbf{A} \neq \nabla F. \quad (2.169)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour la composante x_i demande que l'on calcule

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_i} A_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.170)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + A_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.171)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m\ddot{x}_i + \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} A_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.172)$$

puisque, sur une trajectoire $x_i = x_i(t)$

$$\frac{d}{dt}f(x_i, t) = \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.173)$$

Au total nous avons donc

$$m\ddot{x}_i + \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} - \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = 0 \quad (2.174)$$

donc

$$m\ddot{x}_i = - \left(\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) + \sum_j \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.175)$$

C'est la composante x_i de l'équation vectorielle

$$m\ddot{\mathbf{x}} = - \left(\nabla V(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) + \dot{\mathbf{x}} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (2.176)$$

On sait qu'en électromagnétisme les champs électrique et magnétique peuvent être obtenus des potentiels scalaire et vecteur $V_{\text{élect}}$ et $\mathbf{A}_{\text{élect}}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla V_{\text{élect}}(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{élect}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.177)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{élect}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.178)$$

On sait également qu'une particule de charge e placée dans des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ est soumise à la force de Lorentz

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}). \quad (2.179)$$

$$= e\left(-\nabla V_{\text{élect}} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{élect}}}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \times \nabla \times \mathbf{A}_{\text{élect}}\right) \quad (2.180)$$

$$= -\nabla(eV_{\text{élect}}) - \frac{\partial(e\mathbf{A}_{\text{élect}})}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \times \nabla \times (e\mathbf{A}_{\text{élect}}). \quad (2.181)$$

On peut donc aisément identifier V et $\mathbf{A}$ dans (2.176) avec $eV_{\text{élect}}$ et $e\mathbf{A}_{\text{élect}}$ respectivement et conclure que l'invariance de jauge du lagrangien qui nous a permis de poser la forme la plus générale possible pour L nous mène directement à l'interaction électromagnétique. C'est un résultat remarquable.

L'électromagnétisme possède également son invariance de jauge, c'est-à-dire que les champs physiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont invariants si on change simultanément

$$V_{\text{élect}} \rightarrow V_{\text{élect}} - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.182)$$

$$\mathbf{A}_{\text{élect}} \rightarrow \mathbf{A}_{\text{élect}} + \nabla F. \quad (2.183)$$

Cette invariance de jauge électromagnétique est identique à l'invariance de jauge lagrangienne.

Plus haut, nous avons identifié la partie de l'interaction de jauge qui dépend des vitesses comme étant de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \quad (2.184)$$

par analogie avec le terme

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla F. \quad (2.185)$$

Si $\mathbf{A} = \nabla F$ c'est-à-dire si $\mathbf{A}$ est le gradient d'une fonction scalaire alors le lagrangien

$$T - V(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \equiv T - V(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla F \quad (2.186)$$

décrit, par invariance de jauge, la même physique que le lagrangien L qui apparaît au début et par conséquent il n'y a pas ici d'interaction nouvelle. Il n'y aura interaction nouvelle que si

$$\mathbf{A} \neq \nabla F, \quad (2.187)$$

c'est-à-dire il n'y aura interaction nouvelle ou de jauge que si $\mathbf{A}$ n'est pas le gradient d'une fonction scalaire. De fait physiquement, en électromagnétisme, un potentiel vecteur qui n'est que le gradient d'une fonction scalaire ne génère pas de champs. Il est évident que le cas particulier $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ est possible. Il permet de couvrir les interactions à potentiel habituel c'est-à-dire $V(q_i, t)$, ce qui permet les interactions électriques et gravitationnelles par exemple.

2.9 Quelques caractéristiques, propriétés, limites...

1. On ne saurait trop insister sur l'indépendance des coordonnées généralisées, les q_i , qui décrivent les degrés de liberté

physiquement indépendants. Si cette condition n'est pas satisfaite en écrivant le lagrangien, celui-ci n'est pas valide et les équations d'Euler-Lagrange qui en découlent non plus. Les trajectoires, solutions de ces équations n'ont rien de physique.

2. En mécanique classique non relativiste, pour chaque vrai degré de liberté du système, q_i , le lagrangien contient un terme en $\dot{q}_i^2$. Le lagrangien peut également dépendre linéairement de $\dot{q}_i$ et sa dépendance en q_i est quelconque. La dépendance en $\dot{q}_i^2$ est nécessaire pour garantir que l'équation d'Euler-Lagrange sera en $\ddot{q}_i$. Depuis Newton, on sait que la connaissance des deuxièmes taux de variation ($\ddot{q}_i$) des q_i est nécessaire et suffisante pour déterminer l'historique du système. La dépendance en $\dot{q}_i$ apparaît avec les potentiels de jauge (potentiel vecteur) discutés à la section précédente. La dépendance en q_i est quelconque. Elle dépend du système de coordonnées et des interactions.
3. Coordonnée cyclique : Une coordonnée q_j (j fixé) est cyclique si elle n'apparaît pas dans le lagrangien alors même que ce dernier dépend de $\dot{q}_i$. De l'équation d'Euler-Lagrange pour ce degré de liberté

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.188)$$

il ne reste alors que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{puisque} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0. \quad (2.189)$$

Formellement la solution est

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \pi_i = \text{constante} \quad (2.190)$$

une telle équation est généralement plus simple à résoudre que l'équation d'Euler-Lagrange complète.

4. Le lagrangien $L = T - V$ est structuré comme les énergies cinétique, T , et potentielle V . Il en partage plusieurs propriétés, en particulier l'additivité. Si L_1 et L_2 sont des lagrangiens de deux systèmes physiques indépendants, alors le lagrangien du système physique constitué de l'union des deux précédents systèmes est

$$L = L_1 + L_2. \quad (2.191)$$

Si les deux systèmes interagissent alors le lagrangien total sera

$$L = L_1 + L_2 - V(1,2). \quad (2.192)$$

Des particules différentes ou une même particule à qui on octroie des degrés de liberté additionnels peuvent jouer le rôle de sous-systèmes

Exemple 2.6

Si $L_1 = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 - V_1(\mathbf{r}_1)$ décrit le mouvement de la particule 1 et si $L_2 = \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_2(\mathbf{r}_2)$ décrit le mouvement de la particule 2 alors le système physique constitué des deux particules sans interaction est

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_1(\mathbf{r}_1) - V_2(\mathbf{r}_2) \end{aligned} \quad (2.193)$$

Si en plus on permet aux deux particules d'interagir via une force

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial V(1,2)}{\partial \mathbf{r}_i}$$

c'est-à-dire, la force sur la particule i due à la particule j , alors le lagrangien est

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 - V(1,2) \\ &= L_1 + L_2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V_1(\mathbf{r}_1) \\ &\quad - V_2(\mathbf{r}_2) - V_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (2.194)$$



2.10 Symétrie de l'espace-temps ★★

Rappelons que la mécanique newtonienne est basée sur trois postulats

1. Première loi de Newton ou principe de l'inertie : le mouvement d'un corps isolé est rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.
2. Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique de translation : Ce principe relie la force à la masse et l'accélération par l'équation fondamentale du mouvement

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (2.195)$$

3. Troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques (action-réaction).

Quant à elle, la mécanique lagrangienne arrive, par une approche totalement différente, à décrire les mêmes phénomènes physiques établissant une équivalence entre les équations d'Euler-Lagrange et les équations de mouvement newtonienne. La question qui se pose alors est la suivante : Existe-t-il une relation entre les principes de la mécanique lagrangienne et ceux de la mécanique newtonienne ?

2.10.1 Mécanique non relativiste ★★

Choisissons d'abord un système de référence approprié. Le système le plus simple est un repère inertiel (ou galiléen) quelconque et puisque les lois de la physique doivent être indépendantes de ce choix alors autant se simplifier la vie. Un tel référentiel possède les propriétés suivantes :

1. L'espace est homogène et isotrope.
2. Le temps y est uniforme (= le même partout). On dit également que le temps est absolu.

Ces symétries constituent la base de ce qu'on appelle le « principe de relativité de Galilée ».

L'approche lagrangienne choisit la trajectoire physique, c'est-à-dire le mouvement d'une particule matérielle se déplaçant librement dans l'espace, en trouvant un extremum de l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Puisque l'espace homogène (invariant par translation spatiale), donc le lagrangien L qui doit l'être ne peut être fonction la position $\mathbf{r}$. De la même façon, puisque le temps y est uniforme (invariant par translation temporelle) il ne peut être fonction de t . Alors

$$L(\mathbf{r}', t') = L(\mathbf{r}, t).$$

Dans ce cas, L ne peut être qu'une fonction de la vitesse $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Par ailleurs, l'espace étant isotrope (invariant par rotation), L ne doit

pas dépendre de la direction de $\mathbf{v}$. Donc L est fonction de l'amplitude de $\mathbf{v}$ (ou simplement de $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$)

$$L = L(\mathbf{v}^2). \quad (2.196)$$

Les équations d'Euler-Lagrange se résument donc à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

donc $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ est une constante, ce qui implique une vitesse constante.

Remarque 2.7

i Ainsi, dans un repère inertiel, une particule libre se déplace avec une vitesse uniforme ce qui est équivalent au principe d'inertie (**première loi de Newton**). **i**

Rappelons que les transformations de Galilée entre deux repères inertiels ayant une vitesse relative $\mathbf{V}$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{V}t \\ t &= t' \end{aligned}$$

ou pour les vitesses

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Alors

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}^2) &= L((\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2) \\ &= L(\mathbf{v}'^2 + 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}^2). \end{aligned}$$

Si $\mathbf{V}$ est petit par rapport à $\mathbf{v}$

$$L(\mathbf{v}^2) \simeq L(\mathbf{v}'^2) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'^2} 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}.$$

Rappelons que deux lagrangiens équivalents doivent être reliés par une transformation de jauge

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt} F(q', t)$$

alors on peut identifier

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{r}', t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'^2} 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} = 2 \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'^2} \right) \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \cdot \mathbf{V}.$$

Le terme de droite est donc une dérivée temporelle totale d'une fonction de $\mathbf{r}'$ et de t , c'est-à-dire que $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'^2}$ est indépendant de $\mathbf{r}'$ et de t , autrement dit c'est une constante C . Donc

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'^2} = C \rightarrow L = C\mathbf{v}'^2.$$

Ce qui est vrai dans un repère l'est également dans un autre (donc $L = Cv^2$) et quelle que soit la vitesse $\mathbf{V}$. Alors

$$\begin{aligned} L' &= Cv'^2 = C(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 = C(\mathbf{v}^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}^2) \\ &= L - \frac{d}{dt}(2C\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} - CV^2t). \end{aligned}$$

Pour une particule libre dans tout repère inertiel, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0$$

ou avec $L = Cv^2$

$$2C\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2C\mathbf{a} = 0.$$

En posant

$$C = \frac{m}{2}$$

on obtient l'équation de mouvement pour une particule libre en mécanique newtonienne (deuxième principe). Le lagrangien devient alors

$$L = \frac{m}{2}v^2 = T$$

pour une particule de masse m .

Pour un système de particules libres, le lagrangien du système est une somme de lagrangiens indépendants et

$$L = \sum_{\alpha} L_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} v_{\alpha}^2.$$

Si les particules interagissent entre elles (système fermé), le lagrangien s'écrit

$$L = T - V$$

où le potentiel V ne dépend que des positions $\mathbf{r}_{\alpha}$.

Remarque 2.8

i Ceci mène aux équations d'Euler-Lagrange

$$m_{\alpha} \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} = \mathbf{F}_{\alpha}$$

où $-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_{\alpha}} = \mathbf{F}_{\alpha}$ est la force qui s'exerce sur la particule α faisant de celles-ci les équations de mouvement de Newton (**deuxième loi de Newton**). **i**

La symétrie par translation due à l'homogénéité de l'espace implique que le lagrangien reste invariant lorsqu'on applique une

translation globale $\mathbf{r}'_\alpha = \mathbf{r}_\alpha + \varepsilon_\alpha$. Puisque

$$\delta L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = \varepsilon_\alpha \cdot \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = 0$$

alors

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = \sum_\alpha \left(-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\right) = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = 0$$

Remarque 2.9

i Autrement dit, pour un système fermé, la somme des forces doit être nulle et en particulier, pour deux particules, on a $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ ce qui est le principe d'action et de réaction (**troisième loi de Newton**). **i**

En résumé, l'approche lagrangienne jumelée à des symétries de l'espace-temps permet déduire les trois lois de Newton. L'approche newtonienne, plus intuitive, fait appel à la notion de force alors l'approche lagrangienne introduit d'autres outils comme les énergies cinétique et potentielle, des notions plus abstraites.

À noter que $L = T - V$ est une conséquence directe de l'utilisation d'un repère inertiel. Dans un référentiel accéléré, l'expression pour $L = T - V$ n'est pas triviale puisque V doit reproduire les forces d'inertie (comme la force de Coriolis, la force centrifuge, etc...) ce qui est en général plus complexe.

2.10.2 Mécanique relativiste ★★

Il est possible de procéder de la même manière pour la mécanique relativiste et d'arriver au lagrangien relativiste. Le principe de relativité de Galilée est simplement remplacé par celui de Lorentz. Nous allons obtenir de cette façon le lagrangien relativiste en suivant plusieurs étapes :

1. L'action d'une particule libre ne doit pas dépendre du référentiel. autrement dit, ce doit être un invariant de Lorentz : L'objet le plus simple qui obéit à cette contrainte est l'intégrale d'un scalaire (ici on sous-entend un scalaire de Lorentz qui est invariant par rapport à une transformation de Lorentz.)
2. Ce scalaire doit être fonction au plus de différentielles du premier ordre pour que les équations d'Euler-Lagrange puissent produire des équations avec des dérivées secondes des positions :

Le seul scalaire qui répond à cette condition est proportionnel à

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2},$$

l'intervalle d'espace-temps de Minkowski. L'action d'une particule libre relativiste s'écrit alors

$$S = -a \int_{s_1}^{s_2} ds \quad (2.197)$$

- où $a > 0$ est une constante caractéristique de la particule dont le signe est choisi ainsi pour que l'action S soit minimale (principe de moindre action) dans le cas d'un mouvement réel.
- La condition requérant un espace isotrope est levée pour être en mesure de considérer des référentiels en rotation (l'axe de rotation est privilégié).
 - Le lagrangien L d'une particule libre s'écrit donc

$$L = -ac\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.198)$$

- La seule inconnue est la constante a . Pour la déterminer, examinons la limite newtonienne $v \ll c$ de ce lagrangien

$$L \simeq -ac\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = -ac + \frac{a}{2c}v^2$$

Le premier terme est une constante et donc sans effet. Le second terme peut être identifier à l'énergie cinétique de la particule libre ce qui suggère

$$a = mc$$

Suivant cette définition, il est évident que $a > 0$.

Nous avons donc pour une particule libre de masse $m > 0$

$$S = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds = -mc \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Le moment généralisé de cette particule est $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$, c'est-à-dire

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m v_i \quad (2.199)$$

$$\xrightarrow[v \ll c]{} m v_i \quad (2.200)$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz. L'énergie est donnée par l'hamiltonien

$$H = E = \sum_i p_i v_i - L \quad (2.201)$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \quad (2.202)$$

$$\xrightarrow[v \ll c]{} mc^2 + T \quad (2.203)$$

Ces deux définitions sont cohérentes avec la limite newtonienne ($v \ll c$), l'énergie étant définie à une constante près. On note qu'aucune particule de masse non-nulle ne peut aller à $v = c$.

L'énergie cinétique de la particule prend la forme

$$T = (\gamma - 1)mc^2$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz. L'essentiel des expressions relativistes découle de ces résultats

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}}{E} \\ m^2 c^4 &= E^2 - p^2 c^2 \end{aligned}$$

La dernière expression définit un autre invariant de Lorentz, la masse propre m en fonction de l'énergie-impulsion.

2.10.3 Autres types de « mécanique » ★★

On note qu'en utilisant le principe de moindre action et des symétries sur la structure de l'espace-temps (principe de relativité de Galilée ou de Lorentz), il a été possible de reconstruire les outils nécessaires à la description de la dynamique.

La procédure est tout à fait générale et démontre le potentiel de la mécanique lagrangienne. Même si l'espace-temps est encore plus compliqué, métrique de Riemann $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ou de propriétés

géométriques particulières, elle mènerait en principe directement à aux équations de mouvement. Resterait bien sûr à valider les prédictions d'une telle théorie par des évidences expérimentales.

2.11 Exercices

2.1 Symétries

Une sphère pleine de densité uniforme peut se déplacer sur une surface plane, sans frottement (figure 2.11).

- Quelles sont les trois types de symétrie du système ?
- Quelle est la quantité conservée associée à chacune de ces symétries ?

2.2 Pendule rigide

Soit un pendule constitué d'une masse m attachée au bout d'une tige de longueur l et de masse négligeable (figure 2.12).

- Quelles sont les contraintes sur la dynamique du système ?
- Combien ce système possède-t-il de degrés de liberté ?
- Combien de degrés de liberté posséderait le système sans les contraintes mentionnées en (a) ?
- Écrivez l'énergie cinétique du système dans les coordonnées généralisées décrites en (b).
- Écrivez le potentiel dans ces mêmes coordonnées.

2.3 Pendule attaché à un bloc

Un pendule de masse m_2 est attaché à un bloc de masse m_1 , libre de glisser sans frottement le long d'un axe horizontal. Une tige rigide de longueur r et de masse négligeable relie les deux masses. Les masses, considérées comme ponctuelles

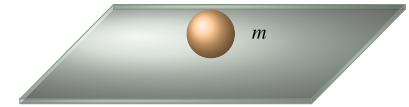


Figure 2.11 ▲
Problème 2.1.

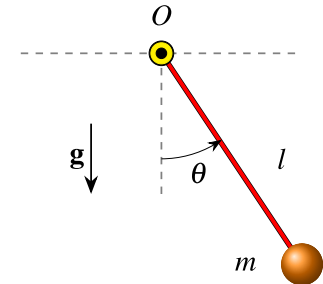


Figure 2.12 ▲
Problème 2.2.

pour ce problème, sont contraintes à se déplacer dans un plan formé de l'axe horizontal et de l'axe vertical (c'est-à-dire dans le plan de la feuille dans la figure 2.13).

- Combien de degrés de liberté posséderait le système si les contraintes étaient absentes ?
- Quelles sont les contraintes sur du système ?
- Combien ce système possède-t-il de degrés de liberté ?
- Écrivez l'énergie cinétique du système dans les coordonnées généralisées appropriées pour décrire les degrés de liberté en (c).
- Écrivez l'énergie potentielle dans ces mêmes coordonnées.

2.4 Trajectoire brachistochrone

Une particule ponctuelle de masse m se déplace dans un champ de force constant dirigé vers le bas (par exemple le champ gravitationnel à la surface de la Terre, voir figure 2.14) :

$$\mathbf{F}(x, y) = mg\mathbf{e}_x$$

On veut déterminer quelle trajectoire la particule doit suivre pour aller du point $A : \mathbf{r}(0) = (x_A, y_A)$ au point $B : \mathbf{r}(T) = (x_B, y_B)$ dans un temps T minimal. (Dans le diagramme ci-contre, $\mathbf{r}(t)$ est une trajectoire quelconque. Indice : Utiliser

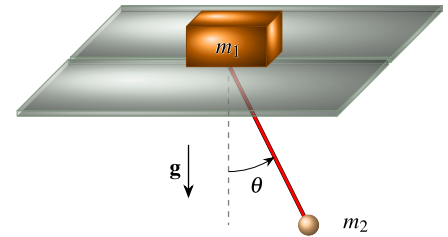


Figure 2.13 ▲
Problème 2.3.

$A : \mathbf{r}(t = 0)$

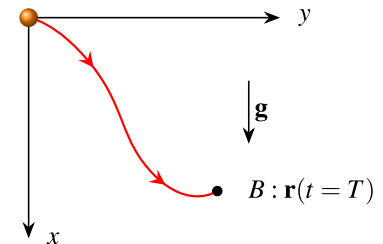


Figure 2.14 ▲
Problème 2.4.

l'identité de Beltrami)

- (a) On veut trouver la trajectoire minimisant le temps. Il faut donc exprimer le temps en fonction de la trajectoire inconnue. Montrez d'abord que le temps de parcours peut être exprimé comme

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} dx \quad \text{où} \quad y' = \frac{dy}{dx} \quad (2.204)$$

- (b) L'intégrale (2.204) est une *intégrale fonctionnelle*, car elle ne dépend pas directement de la variable x , mais d'une *fonction* de x . On cherche la fonction $y(x)$ qui va minimiser T .

La définition d'un voisinage fonctionnel se fait comme suit. On donne à toutes les fonctions possibles y une représentation paramétrique $y = y(\alpha, x)$, telle que pour $\alpha = 0$, $y(0, x) = y(x)$, où $y(x)$ est la fonction rendant T stationnaire. On peut alors écrire :

$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha \eta(x)$$

où $\eta(x)$ est une fonction quelconque de x dont la première dérivée existe et pour laquelle on a $\eta(x_A) = \eta(x_B) \equiv 0$. (On ne varie pas les points limites.)

La condition rendant l'intégrale (2.204) minimale est que T soit indépendant du paramètre α au premier ordre, ceci se traduisant par la condition suivante, nécessaire mais non suffisante :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \forall \eta(x) \quad (2.205)$$

Posez d'abord

$$f(y, y', x) \equiv \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}}$$

dans l'équation (2.204) et montrez qu'en imposant la condition (2.205), soit

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_A}^{x_B} f(y, y', x) dx = 0,$$

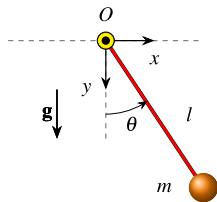
on obtient l'équation d'Euler-Lagrange, soit :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.206)$$

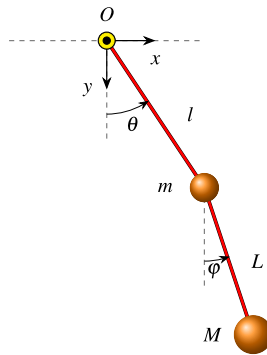
- (c) Remplacez f dans son expression dans l'équation d'Euler-Lagrange (2.206) et écrivez explicitement l'équation différentielle résultante. (Exploitez le fait que y soit une variable cyclique, i.e. seule sa dérivée apparaît dans f .)
- (d) Montrez qu'on obtient une cycloïde comme solution.

2.5 Équations du mouvement

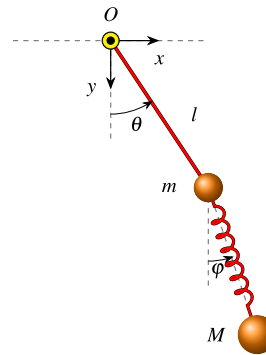
Écrivez les équations du mouvement (sans les solutionner) pour les 3 systèmes suivants en utilisant la méthode lagrangienne.



(a)



(b)



(c)

- (a) Un pendule constitué d'une masse ponctuelle m fixée au bout d'une tige de longueur l et de masse négligeable et

- dont l'oscillation est confinée dans un plan vertical.
- (b) Un pendule double constitué d'un pendule tel qu'en (a), mais avec une deuxième masse M accrochée à la masse m par une deuxième tige de masse négligeable et de longueur L .
 - (c) Un pendule double à ressort constitué d'un pendule tel qu'en (b), mais dont la masse M peut glisser le long de sa tige en comprimant ou étirant un ressort de constante de rappel k .
 - (d) Le système illustré dans la figure suivante, en supposant que le mouvement est uniquement vertical, que les cordes et les poulies sont de masse négligeable et que les cordes glissent sans frottement sur les poulies (figure 2.23).

2.6 Force centrale

Une particule de masse m_1 se déplaçant uniquement sur une table horizontale lisse est attachée à une corde qui passe par un trou dans la table situé à une distance r de la masse m_1 . L'autre extrémité de la corde est reliée à un bloc de masse m_2 qui se déplace uniquement selon l'axe vertical. On suppose que la corde est de longueur fixe et reste toujours tendue (figure 2.15).

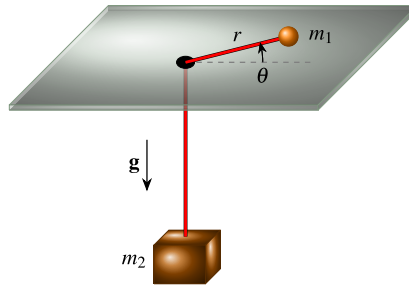


Figure 2.15 ◀▶
Problème 2.6.

- Combien ce système possède-t-il de degrés de liberté ?
- Déterminez le lagrangien du système.
- Identifiez les variables cycliques s'il y a lieu.
- Obtenez les équations du mouvement.
- Solutionnez l'équation du mouvement en r autour du point d'équilibre $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ (bloc au repos).

2.7 Caténaire ou chaînette

Déterminez la fonction $y(x)$ qui décrit la courbe formée par une corde au repos, suspendue de manière fixe à ses deux extrémités A et B . La corde possède une densité linéique de masse uniforme λ , une longueur l et n'est pas extensible. Une distance L sépare les points A et B qui sont à même hauteur (figure 2.16).

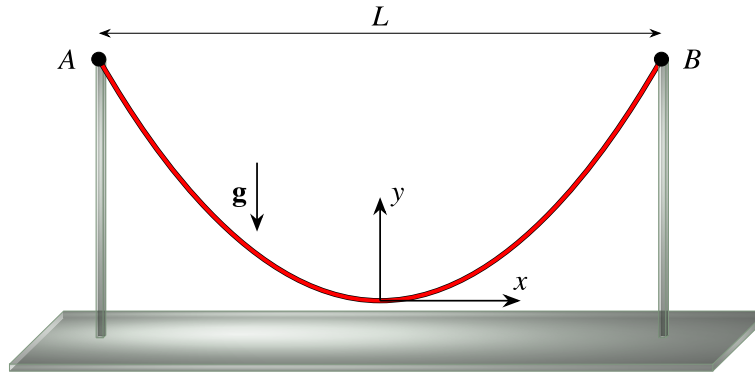


Figure 2.16 ◀▶
Problème 2.7 Caténaire

- La quantité à minimiser est l'énergie potentielle gravitationnelle. Exprimez cette énergie sous forme intégrale, en fonction de $y(x)$. Considérez la densité de la corde de sorte que $dm = \lambda dl$. Indice : la longueur de la corde obéit à l'équation suivante : $dl^2 = dx^2 + dy^2$
- Exprimez la contrainte qui stipule que la longueur doit être constante sous la forme d'une intégrale.
- Utilisez la technique des multiplicateurs de Lagrange et exprimez le lagrangien du système en tenant compte de la contrainte déterminée en (b).
- Déterminez l'équation différentielle découlant de l'application de l'équation d'Euler-Lagrange au lagrangien trouvé en (c).

- (e) Appliquez les équations d'Euler-Lagrange à votre lagrangien et obtenez l'équation caractéristique suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{y - \lambda}{k} \right)^2 - 1,$$

- (f) Déterminez $y(x)$ grâce au résultat obtenu en (d). Utilisez le changement de variable adéquat.

2.8 Un ballon

Vous êtes sur Terre, un espace à trois dimensions qui comporte un potentiel gravitationnel. Vous lancez un ballon dans les airs.

- Combien de degrés de liberté sont impliqués dans cette situation ?
- Quel est le lagrangien du système ?
- Le système possède-t-il des variables cycliques ? Si oui, lesquelles ?
- Vous effectuez une translation dans l'espace, $x \rightarrow x + \varepsilon$ et $y \rightarrow y + \varepsilon$. Votre lagrangien sera-t-il modifié suite à cette translation ? S'il y a invariance, le théorème de Noether est applicable, alors déterminez la ou les quantités conservées associées à ces transformations.

2.9 Particule ponctuelle sur un demi-cercle

Soit le schéma illustré à la figure 2.17. Une particule ponctuelle

se déplace sans friction le long d'un demi-cercle rigide

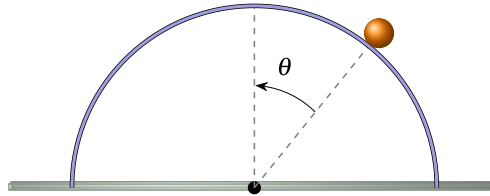


Figure 2.17 ◀▶
Problème 2.9.

- Combien de degrés de liberté sont impliqués dans cette situation ? Quel choix de variable(s) généralisée(s) vous permet de simplifier grandement ce problème ?
- Quel est le lagrangien du système ?
- Le système possède-t-il des variables cycliques ? Si oui, lesquelles ?
- Déterminez les équations du mouvement de ce système.

2.10 Deux masses et une corde

Soit le schéma illustré à la figure 2.18. Deux masses sont reliées entre elles par une corde de masse négligeable. L'une des masses oscille, l'autre non. Considérez les degrés de liberté r et θ illustrés sur la figure 2.18.

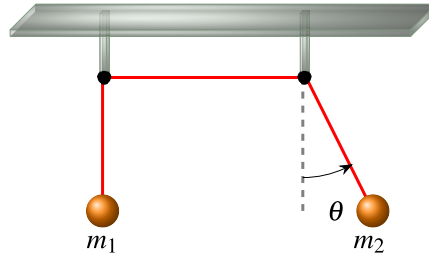


Figure 2.18 ◀▶
Problème 2.10.

- Quel est le lagrangien de ce système ?
- Quelles sont les équations du mouvement en $\ddot{r}$ et $\ddot{\theta}$?
- Utilisons une approximation un peu plus précise qu'à l'ordinaire pour les petits amplitudes de déplacement. Développons les termes en θ au deuxième ordre [$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $\sin(\theta) = \theta$]. En supposant une amplitude ε très faible pour l'oscillation la masse de droite, où ϕ est une phase arbitraire et $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$, démontrez que :

$$2\ddot{r} = \varepsilon^2 g \left[\sin^2(\omega t + \phi) - \frac{1}{2} \cos^2(\omega t + \phi) \right]$$

2.11 Un bloc glisse sur un plan incliné

Soit le schéma illustré à la figure 2.19. Un bloc glisse sur un plan incliné d'un angle α dans la direction z . La friction est considérée comme négligeable entre le bloc et le plan. Un

pendule de longueur fixe est suspendu au centre du bloc et oscille avec un angle θ . Le pendule et le bloc ont des masses différentes.

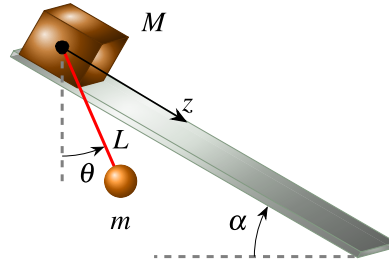


Figure 2.19 ◀▶
Problème 2.11.

- Exprimez les positions horizontales et verticales du bloc et du pendule, x_M , y_M , x_m et y_m respectivement, en fonction des coordonnées généralisées z et θ , de α et de la longueur du pendule L .
- Quel est le lagrangien de ce système exprimé dans les coordonnées généralisées z et θ ?
- Déterminez les équations du mouvement pour $\ddot{z}$ et $\ddot{\theta}$.
- Considérez de faibles oscillations autour du point d'équilibre du pendule où $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$. Quelle est la position θ d'équilibre du pendule ? Soyez certain que votre solution est physiquement interprétable.

2.12 Masse se déplaçant le long d'une tige

Soit le schéma illustré à la figure 2.20. La masse m est libre

de se déplacer le long d'une tige et peut passer au travers la masse M , qui elle est fixe. Les deux tiges sont à angle droit. Il n'y a pas de friction entre la masse m et la tige, de plus la masse de la tige peut être négligée. La distance entre les masses m et M est notée x et peut donc varier.

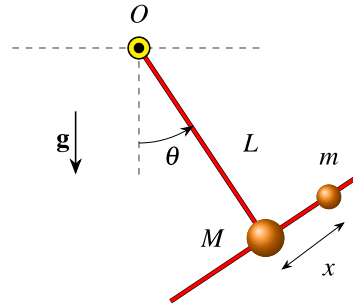


Figure 2.20 ◀▶
Problème 2.12.

- Exprimez les positions des deux masses en fonction coordonnées généralisées x et θ et de la longueur L du pendule.
- Quel est le lagrangien de ce système exprimé dans les coordonnées généralisées x et θ ?
- Déterminez les équations du mouvement pour $\ddot{x}$ et $\ddot{\theta}$.
- Pour de faibles déplacements ($\theta \ll 1$ et $x/L \ll 1$) démontrer que les équations du mouvements peuvent se simpli-

fier à :

$$\begin{aligned} L\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta &= 0 \quad \text{et} \\ -ML\ddot{x} + mgx &= 0 \end{aligned}$$

2.13 Pendule avec ressort

La figure 2.21 illustre un pendule dont la masse m est reliée à un ressort et pour lequel le mouvement est restreint dans le plan vertical. La tige du pendule qui est fixée à un pivot O au plafond est de longueur L et définit un angle θ avec la verticale. L'extrémité inférieure du ressort est fixée au plancher par le pivot A à une distance $2L$ directement sous le pivot O . On pose que les masses de la tige et du ressort sont négligeables et que la longueur du ressort au repos est d telle que $0 < d \leq L$.

- Combien ce système possède-t-il de degrés de liberté ?
- Quelle est l'énergie cinétique de la masse m ?
- Déterminer l'énergie potentielle du système (considérez la partie inférieure du ressort comme la hauteur de référence de votre énergie potentielle).
- Obtenez les équations du mouvement (indice : une seule équation par degré de liberté).

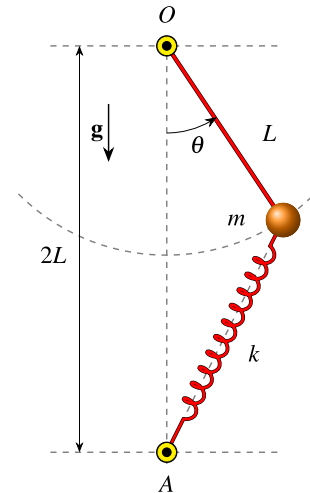


Figure 2.21 ▲
Problème 2.13.

- (e) Pour des petites oscillations ($\sin(\theta) = \theta$ et $\cos(\theta) = 1$), obtenez la fréquence d'oscillation de votre système qui devrait agir comme un oscillateur harmonique.

2.14 Un système à 2 degrés de liberté

Considérez un système à 2 degrés de liberté, r et θ et un potentiel $V = -k/r$ avec k une constante.

- (a) Quel est le lagrangien de ce système ?
- (b) Obtenez les équations du mouvement.
- (c) Refaire l'exercice avec cette fois $V = k/r^2$

2.15 Particule à la surface d'une sphère

Une particule de masse m peut se déplacer sans frottement à la surface d'une sphère de rayon R et est soumise au champ gravitationnel terrestre g

- (a) Exprimez les coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques et déterminez les dérivées temporelles de x, y et z en coordonnées sphériques.
- (b) Quel est le lagrangien du système en coordonnées sphériques ?
- (c) Le système possède-t-il des variables cycliques ? Si oui, lesquelles ? Combien de degrés de liberté possède le système ?
- (d) Déterminez les équations du mouvement de ce système.

2.16 Une bille sur une cycloïde

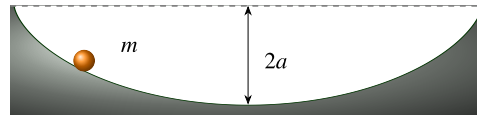


Figure 2.22 ◀▶
Problème 2.16.

Soit le schéma illustré à la figure 2.22. Une bille de masse m roule sans frottement dans un puits en forme de cycloïde :

$$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 + \cos \theta) \quad 0 \ll \theta \ll 2\pi$$

- (a) Déterminez le lagrangien du système en un champ gravitationnel terrestre g .
- (b) Déterminez les équations du mouvement.
- (c) Quelle sera la fréquence d'oscillation de la masse m ?

2.17 Appareil d'Atwood complexe

Soit le système décrit à la figure 2.23.

- (a) Combien ce système possède-t-il de degrés de liberté ?
- (b) Déterminez le lagrangien du système.
- (c) Identifiez les variables cycliques s'il y a lieu.
- (d) Obtenez les équations du mouvement.

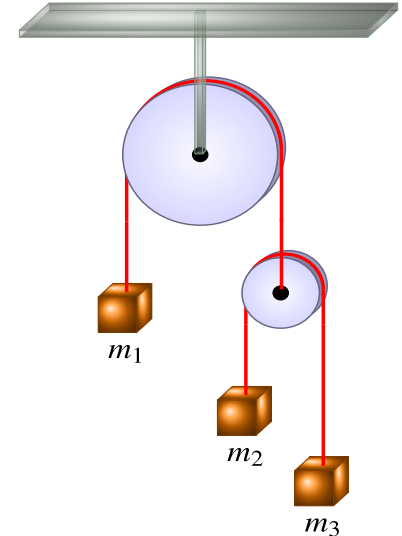
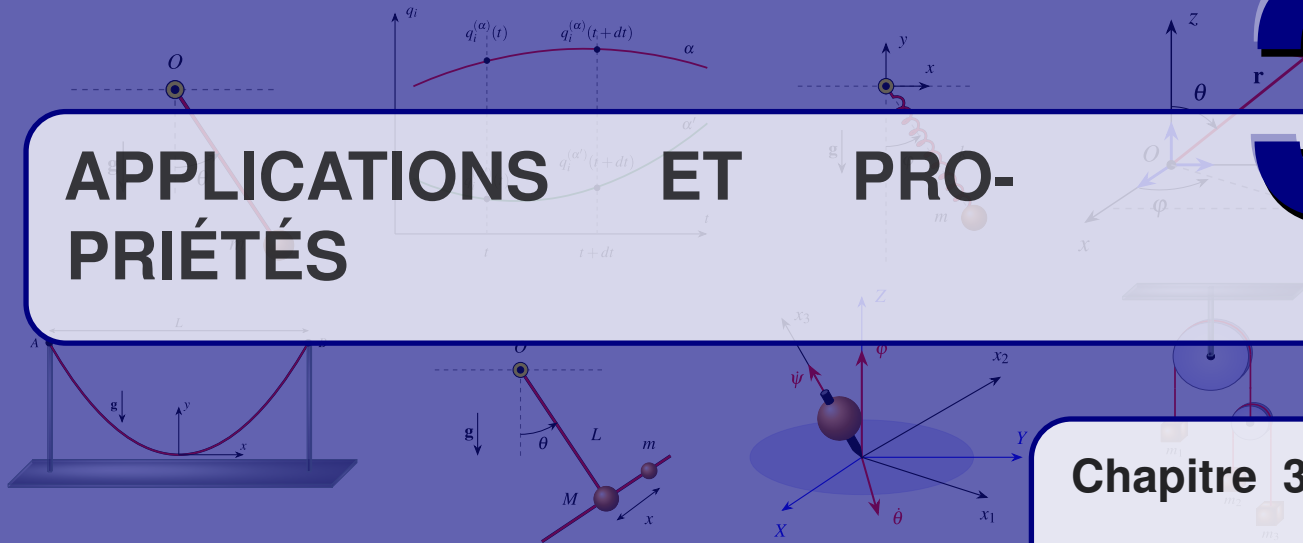


Figure 2.23 ▲
Problème 2.17.



3

APPLICATIONS ET PROPRIÉTÉS



Chapitre 3

- 3.1 Cas simples en mécanique 139
- 3.2 Exemples non mécaniques 157
- 3.3 Problème à deux corps 161
- 3.4 Le potentiel central ... 164
- 3.5 Exercices 184

CE CHAPITRE vise essentiellement à se familiariser avec les techniques de résolution de problèmes en utilisant l'approche lagrangienne. On procède principalement par exemples. Contrairement à la méthode newtonienne où chaque problème est pratiquement un cas spécial (c'est-à-dire qu'il

faut introduire des forces de façon plus ou moins intuitive et écrire directement les équations de mouvement), on peut d'établir une méthode générale qui introduit un seul objet. le lagrangien.

Méthode 3.1

i Méthode lagrangienne :

La méthode passe par les étapes suivantes :

1. Trouver quelles sont les contraintes sur la dynamique du système.
2. Identifier le nombre de degrés de liberté du système.
3. Choisir des coordonnées généralisées appropriées.
4. Déterminer l'énergie cinétique et potentielle du système en fonction des coordonnées généralisées.
5. Déterminer s'il y a des variables cycliques. Pour chaque variable cyclique identifiée, construire la quantité qui est une constante du mouvement.
6. Écrire le reste des équations du mouvement à partir des équations d'Euler-Lagrange.
7. Trouver la trajectoire en solutionnant les équations de mouvement si c'est possible.



Les exemples de ce chapitre ne suivent pas tous ce cheminement ; certains raccourcis seront empruntés par soucis de concision. Toutefois, il est conseillé, pour le novice et même pour l'expert, de

suivre ces étapes car il est souvent facile de se perdre dans les dédales de la mécanique classique et d'utiliser à tort des arguments intuitifs.

3.1 Cas simples en mécanique

3.1.1 Particule dans un champ gravitationnel

Exemple 3.1

◆ Une particule de masse m dans le champ gravitationnel près de la surface a une énergie potentielle $V = mgz$ où z mesure sa hauteur et g est l'accélération due à la gravité (voir figure 3.1). Nous avons ici un corps pouvant se déplacer en 3D sans contrainte, donc trois degrés de liberté. Un choix approprié de coordonnées généralisées se trouve naturellement à être les coordonnées cartésiennes ($V = mgz$).

Son énergie cinétique est

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (3.1)$$

et l'énergie potentielle :

$$V = mgz$$

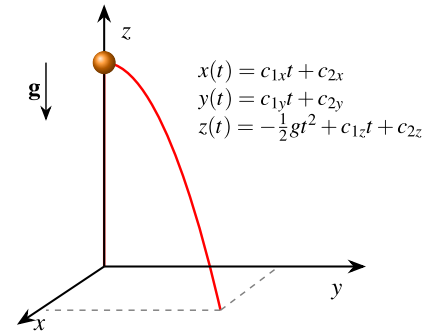


Figure 3.1 ▲
Particule dans un champ gravitationnel.

donc

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (3.2)$$

Nous aurons trois équations d'Euler-Lagrange, celles pour x et y étant identiques. Voyons celle en x . On constate que $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Dans un tel cas, on dit de x que c'est une variable cyclique. L'équation d'Euler-Lagrange pour x se limite donc à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (3.3)$$

ou $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{constante}$ (d'intégration). De $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mc_{1x}$, on tire

$$x(t) = c_{1x}t + c_{2x} \quad (3.4)$$

où les constantes c_{1x} et c_{2x} sont déterminées par les conditions initiales du problème. De la même façon

$$y(t) = c_{1y}t + c_{2y} \quad (3.5)$$

Pour z nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -mg \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z} \quad (3.7)$$

alors

$$m\ddot{z} + mg = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{z} = -g \quad (3.8)$$

donc

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_{1z}t + c_{2z} \quad (3.9)$$

où c_{1z} et c_{2z} sont déterminées par les conditions du problème. Finalement, la solution est comme il se doit :

$$x(t) = c_{1x}t + c_{2x} \quad (3.10)$$

$$y(t) = c_{1y}t + c_{2y} \quad (3.11)$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_{1z}t + c_{2z} \quad (3.12)$$

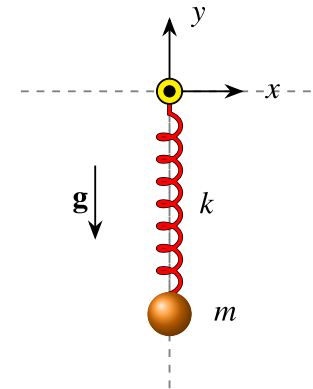


Figure 3.2 ▲
Particule suspendue à un ressort

3.1.2 Particule suspendue à un ressort

Exemple 3.2

◆ Une particule de masse m est suspendue à un ressort de constante k dans le champ gravitationnel près de la surface de la Terre (voir figure 3.2). On pose que seul le mouvement vertical est permis.

Nous avons ici un corps pouvant se déplacer en 3D mais avec deux contraintes (aucun mouvement en x et en y), donc un seul degrés de liberté. Le meilleur choix de coordonnées généralisées est la coordonnée cartésienne z ($V = mgz$).

Le mouvement n'étant que vertical,

$$T = \frac{m}{2} \dot{z}^2. \quad (3.13)$$

Son énergie potentielle est

$$V = \frac{k}{2} (z - z_0)^2 + mgz \quad (3.14)$$

où z_0 est la position au repos sans gravité du ressort et

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - \frac{k}{2} (z - z_0)^2 - mgz \quad (3.15)$$

La coordonnée z n'est pas une variable cyclique. L'équation

d'Euler-Lagrange (il n'y a qu'un seul degré de liberté) est alors

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -k(z - z_0) - mg \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = m\ddot{z}. \quad (3.17)$$



Exemple 3.3



$$m\ddot{z} + k(z - z_0) + mg = 0 \quad (3.18)$$

$$m\ddot{z} + kz = kz_0 - mg. \quad (3.19)$$

Il est toujours possible de diviser la solution d'une telle équation en deux parties $z = z_h + z_p$

1- Solution homogène z_h qui est solution de :

$$m\ddot{z}_h + kz_h = 0. \quad (3.20)$$

2- Solution particulière z_p telle que :

$$m\ddot{z}_p + kz_p = kz_0 - mg$$

Rappelons que l'équation homogène trouve solution avec la forme

$$z_h = Ae^{st}$$

tel que

$$\frac{dz_h}{dt} = sz_h$$

et nous avons alors

$$m\ddot{z}_h + kz_h = 0 \quad (3.21)$$

$$\Downarrow$$

$$ms^2 + k = 0 \quad (3.23)$$

ce qui permet de déduire la constante s

$$s^2 = -\frac{k}{m} \implies s = \pm i\omega \text{ où } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La solution générale s'écrit

$$z_h(t) = A'e^{i\omega t} + B'e^{-i\omega t} = A \sin(\omega t + \delta) \quad (3.24)$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.25)$$

et A et δ qui sont des constantes d'intégration devant être déterminées par les conditions initiales. Le terme non homogène obéit à

$$m\ddot{z}_p + kz_p = kz_0 - mg = \text{constante.} \quad (3.26)$$

et on n'est pas surpris de trouver

$$z_p = \text{constante} = C \quad (3.27)$$

$$z(t) = z_h(t) + C \quad (3.28)$$

$$= A \sin(\omega t + \delta) + C \quad (3.29)$$

où C est une constante. Pour l'identifier, on substitue cette solution dans l'équation

$$m\ddot{z} + kz = kz_0 - mg$$

avec

$$\ddot{z} = \ddot{z}_h + 0 = -\omega^2 A \sin(\omega t + \delta) \quad (3.30)$$

on obtient

$$m\ddot{z} + kz = kz_0 - mg \quad (3.31)$$

$$m(-\omega^2 A \sin(\omega t + \delta)) + k(A \sin(\omega t + \delta) + C) = \quad (3.32)$$

$$\underbrace{-m\omega^2 A \sin(\omega t + \delta) + kA \sin(\omega t + \delta)}_0 + kC = \quad (3.33)$$

Il en découle

$$kC = kz_0 - mg \implies C = z_0 - \frac{mg}{k} \quad (3.34)$$

Finalement, la solution peut s'écrire

$$z(t) = A \sin(\omega t + \delta) + z_0 - \frac{mg}{k}. \quad (3.35)$$

On reconnaît le mouvement harmonique (forme sinusoïdale) d'amplitude A par rapport à la position $z = z_0 - \frac{mg}{k}$. Ainsi, au repos où $A = 0$ nous avons $z = z_0 - \frac{mg}{k}$, c'est-à-dire le champ gravitationnel cause un étirement du ressort (vers le bas) d'une longueur $\frac{mg}{k}$.

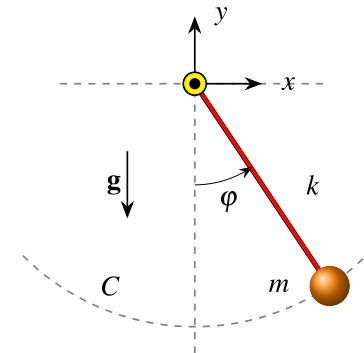


Figure 3.3 ▲

Particule suspendue au bout d'une tige rigide.

3.1.3 Particule suspendue au bout d'une tige rigide

Exemple 3.4

◆ Une particule est suspendue au bout d'une tige rigide sans masse et se déplace dans le plan xy (voir figure 3.3).

Nous avons ici un corps pouvant se déplacer en 3D mais avec deux contraintes : le déplacement dans le plan xy et la rigidité de la tige. En fait, la particule ne se déplace que sur la courbe C qui n'a qu'une dimension. Le système ne possède donc qu'un seul degré de liberté. Un choix judicieux de coordonnées généralisées est l'angle φ , qui est suffisante pour déterminer la position de la particule.

Géométriquement, on a

$$x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi \quad (3.36)$$

donc

$$\dot{x} = l \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y} = l \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (3.37)$$

et alors

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2. \quad (3.38)$$

Par ailleurs, l'énergie potentielle due au champ gravitationnel est $V = mgy$, soit

$$V = mgy = -mgl \cos \varphi \quad (3.39)$$

et ainsi

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (3.40)$$

C'est un lagrangien pour un système à un seul degré de liberté, ici φ , comme il se doit. Un choix *intelligent* de coordonnées généralisées, lorsqu'il y a contrainte, consiste à choisir les degrés de liberté contraints (ils ne sont plus des degrés de liberté alors) comme faisant partie des coordonnées généralisées. Ainsi dans cet exemple, le mouvement dans le plan xy peut être décrit en coordonnées polaires (r, φ) où $r = l$ est précisément l'équation de contrainte ici. C'est le choix que nous faisons, ce qui ne laisse que le degré de liberté décrit par φ . Ce degré de liberté est un angle et n'a pas de dimension. Il n'y a qu'une seule équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi} \quad (3.42)$$

donc l'équation d'Euler-Lagrange se lit

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad (3.43)$$

ou $\ddot{\varphi} + (g/l) \sin \varphi = 0$, après division par ml^2 .



La solution n'est pas triviale et fait appel à des intégrales elliptiques. Mentionnons sans démonstration les trois types de solutions :

Cas 1 : Oscillations : L'énergie initiale ne suffit pas à amener le pendule à sa hauteur maximale $\varphi < \pi$: Posant

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad H = l(1 - \cos \theta_0)$$

on a

$$\text{Période :} \quad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \mathbf{K}(k)$$

$$\text{Vitesse angulaire :} \quad \dot{\varphi} = 2k\omega_0 \text{cn}(\omega_0 t, k)$$

$$\text{Hauteur du pendule :} \quad h = H \text{sn}^2(\omega_0 t, k)$$

où $\mathbf{K}$, sn et cn sont des fonctions elliptiques de Jacobi.

Cas 2 (cas limite) : Temps infini pour atteindre $\varphi = \pi$

$$\text{Angle :} \quad \varphi = 4 \arctan(e^{\omega_0 t}) - \pi$$

$$\text{Vitesse angulaire :} \quad \dot{\varphi} = \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)}$$

$$\text{Hauteur du pendule :} \quad h = 2l \tanh(\omega_0 t)$$

Cas 3 : Tournoiement

$$\text{Période : } T = \frac{T_0}{\pi k} \mathbf{K}(1/k)$$

$$\text{Vitesse angulaire : } \dot{\varphi} = 2k\omega_0 \operatorname{dn}(k\omega_0 t, 1/k)$$

$$\text{Hauteur du pendule : } h = 2l \operatorname{sn}^2(k\omega_0 t, 1/k)$$

où dn est une fonction elliptique de Jacobi.

Cependant si φ reste petit, alors (comme sur les horloges grand-père)

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \quad (3.44)$$

et on peut ne retenir que

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad (3.45)$$

et l'équation devient

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi \approx 0 \quad \implies \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi. \quad (3.46)$$

Cette dernière équation correspond à celle du mouvement harmonique qui a comme solution

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (3.47)$$

avec $\omega = \sqrt{g/l}$, A et δ étant des constantes déterminées par les conditions initiales du problèmes. C'est le fameux problème du pendule plan qui a longtemps servi de référence pour mesurer le temps.

Remarque 3.1

i Dans les deux derniers exemples, le mouvement est « harmonique ». C'est le cas à chaque fois que l'équation du mouvement est du type

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = -\omega^2 u \quad ; \quad \omega^2 > 0 \quad (3.48)$$

qui a comme solution

$$u(t) = A \sin(\omega t + \delta) = A' \cos(\omega t + \delta') \quad (3.49)$$

ou

$$u(t) = B \sin \omega t + B' \cos \omega t \quad (3.50)$$

où ω est la fréquence (angulaire) du mouvement. $u(t)$ revient au même point à chaque fois que

$$\omega t = 2n\pi \quad : \quad n = \text{entier} \quad (3.51)$$

on a $\tau = 2\pi/\omega = 1/\nu$ où τ est la période, ν la fréquence du mouvement et $\omega = 2\pi\nu$ est la fréquence angulaire. i

On notera également que dans les deux premiers exemples, la coordonnée utilisée pour décrire le degré de liberté a les dimensions de longueur, ainsi les équations d'Euler-Lagrange ont des dimensions de force, comme l'équation de Newton. Il n'en va pas de même dans le dernier exemple où la variable n'a pas de dimension (un angle). L'équation d'Euler-Lagrange est l'équation du mouvement même si elle n'a pas des dimensions de force.

Références 3.1

i On peut visualiser les différentes solutions du problème du pendule simple en regardant l'animation sur le site :

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_\(mathematics\)#Exemples](https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)#Exemples) i

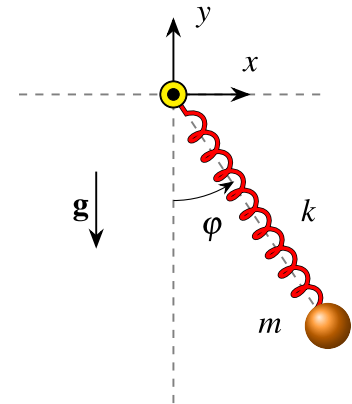


Figure 3.4 ▲
Pendule plan suspendu par un ressort de masse nulle.

3.1.4 Pendule plan suspendu par un ressort de masse nulle

Exemple 3.5

i Soit un pendule plan dans lequel la tige rigide est remplacée par un ressort de masse nulle, en fait négligeable (voir figure 3.4).

Nous avons ici un corps pouvant se déplacer en 3D mais avec une contrainte, le mouvement étant dans le plan xy . Puisque la tige n'est pas rigide le mouvement n'est pas contraint à une courbe C et on doit conserver deux degrés de liberté. Concernant le choix de coordonnées généralisées, on pourrait utiliser x et y mais ces coordonnées ne *collent* pas très bien avec la géométrie de l'objet même si elles sont bien adaptées pour décrire l'énergie potentielle gravitationnelle. Clairement, u et φ collent mieux à cette géométrie où

φ = angle du pendule avec la verticale
 u = position par rapport au point d'appui.

On obtient facilement

$$x = u \sin \varphi, \quad y = -u \cos \varphi \quad (3.52)$$

donc

$$\dot{x} = \dot{u} \sin \varphi + u \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (3.53)$$

$$\dot{y} = -\dot{u} \cos \varphi + u \dot{\varphi} \sin \varphi \quad (3.54)$$

et

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\
 &= \frac{m}{2}(\dot{u}^2 \sin^2 \varphi + 2u\dot{u}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + u^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \\
 &\quad + \dot{u}^2 \cos^2 \varphi - 2u\dot{u}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + u^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) \\
 &= \frac{m}{2}(\dot{u}^2 + u^2 \dot{\varphi}^2). \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique a un terme en $\dot{u}^2$ et un en $\dot{\varphi}^2$, ce qui est correct dans un lagrangien destiné à décrire un système physique à deux degrés de liberté. L'énergie potentielle est

$$\begin{aligned}
 V &= V_{\text{grav.}} + V_{\text{ress.}} \\
 &= mgy + \frac{K}{2}(u - u_0)^2 \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

$$= -mgu \cos \varphi + \frac{K}{2}(u - u_0)^2 \quad (3.57)$$

et finalement

$$L = \frac{m}{2}(\dot{u}^2 + u^2 \dot{\varphi}^2) + mgu \cos \varphi - \frac{K}{2}(u - u_0)^2 \quad (3.58)$$

où u_0 est la position radiale au repos du ressort-tige. Ici nous avons une coordonnée qui a des dimensions de longueur (u) et une qui n'en a pas (φ) puisque c'est un angle. Néanmoins, nos équations d'Euler-Lagrange seront de la même forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.60)$$

Dans (3.59),

$$\frac{\partial L}{\partial u} = m u \dot{\varphi}^2 + m g \cos \varphi - K(u - u_0) \quad (3.61)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = m \ddot{u} \quad (3.62)$$

et donc

$$m \ddot{u} - m u \dot{\varphi}^2 - m g \cos \varphi + K(u - u_0) = 0 \quad (3.63)$$

qui a des dimensions $[MLT^{-2}]$, c'est-à-dire de force. Pour (3.60)

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgu \sin \varphi \quad (3.64)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (mu^2 \dot{\varphi}) = 2mu \dot{u} \dot{\varphi} + mu^2 \ddot{\varphi} \quad (3.65)$$

ce qui donne en divisant par la masse

$$u^2 \ddot{\varphi} + 2u \dot{u} \dot{\varphi} + gu \sin \varphi = 0 \quad (3.66)$$

qui a des dimensions $[L^2]$, qui ne sont pas des dimensions de force. La solution de ces deux équations couplées n'est pas triviale. Cependant leur obtention, par une méthode raisonnablement simple constitue déjà en soi un résultat intéressant. 

Références 3.2

 On peut visualiser les différentes solutions du problème du pendule en regardant l'animation sur les sites :

<http://demonstrations.wolfram.com/2DSpringPendulum/>

et

[Animation sur mathematica : 2DSpringPendulum.cdf](#) 

3.2 Exemples non mécaniques

3.2.1 Principe de Fermat

Exemple 3.6

💡 On peut baser toute l'optique géométrique sur le principe de Fermat qui, remarquablement, est un principe variationnel. Les trajectoires des rayons lumineux obéissent à des équations d'Euler-Lagrange.

Énoncé : Entre deux points, 1 et 2, le rayon lumineux suit la trajectoire qui prend le moins de temps.

Si η est l'indice de réfraction, la vitesse du rayon lumineux est c/η . Appelons ds l'élément de longueur de la trajectoire, alors le temps requis pour parcourir ds est $dt = ds/v$. Entre les points 1 et 2, le temps requis sera T

$$T = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_1^2 \eta ds \quad (3.67)$$

où η peut varier d'un point à l'autre comme dans une fibre optique par exemple. La recherche de la trajectoire physique implique donc de minimiser T (On voit alors le parallèle entre le principe de Fermat et le principe de moindre action ; T ici joue le rôle de l'action)

Pour simplifier limitons-nous à un système à deux dimensions,

(x, y) donc

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (3.68)$$

La trajectoire du rayon est une équation du type $y = y(x)$ (on aurait pu choisir $x = x(y)$). Écrivons donc

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \equiv dx \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (3.69)$$

où $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ et ici x est considéré comme le paramètre et y une variable. Nous aurons donc

$$T = \frac{1}{c} \int_1^2 \eta(x, y) \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \equiv \int_1^2 L(y, \dot{y}, x) dx \quad (3.70)$$

Le lagrangien est ici

$$L(y, \dot{y}, x) = \frac{1}{c} \eta(x, y) \sqrt{1 + \dot{y}^2}. \quad (3.71)$$



Insistons sur le fait que le problème est semblable à un problème de mécanique à un degré de liberté, décrit par y . Ici x est le paramètre, ne décrit pas un degré de liberté et joue le rôle joué généralement par le temps en mécanique. Ainsi ce qui joue le rôle

de la vitesse (un degré de liberté donc une vitesse) est $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ c'est-à-dire la dérivée totale de la coordonnée y par rapport au paramètre x . Par analogie

Mécanique	Principe de Fermat
S (action)	T (temps)
t (temps)	x (position horizontale)
q (position)	y (position verticale)
$\dot{q}$ (vitesse)	$\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ (pente dans le plan xy)
$L(q, \dot{q}, t)$ (lagrangien)	$L(y, \dot{y}, x)$ (inverse de la vitesse selon x)

On cherche à minimiser $T = \int_{x_1}^{x_2} L dx$ entre deux points fixes en comparant toutes les trajectoires $y(x)$, qui les relient. On calcule donc

$$\delta T = 0. \quad (3.72)$$

Le résultat est connu, c'est l'équation d'Euler-Lagrange pour le degré de liberté y (ici le seul avec le paramètre x)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (3.73)$$

Nous calculons donc, avec L défini ci-dessus

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\eta}{c} \frac{1}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} 2\dot{y} \\ &= \frac{\eta \dot{y}}{c\sqrt{1+\dot{y}^2}} \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\eta \ddot{y}}{c \sqrt{1 + \dot{y}^2}} + \frac{\dot{y}}{c \sqrt{1 + \dot{y}^2}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
&\quad + \frac{\eta \dot{y}}{c} \left(-\frac{1}{2} \right) (1 + \dot{y}^2)^{-\frac{3}{2}} 2 \dot{y} \ddot{y} \\
&= \frac{\eta \ddot{y}}{c \sqrt{1 + \dot{y}^2}} + \frac{\dot{y}}{c \sqrt{1 + \dot{y}^2}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
&\quad - \frac{\eta \dot{y}^2 \ddot{y}}{c (1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.75)
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + \dot{y}^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3.76)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{\eta \ddot{y}}{c \sqrt{1 + \dot{y}^2}} + \frac{\dot{y}}{c \sqrt{1 + \dot{y}^2}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\
- \frac{\eta \dot{y}^2 \ddot{y}}{c (1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{c} \sqrt{1 + \dot{y}^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (3.77)
\end{aligned}$$

et puisque c , $1 + \dot{y}^2$ et η ne sont jamais nuls, on peut simplifier en multipliant l'équation par $\frac{c}{\eta} \sqrt{1 + \dot{y}^2}$:

$$\ddot{y} - \frac{\dot{y}^2 \ddot{y}}{1 + \dot{y}^2} - \dot{y} \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (3.78)$$

Si l'indice de réfraction η est uniforme dans le milieu,

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0,$$

l'équation se réduit à

$$\ddot{y} - \frac{y^2 \ddot{y}}{1 + y^2} = 0. \quad (3.79)$$

et puisque $1 + y^2$ n'est pas nul

$$\ddot{y} (1 + y^2) - y^2 \ddot{y} = \ddot{y} = 0$$

Donc

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \text{const.}$$

c'est-à-dire, la trajectoire de lumière est une ligne droite dans ce milieu soit

$$y(x) = ax + b$$

où a et b sont des constantes d'intégration.

3.3 Problème à deux corps

C'est le système physique fermé le plus simple qui existe. Deux particules, de masses m_1 et m_2 , dont les positions instantanées sont $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ interagissent via un potentiel

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3.80)$$

pour respecter l'homogénéité de l'espace puisque

$$-V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \dots = 0$$

est le potentiel dû au reste de l'univers dans un système fermé. La force externe totale qui s'exerce sur le système fermé est nulle.

Ainsi leur lagrangien s'écrit (le lagrangien est additif)

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (3.81)$$

Opérons un changement de coordonnées définissant la coordonnée relative

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

et la coordonnée du centre de masse (voir figure 3.5)

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.82)$$

ainsi

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (3.84)$$

où rappelons-le $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ et donc

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.85)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.86)$$

Remplaçant dans le lagrangien nous obtenons

$$L = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (3.87)$$

où

$$M = m_1 + m_2 = \text{masse totale du système} \quad (3.88)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{masse réduite du système} \quad (3.89)$$

et le lagrangien se décompose en deux éléments qui ne sont pas reliés

$$L = L_{\text{CM}} + L_{\text{rel.}} \quad (3.90)$$

L_{CM} est simplement l'énergie cinétique globale du système (À noter que si $m_2 \gg m_1$ (par exemple le cas Soleil-Terre), alors $m \simeq m_1$, $L_{\text{rel.}} = L_{m_1}$) et

$$L_{\text{CM}} = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 \quad (3.91)$$

puisque $\mathbf{R}$ est une variable cyclique :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \mathbf{C} = \text{vecteur constant}$$

ou

$$M \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{C}. \quad (3.92)$$

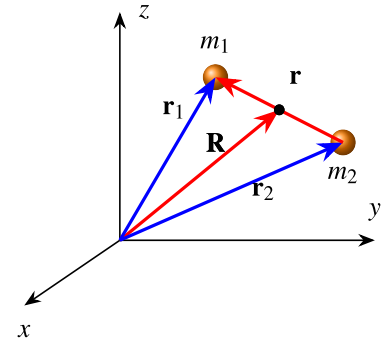


Figure 3.5 ▲
Problème à deux corps.

Le C.M. se déplace à vitesse constante. La deuxième partie, relative, est

$$L_{\text{rel.}} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (3.93)$$

apparaît comme le lagrangien d'une particule de masse m et de position $\mathbf{r}$. Aucune des deux particules n'a la masse m et $\mathbf{r}$ ne donne la position d'aucune des deux particules. L décrit le mouvement relatif entre les deux particules en le réduisant à un problème d'une seule particule (fictive), de masse m et de position $\mathbf{r}$. Parce qu'il peut se réduire de cette façon à un problème à un corps, le problème à deux corps peut avoir une solution analytique.

Le problème à N corps, ou $N > 2$, n'a pas de solution analytique. Le système est même chaotique.

3.4 Le potentiel central

Nous étudions ici un problème à un corps qui est aussi assimilable à celui d'une particule soumise à une force centrée à l'origine. (peut aussi être le problème du mouvement relatif dans un système à deux corps) Le lagrangien est de la forme

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \quad (3.94)$$

Dans bon nombre de cas, l'interaction ne dépendra que de la distance, soit entre les (deux) corps, soit entre le corps étudié et le

point d'origine de la force. On a alors $V(\mathbf{r}) = V(r)$ et la force est dans la direction $\mathbf{r}$. C'est le potentiel central.

Physiquement, si le problème de base est un problème à deux corps (voir figure 3.6) alors la force est purement dans la direction de la droite les reliant. C'est le cas de l'interaction gravitationnelle entre deux corps massifs ainsi que l'interaction coulombienne entre deux corps chargés.

Puisque ici la force est purement radiale (aucune composante θ et ϕ) le torque $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ s'exerçant sur la particule est identiquement nul et par conséquent le moment cinétique (voir figure 3.7),

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3.95)$$

est une constante du mouvement (ou intégrale première). En effet

$$\dot{\mathbf{l}} = m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \quad (3.96)$$

puisque $\mathbf{r}$ et $\mathbf{F}$ sont colinéaires. La conséquence physique est que le mouvement est dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{l}$ puisque

$$\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \text{vecteur constant}$$

et donc

$$\mathbf{l} \perp \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$$

signifie constant en grandeur et en direction.

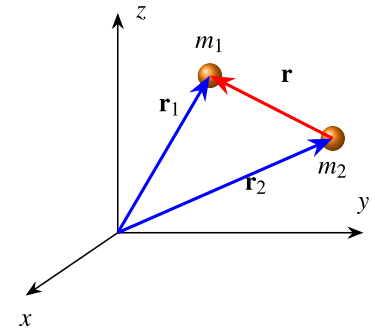


Figure 3.6 ▲

Le problème à deux corps se simplifie à celui d'une particule soumise à un potentiel central.

Choisissons ce plan comme étant le plan xOy , c'est-à-dire le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $\dot{\theta} = 0$. Le lagrangien se réduira (avec $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1$) à

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (3.97)$$

comme en coordonnées polaires. Immédiatement, on constate que φ est une variable cyclique et donc

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.98)$$

et donc

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = l,$$

une constante même si $r = r(t)$ et $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$.

On vérifie trivialement que cette constante l est précisément la longueur du moment cinétique qui pointe ici selon l'axe Oz . Comme l est une constante du mouvement, sa valeur est fixée par les conditions initiales. L'équation en r se calcule aussi :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = m\ddot{r} \quad (3.100)$$

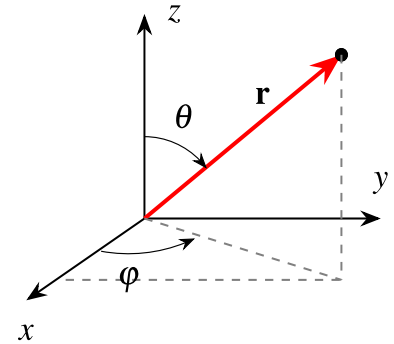


Figure 3.7 ▲

Le torque $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ s'exerçant sur la particule est identiquement nul et le moment cinétique $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ est une constante du mouvement.

donc

$$m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (3.101)$$

et toujours en φ : $m r^2 \dot{\varphi} = l$.

De l'équation en φ on tire

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{m r^2} \quad (3.102)$$

que l'on remplace dans l'équation en r

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (3.103)$$

ou

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{l^2}{m r^3} \equiv -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \quad (3.104)$$

où ici on a défini $V_{\text{eff}}(r)$ comme

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2m r^2}. \quad (3.105)$$

Tout se passe donc en r comme dans une équation à la Newton pour un système à un degré de liberté

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} = F_{\text{eff}}(r). \quad (3.106)$$

Ce potentiel efficace $V_{\text{eff}}(r)$ est constitué du potentiel original $V(r)$ une énergie cinétique de rotation $T_{z\text{-rot}}$ autour de l'axe des z ,

$$T_{z\text{-rot}} = \frac{l^2}{2mr^2} \text{ avec } I = mr^2$$

qui représente une répulsion centrifuge : un corps qui tourne par rapport à l'origine O est effectivement *repoussé* de l'origine (il ne peut pas l'atteindre) et plus il tourne rapidement, c'est-à-dire plus l est grand, plus il est *repoussé*.

3.4.1 Potentiel en r^{-1}

L'exemple de la figure 3.8 est pour $V = -\frac{K}{r}$ (gravitationnel ou électrostatique).

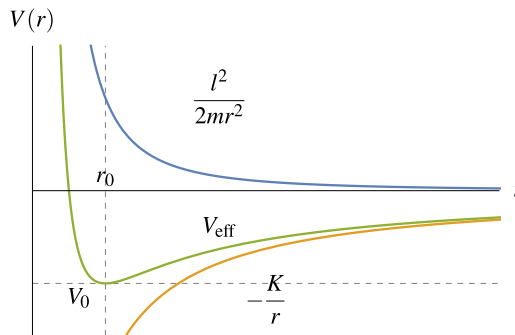


Figure 3.8 ◀▶

Potentiel efficace pour le cas de deux corps soumis à un potentiel gravitationnel ou électrostatique ($V = -\frac{K}{r}$).

On constate dans ce cas que

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (3.107)$$

a un extremum V_0 en r_0 qui obéit à

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \right|_{r_0} = \left[\frac{K}{r^2} - \frac{l^2}{mr^3} \right]_{r_0} = 0 \quad (3.108)$$

donc à

$$r_0 = \frac{l^2}{Km} \implies V_0 = -\frac{mK^2}{2l^2}. \quad (3.109)$$

Puisque

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \right|_{r_0} = 0 \implies m\ddot{r}|_{r_0} = 0 \quad (3.110)$$

ce qui correspond à une distance radiale constante $r = r_0$ donc $\dot{r} = 0$ donc $\ddot{r} = 0$. Autrement dit, aucune force radiale n'est exercée. Il s'agit d'un point stationnaire qui correspond physiquement à une orbite circulaire (seul φ varie) avec une vitesse angulaire constante

donnée par

$$\phi = \frac{l}{mr_0^2} = \text{constante} \quad (3.111)$$

$$\Downarrow \quad (3.112)$$

$$\phi(t) = \frac{l}{mr_0^2}t + \phi_0 = \frac{mK^2}{l^3}t + \phi_0 \quad (3.113)$$

avec

$$r_0 = \frac{l^2}{Km}$$

Ici, les conditions initiales ont fixé $r = r_0$, $E = V_0$, la valeur de l et de celle de ϕ_0 . Nous continuons d'avoir $\theta = \frac{\pi}{2}$ donc $\dot{\theta} = 0$.

Pour chaque intervalle de temps, la période τ , pour laquelle $\phi(t)$ augmente de 2π , nous complétons une orbite, donc l'expression précédente nous permet de déduire la période

$$\Delta\phi = \phi(\tau + t_0) - \phi(t_0) = 2\pi \quad (3.114)$$

$$= \frac{l}{mr_0^2}\tau = \frac{mK^2}{l^3}\tau \quad (3.115)$$

$$\Downarrow \quad (3.116)$$

$$\tau = \frac{2\pi l^3}{mK^2} = 2\pi \sqrt{\frac{mr_0^3}{K}} = \text{période.} \quad (3.117)$$

La fréquence est $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{mK^2}{2\pi l^3}$ et la fréquence angulaire de l'orbite circulaire est

$$\dot{\phi} = \omega = 2\pi\nu = \frac{mK^2}{l^3}. \quad (3.118)$$

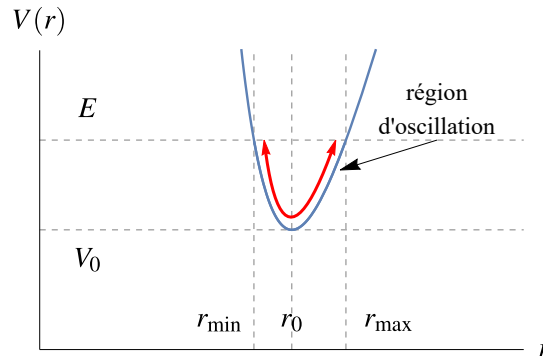


Figure 3.9 ◀▶

Oscillation autour de l'orbite circulaire.

Les conditions initiales pour que l'orbite soit précisément circulaire sont relativement peu probables. Étudions la situation lorsque l'orbite se dégage légèrement de ce cas particulier, c'est-à-

dire $E > V_0$, (série de Taylor)

$$V_{\text{eff}}(r) \simeq \underbrace{V_{\text{eff}}(r_0)}_{\text{constante}} + \underbrace{(r-r_0) \frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r}}_{=0} \bigg|_{r_0} + \frac{(r-r_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \bigg|_{r_0} \dots \quad (3.119)$$

Si r ne s'éloigne pas trop de r_0 , c'est le terme harmonique en $(r-r_0)^2$ qui va déterminer le mouvement par

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \quad \text{où} \quad V_{\text{eff}}(r) \sim (r-r_0)^2 \quad (3.120)$$

Ici, avec le choix particulier $V = -\frac{K}{r}$ que nous avons fait

$$k_{\text{eff}} = \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \bigg|_{r_0} = -\frac{2K}{r_0^3} + \frac{3l^2}{mr_0^4} = \frac{m^3 K^4}{l^6} \quad (3.121)$$

on obtient pour $V_{\text{eff}}(r)$

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \frac{(r-r_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \bigg|_{r_0} \quad (3.122)$$

et donc en terme des paramètres de $V(r)$

$$V_{\text{eff}}(r) \approx \frac{(r-r_0)^2}{2!} \frac{m^3 K^4}{l^6} = k_{\text{eff}} \frac{(r-r_0)^2}{2!} \quad (3.123)$$

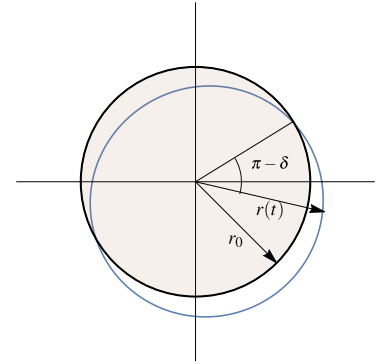


Figure 3.10 ▲

La fluctuation $r(t)$ autour de l'orbite circulaire $r = r_0$ correspond à un déplacement de A de l'orbite circulaire dans la limite $A/r_0 \ll 1$.

L'équation de mouvement en r est $m\ddot{r} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r}$. Nous calculons

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \approx (r - r_0) \frac{m^3 K^4}{l^6} \quad (3.124)$$

donc l'équation de mouvement donne

$$m\ddot{r} \approx -(r - r_0) \frac{m^3 K^4}{l^6} = -k_{\text{eff}}(r - r_0). \quad (3.125)$$

Définissant $u(t) = r(t) - r_0$, nous obtenons ($\ddot{r} = \ddot{u}$) (voir figure 3.9)

$$m\ddot{u} = -\frac{m^3 K^4}{l^6} u = -k_{\text{eff}} u \quad (3.126)$$

ou

$$\ddot{u} = -\frac{m^2 K^4}{l^6} u = -\frac{k_{\text{eff}}}{m} u = -\Omega^2 u \quad (3.127)$$

qui correspond à l'équation harmonique qui a comme solution

$$u(t) = r(t) - r_0 = A \sin(\Omega t + \delta) \quad (3.128)$$

où $r(t)$ apparaît comme une constante, r_0 , plus une fluctuation d'amplitude A et

$$r(t) = r_0 + A \sin(\Omega t + \delta) \quad (3.129)$$

avec

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \frac{mK^2}{l^3}$$

la fréquence angulaire de la fluctuation $u(t)$ et

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \left(\frac{l^3}{mK^2} \right)$$

la période de ces mêmes fluctuations.

Cette fréquence de fluctuation de r autour de r_0 se fait à la même fréquence que la rotation sur l'orbite circulaire puisque $u(t)$ mesure la variation ou fluctuation de $r(t)$ autour de r_0 . Ceci est caractéristique du choix particulier $V(r) = -\frac{K}{r}$ que nous avons fait. On dit d'un tel potentiel qu'il génère des orbites stables.

Cette fluctuation de $r(t)$ autour de r_0 cause un étirement de l'orbite à une des extrémités et un écrasement à l'autre extrémité opposée (voir figure 3.10). De plus comme $\Omega = \omega$, le mouvement de fluctuation est synchronisé avec la rotation et la particule revient au même point. Les coordonnées sont alors

$$\begin{aligned} x &= r_0 \cos \omega t &\Rightarrow & x = (r_0 + A \sin(\omega t + \delta)) \cos \omega t \\ y &= r_0 \sin \omega t &\Rightarrow & y = (r_0 + A \sin(\omega t + \delta)) \sin \omega t \end{aligned}$$

ce qui se traduit par une légère déformation de la trajectoire circulaire dans une direction si $0 < A/r_0 \ll 1$. Dans la limite où $A/r_0 \ll 1$,

l'orbite est à toute fin pratique circulaire mais son centre est déplacé par rapport à l'orbite originale d'une distance A . C'est la première déformation de la trajectoire alors que l'on sait la trajectoire *normale* des planètes être elliptique. Ce sont les termes asymétriques de $V_{\text{eff}}(r)$, dont le premier est

$$\frac{(r-r_0)^3}{3!} \frac{\partial^3 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^3} \Big|_{r_0} \quad (3.130)$$

qui seront responsables de ce déplacement vers des trajectoires exactement elliptiques.

Dans la démarche précédente, nous avons utilisé dès le début la conservation du moment cinétique en l'absence de torque. Le problème s'en trouvait simplifié puisqu'il était toujours possible de ramener le problème à un mouvement dans le plan xOy . Toutefois, on devrait obtenir la même solution sans faire appel à la notion de force.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r) \quad (3.131)$$

En φ

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.132)$$

et donc

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = l_z,$$

la composante z du moment cinétique étant constante. Contrairement au cas précédent cela ne signifie pas que la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est constante si r est constant. En θ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = mr^2 \left(\frac{l_z}{mr^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \quad (3.133)$$

$$= \frac{l_z^2 \cos \theta}{mr^2 \sin^3 \theta} \quad (3.134)$$

et donc $\ddot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta} \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2 \ddot{\theta},$$

et

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{l_z}{mr^2} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

On se rend compte que même pour r constant, la solution nécessite de résoudre deux équations différentielles couplées en θ et en ϕ . La solution reste de la même forme puisqu'on a affaire à une particule de masse tournant à vitesse constante autour du centre (moment cinétique constant, aucun torque) sauf que l'orbite est inclinée par rapport au plan xOy et $\mathbf{l}$ ne pointe pas nécessairement dans la direction des z .

3.4.2 Potentiel en r^{-n}

Imaginons maintenant un potentiel de la forme

$$V(r) = -\frac{K}{r^n}$$

où $n \in \mathbb{Z}$ correspondant à une force

$$F(r) = \frac{nK}{r^{n+1}}.$$

On obtient

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{K}{r^n} + \frac{l^2}{2mr^2} \quad (3.135)$$

$V_{\text{eff}}(r)$ possède un extremum V_0 en r_0 qui obéit à

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(r)}{\partial r} \right|_{r_0} = \left[\frac{nK}{r^{n+1}} - \frac{l^2}{mr^3} \right]_{r_0} = 0 \quad (3.136)$$

donc à

$$r_0 = \left(\frac{l^2}{nKm} \right)^{\frac{1}{2-n}} \implies V_0 = -K \left(\frac{l^2}{nKm} \right)^{\frac{n}{n-2}}. \quad (3.137)$$

Ici, avec le choix particulier $V = -\frac{K}{r^n}$ que nous avons fait

$$k_{\text{eff}} = \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(r)}{\partial r^2} \right|_{r_0} = Kn(2-n) \left(\frac{l^2}{nKm} \right)^{\frac{n+2}{n-2}} \quad (3.138)$$

Comme dans l'exemple précédent, en définissant $u(t) = r(t) - r_0$, nous obtenons ($\dot{r} = \dot{u}$)

$$\ddot{u} = -\frac{k_{\text{eff}}}{m}u = -\Omega^2 u \quad (3.139)$$

avec la fréquence angulaire de la fluctuation $u(t)$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \left(\frac{Kn(2-n)}{m} \left(\frac{l^2}{nKm} \right)^{\frac{n+2}{n-2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et la période des fluctuations

$$\tau_r = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \left(\frac{Kn(2-n)}{m} \left(\frac{l^2}{nKm} \right)^{\frac{n+2}{n-2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Rappelons que

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr_0^2} = \text{constante} \quad (3.140)$$

$$\Downarrow \quad (3.141)$$

$$\varphi(t) = \frac{l}{mr_0^2}t + \varphi_0 \quad (3.142)$$

avec

$$r_0 = \left(\frac{l^2}{nKm} \right)^{\frac{1}{2-n}}$$

Donc pour un intervalle de temps correspondant à la moitié de la période τ_r , c'est-à-dire le temps que prend r pour passer de $r_{\min}$ à $r_{\max}$, la masse s'est déplacée d'un angle ψ appelé *angle apsidal*

$$\begin{aligned} \psi &= \varphi(t = \frac{\tau_r}{2}) \quad \tau_r = \text{période d'oscillation du rayon orbital} \\ &= \frac{l}{mr_0^2} \cdot \left(\frac{\tau_r}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2-n}} \end{aligned}$$

Définition 3.1

Angle Apsidal

Déplacement angulaire dans l'orbite pendant la moitié de la période de fluctuation du rayon de l'orbite τ_r , c'est-à-dire le temps que prend r pour passer de $r_{\min}$ à $r_{\max}$. 

Remarque 3.2

 Puisque pendant une demi-oscillation dans le rayon orbital, l'orbite sera modifiée d'un angle ψ , tout orbite fermée requiert que le dénominateur soit un entier naturel $j = \sqrt{2-n} \in \mathbb{N}^*$. Qui

plus est, pour qu'il y ait force de rappel, il faut que

$$k_{\text{eff}} > 0$$

donc $n < 2$. Les valeurs permises sont donc

$$\begin{aligned} n &= -j^2 + 2 \quad j = 1, 2, 3, 4, \dots \\ &= 1, -2, -7, -14, \dots \end{aligned}$$

n	Loi de puissance de $V(r)$	Force $F(r)$	Angle apsidal ψ	Nombre de lobes j
1	$-\frac{K}{r}$	$\frac{K}{r^2}$	π	1
-2	$-Kr^2$	$2Kr^1$	$\pi/2$	2
-7	$-Kr^7$	$7Kr^6$	$\pi/3$	3
-14	$-Kr^{14}$	$14Kr^{13}$	$\pi/4$	4
-23	$-Kr^{23}$	$23Kr^{22}$	$\pi/5$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2 - j^2$	$-Kr^{j^2-2}$	$(j^2 - 2)Kr^{j^2-3}$	π/j	j



Toute autre loi de puissance mène à des orbites instables. La

masse ne repasse jamais dans la même trajectoire. Celle-ci passe éventuellement par tous les points entre $r_{\min}$ à $r_{\max}$.

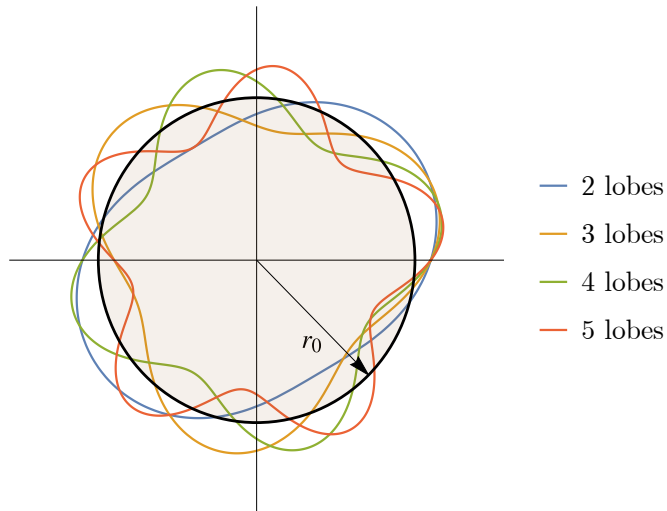
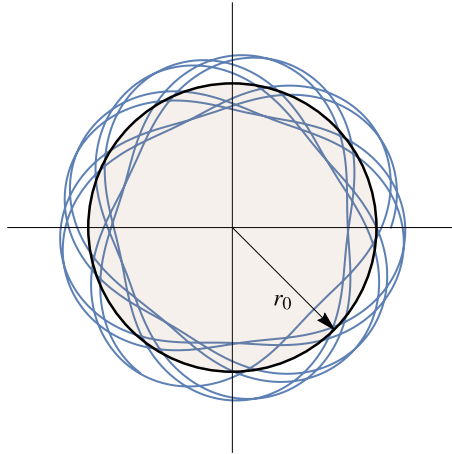


Figure 3.11 ◀▶

Orbites avec 2, 3, 4, 5 lobes pour $V(r) = -K/r^{-n}$ avec $n = -2, -7, -14, -23$.

**Figure 3.12** ◀▶

Exemple d'orbite non stable pour $V(r) = -K/r^{-n}$ avec $n = -3$ où l'angle apsidal est $\psi = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

Si on généralise le potentiel à une puissance quelconque α ($n \rightarrow \alpha$)

$$V(r) = -\frac{K}{r^\alpha}$$

il est possible de trouver des orbites stables d'un autre type où l'angle apsidal est une fraction de π

$$\psi = \frac{\pi}{\sqrt{2-\alpha}} = \frac{p}{q}\pi$$

tel que

$$\frac{p}{q} > 1$$

Un particule dans une telle orbite devra effectuer p tours pour revenir à sa position initiale. Pendant ce temps, il y aura q fluctuations de l'orbite.

3.5 Exercices

3.1 Champ électromagnétique

Dans un système d'axes orthonormés, on veut étudier le mouvement d'une particule de masse m , de charge électrique q_e , plongée dans des champs électrique $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ et magnétique $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ uniformes, constants et orthogonaux. Nous choisirons comme coordonnées généralisées les trois coordonnées cartésiennes $\mathbf{r} = (x, y, z)$ de la particule. Nous allons vérifier que l'expression suivante, où U est le potentiel scalaire et $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur, est effectivement un potentiel généralisé.

$$V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = q_e (U(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))$$

Lagrangiens et intégrales premières

- Donner l'expression de la force de Lorentz, qui est supposée la seule force agissant sur la particule.
- Calculer le potentiel scalaire $U(\mathbf{r})$.
- Montrer qu'on peut choisir un potentiel vecteur indifféremment de la forme $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$ ou $\mathbf{A} = (0, xB, 0)$ ou encore la demi-somme des deux qu'on peut écrire $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B})$. Ces formules sont d'une grande utilité pratique pour le physicien.

- (d) À l'aide de la première expression de $\mathbf{A}$, vérifier que le potentiel généralisé associé au champ électromagnétique s'écrit $V = q_e(\dot{x}yB - xE)$. Écrire le lagrangien L de la particule dans le champ électromagnétique. Vérifier que z est une coordonnée cyclique ; donner l'intégrale première correspondante. Dédire les équations d'Euler-Lagrange pour les variables x et y .
- (e) À l'aide de la seconde expression, vérifier que le potentiel généralisé associé au champ électromagnétique s'écrit $V = -q_e(x\dot{y}B + xE)$. Écrire le lagrangien L' de la particule dans le champ électromagnétique. Vérifier que y et z sont des coordonnées cycliques ; donner les intégrales premières correspondantes. Étaient-elles prévisibles d'après la question précédente ?
- (f) Vérifier que la différence des deux lagrangiens L et L' est la dérivée totale, par rapport au temps, d'une fonction des coordonnées.

Champ électrique nul

Pour le moment, on suppose un champ électrique nul : $E = 0$.

- (g) De ces quantités conservées, déduire les équations différentielles du premier ordre en temps pour les trois coordonnées. Intégrer ces équations. Il sera utile d'introduire la pulsation cyclotron $\omega = q_e B / m$. Caractériser

le mouvement projeté dans le plan perpendiculaire au champ magnétique et le long de celui-ci. On appelle ce mouvement le mouvement cyclotron.

Cas général

On revient à présent au cas général $E \neq 0$.

- (h) Intégrer les équations du mouvement. Montrer que si l'on se place dans un référentiel se mouvant avec la vitesse $-E/B$ le long de l'axe perpendiculaire à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$, la particule se déplace selon le mouvement cyclotron étudié à la question précédente. C'est ce qu'on appelle un mouvement de dérive.
- (i) Le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps ; il existe une intégrale première associée à la translation dans le temps. Donner celle-ci.

3.2 Pendule et ressorts

Le point de suspension d'un pendule de masse m et de longueur constante l peut se déplacer selon un axe horizontal. Deux ressorts de constante de rappel $k/2$ exercent une force nette de restitution $-kx$ sur le point de suspension (voir figure 3.13).

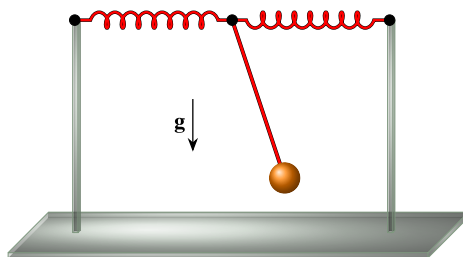


Figure 3.13 ◀
Problème 3.2.

- (a) Écrivez les équations du mouvement.
 (b) En supposant de faibles oscillations, démontrez que ce système est équivalent à un pendule simple de longueur.

$$l' = l + \frac{mg}{k}$$

3.3 Particule dans un cône

Une particule de masse m est soumise à la gravité et contrainte à se déplacer sur la surface d'un cône vertical inversé (voir figure 3.14)

- (a) Écrivez les équations du mouvement.
 (b) À partir de la notion de potentiel effectif :

$$F = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r}$$

trouvez le point stationnaire r_0 .

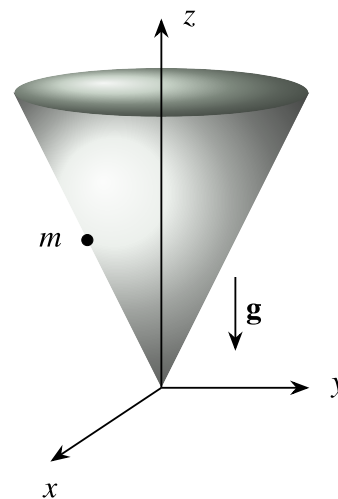


Figure 3.14 ▲
Problème 3.3.

3.4 Problème 1.1 revisité

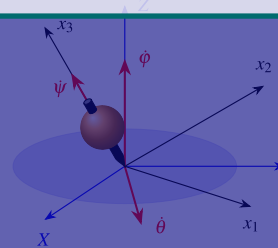
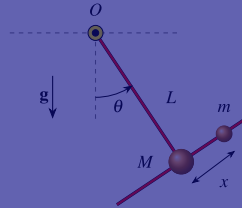
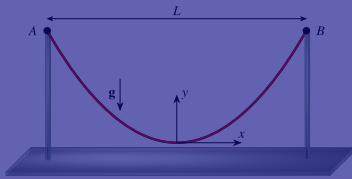
Utilisez la méthode lagrangienne pour le Problème 1.1.

3.5 Problème 1.2 revisité

Utilisez la méthode lagrangienne pour le Problème 1.2.



FORMALISME CANONIQUE



Chapitre 4

4.1	Transformation de Legendre	191
4.2	L'hamiltonien	193
4.3	Quelques exemples	202
4.4	Crochets de Poisson	212
4.5	Moments généralisés	220
4.6	Transformations canoniques	225
4.7	La méthode de Hamilton-Jacobi	262
4.8	L'énergie cinétique $T(q_i, p_i)$ en coordonnées généralisées	290
4.9	Interprétation de la fonction S	293
4.10	Mécanique ondulatoire	295
4.11	L'espace des phases	307
4.12	Variables angles-actions	

LE FORMALISME CANONIQUE n'introduit pas une nouvelle physique mais nous propose une nouvelle gamme d'outils pour étudier les phénomènes physiques. Son élément central, l'hamiltonien, joue un grand rôle en mécanique quantique. Comme dans le formalisme de Lagrange nous travaillerons

avec des quantités comme l'énergie, T et V , plutôt qu'avec des quantités vectorielles comme la force $\mathbf{F}$ de Newton. Ici encore le formalisme sera invariant de forme.

Dans le formalisme de Lagrange, la description d'un système mécanique à n degrés de liberté décrits par les coordonnées généralisées q_i | $i = 1, 2, \dots, n$ indépendantes (non contraintes) nous mène à n équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (4.1)$$

qui sont des *équations différentielles du 2^{ième} ordre*.

Dans le formalisme canonique, ou de Hamilton, un système mécanique à n degrés de liberté toujours décrits par des q_i indépendants nous mènera à *$2n$ équations du premier ordre*.

Chez Lagrange on compare des trajectoires et par conséquent les q_i et les $\dot{q}_i$ sont tous indépendants (tant que nous n'avons pas résolu les équations d'Euler-Lagrange qui choisissent la trajectoire extremum). Chez Hamilton nous devons d'abord apprendre à définir les moments généralisés, les p_i , pour *remplacer* les $\dot{q}_i$, et qui eux aussi resteront indépendants entre eux et indépendants des q_i .



Figure 5.2 ▲

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

Remarque 4.1

i Rappel historique : Sir William Rowan Hamilton

La méthode est due à Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), physicien et mathématicien irlandais. En plus de ses travaux en mécanique, il a inventé les quaternions et a découvert la loi anticommutative pour les produits vectoriels. Il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre.



4.1 Transformation de Legendre

Cette transformation est souvent utilisée en thermodynamique où elle permet de relier entre eux les différents *potentiels* thermodynamiques. En mécanique elle permet de définir l'hamiltonien à partir du lagrangien. Nous en donnons une description simplifiée.

Soit une fonction $f(u, v)$ où u et v sont les deux variables indépendantes dont dépend f . Définissons

$$w = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = w(u, v). \quad (4.2)$$

La transformation de Legendre permet de définir une fonction $g(u, w)$ qui peut remplacer $f(u, v)$:

$$f(u, v) \mapsto g(u, w) = v \cdot w - f. \quad (4.3)$$

On vérifie facilement la chose. En effet

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial u} du + w dv. \quad (4.4)$$

De la définition de g nous calculons

$$\begin{aligned} dg &= w dv + v dw - df \\ &= w dv + v dw - \frac{\partial f}{\partial u} du - w dv \\ &= v dw - \frac{\partial f}{\partial u} du \implies g = g(u, w) \end{aligned} \quad (4.5)$$

ce qui confirme que g est bien fonction de u et de w . Pour opérationnaliser cette transformation et la disparition de v dans g on doit, à partir de la définition de w

$$w = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = w(u, v) \quad (4.6)$$

pouvoir l'inverser en $v = v(u, w)$

$$g(u, w) = wv(u, w) - f(u, v(u, w)). \quad (4.7)$$

Puisque g est fonction de u et w

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial w} dw \quad (4.8)$$

et on identifie avec l'expression pour dg plus haut

$$v = \frac{\partial g}{\partial w}, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u}. \quad (4.9)$$

4.2 L'hamiltonien

Posons un lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ que nous traiterons comme la fonction f ci-dessus avec les q_i jouant le rôle de u et les $\dot{q}_i$ le rôle de v . Schématiquement, nous aurons

$$\begin{aligned} L(q_i, \dot{q}_i, t) &\Longleftrightarrow f(u, v) \\ q_i &\Longleftrightarrow u \\ \dot{q}_i &\Longleftrightarrow v \\ p_i \left(\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) &\Longleftrightarrow w \left(= \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ H(q_i, p_i, t) &\Longleftrightarrow g(u, w) \end{aligned}$$

À la place de w , nous définissons les moments généralisés (moments canoniques)

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_j, \dot{q}_j, t) ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

un système de n équations que, comme pour v et w , nous devons pouvoir inverser pour obtenir les n relations

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t) ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

Nous définissons donc, en analogie avec g , une fonction des q_i et des p_i que nous noterons $H(q_i, p_i, t)$

$$\begin{array}{ccc} g(u, w) & = & v \cdot w - f \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ H(q_i, p_i, t) & = & \sum_i^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \end{array}$$

dans laquelle l'expression $\dot{q}_i$ est présumé être $\dot{q}_i(q_i, p_i, t)$.

De

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

on calcule dH à partir de sa définition

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i^n \dot{q}_i dp_i + \sum_i^n p_i d\dot{q}_i - \underbrace{\sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n p_i d\dot{q}_i}_{dL} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i^n \dot{q}_i dp_i - \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (4.13)$$

ce qui vérifie que H est fonction des q_i , des p_i (et de t). On peut donc écrire

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

et comme les q_i et p_i sont indépendants on identifie, en comparant nos deux expressions pour dH

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= -\frac{\partial L}{\partial q_i} ; \quad n \text{ équations} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i ; \quad n \text{ équations} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si H ne dépend pas du temps, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. On sait que la trajectoire physique obéit à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \quad (4.15)$$

et ainsi les $2n$ équations ci-dessus se liront

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad 2n \quad (4.16)$$

ce sont nos $2n$ équations canoniques du mouvement. Ce sont des équations différentielles du premier ordre et on voit que les q_i et les p_i y sont traités de façon beaucoup plus symétrique que ne l'étaient les q_i et les $\dot{q}_i$ dans l'équation d'Euler-Lagrange. L'apparition du signe moins ($-$) entre les équations pour les q_i et celles pour leurs moments conjugués, s'appelle une symétrie symplectique. Les $2n$ équations canoniques remplacent les n équations d'Euler-Lagrange.

De

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

on peut calculer, sur une trajectoire qui obéit aux équations canoniques,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= - \sum_i^n \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_i^n \dot{q}_i \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ainsi, H est une constante du mouvement (ou intégrale première) à moins de dépendre explicitement du temps, c'est-à-dire à moins qu'un agent extérieur n'agisse sur le système étudié et ce de façon non constante dans le temps.

Définition 4.1**i Conditions pour $H = \text{constante}$ du mouvement**

Si H ne dépend pas explicitement du temps alors c'est une constante du mouvement (ou intégrale première). **i**

4.2.1 L'espace des phases

Une fois les équations canoniques solutionnées, l'état d'un système à un instant t peut être représenté par un point

$$X(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

dans un espace à $2n$ dimensions, appelé l'espace des phases. L'espace des phases est un outil omniprésent en physique théorique notamment en physique statistique. Il est associé à tout un ensemble de propriétés formelles des systèmes dynamiques. Un système occupera alors seulement certaines valeurs pour chacun des couples des variables canoniques (q_i, p_i) qu'il est possible de visualiser sur un *portrait de phase*, c'est-à-dire un graphique des valeurs possibles de (q_i, p_i) .

Considérons un hamiltonien

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

indépendant du temps, $H = E$ où E est une constante du mouvement.

Alors, toute solution doit obéir à

$$p = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}.$$

et il devient possible de tracer les courbes de p en fonction de q pour chaque valeurs de E .

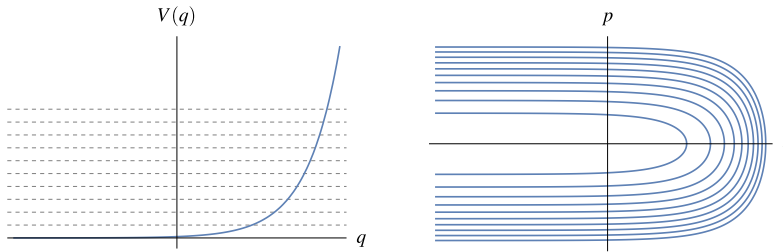
Exemple 4.1

Potentiel exponentiel

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)$$

indépendant du temps, $H = E$ où E est une constante du mouvement. Posant $m = 1$, $V_0 = .1$ et $q_0 = 1$, on obtient les courbes pour des valeurs arbitraires de l'énergie E

$$p = \pm \sqrt{2m \left(E - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right) \right)}.$$



Potentiel et espace de phase pour $V(q) = V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)$.



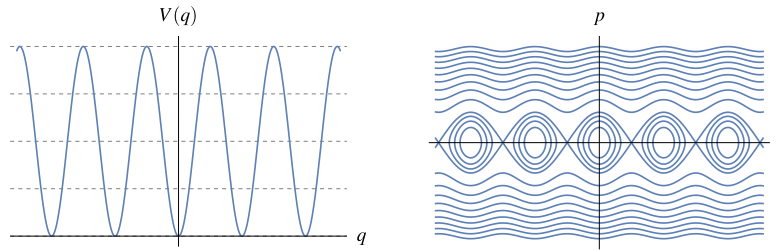
Exemple 4.2

Potentiel sinusoïdal

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \sin^2\left(\frac{q}{q_0}\right)$$

indépendant du temps, $H = E$ où E est une constante du mouvement. Posant $m = 1$, $V_0 = .1$ et $q_0 = 1$, on obtient les courbes pour des valeurs arbitraires de l'énergie E

$$p = \pm \sqrt{2m \left(E - V_0 \sin^2\left(\frac{q}{q_0}\right) \right)}.$$



Potentiel et espace de phase pour $V(q) = V_0 \sin^2\left(\frac{q}{q_0}\right)$.



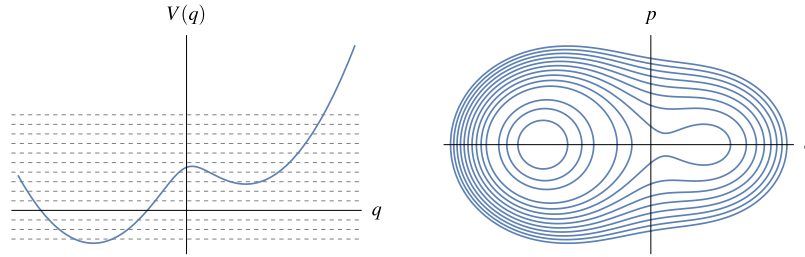
Exemple 4.3

Potentiel à 2 minima

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{V_0}{2} \left(\sqrt{q^2 + 1} - 4 \right)^2 + \frac{q}{q_0}$$

indépendant du temps, $H = E$ où E est une constante du mouvement. Posant $m = 1$, $V_0 = .1$ et $q_0 = 1$, on obtient les courbes pour des valeurs arbitraires de l'énergie E

$$p = \pm \sqrt{2m \left(E - \frac{V_0}{2} \left(\sqrt{q^2 + 1} - 4 \right)^2 + \frac{q}{q_0} \right)}.$$



Potentiel et espace de phase pour $V(q) = \frac{V_0}{2} \left(\sqrt{q^2 + 1} - 4 \right)^2 + \frac{q}{q_0}$.



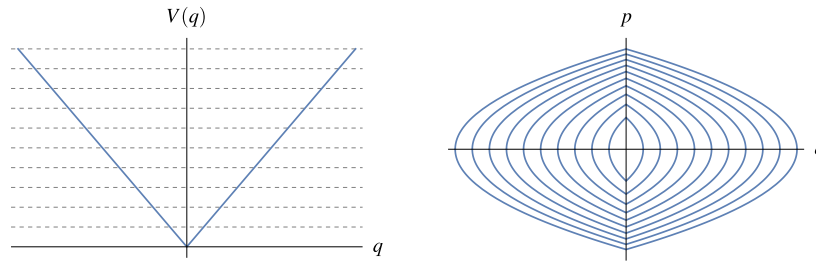
Exemple 4.4

Potentiel en V

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 |q|$$

indépendant du temps, $H = E$ où E est une constante du mouvement. Posant $m = 1$, $V_0 = .1$ et $q_0 = 1$, on obtient les courbes pour des valeurs arbitraires de l'énergie E

$$p = \pm \sqrt{2m(E - V_0 |q|)}.$$



Potentiel et espace de phase pour $V(q) = V_0 |q|$.



4.3 Quelques exemples

4.3.1 Particule soumise à une force en une dimension

Exemple 4.5

◆ Soit une particule de masse m se déplaçant en une dimension (disons x) et soumise à une force $F = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Nous savons que son lagrangien est

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x). \quad (4.18)$$

Nous n'aurons qu'un seul moment, noté p , conjugué à x et défini par

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad (4.19)$$

équation que nous pouvons (on doit pouvoir le faire) inverser

$$\dot{x} = \frac{p}{m}. \quad (4.20)$$

On note qu'ici le moment p correspond à la composante x de la définition élémentaire $p = mv$. Ce ne sera pas toujours trivialement le cas. Selon la définition de H

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}(p)p - L(x, \dot{x}(p)) \\ &= \frac{p}{m} \cdot p - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 + V(x) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V(x) \end{aligned} \quad (4.21)$$

que l'on écrit souvent

$$H = T + V \quad (4.22)$$

où T est l'énergie cinétique exprimée en fonction des moments. Ici, H est indépendant du temps et est égal à l'énergie totale, une constante du mouvement (ou intégrale première).



4.3.2 Particule soumise à une force en trois dimensions

Exemple 4.6

❖ Comme les énergies, H est additif. Ainsi pour une particule de masse m se déplaçant en trois dimensions sous l'influence d'une force $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ nous obtiendrons, de

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \quad (4.23)$$

que

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \quad (4.24)$$

Ainsi les équations canoniques donneront (nous regardons celle en x seulement)

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad (4.25)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.26)$$

Trivialement, redérivant par rapport au temps (4.25)

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} \quad (4.27)$$

et utilisant alors (4.26) nous obtenons

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} \implies \ddot{x} = -\frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{m} (\nabla V)_x = \frac{1}{m} F_x \quad (4.28)$$

qui n'est autre que l'équation de Newton. On vérifie trivialement la même chose pour y et z . De plus, les moments p_x, p_y, p_z soit ici les trois composantes de $m\mathbf{v}$. 

4.3.3 Particule dans un champ central

Exemple 4.7

 La forme des équations canoniques ne dépend pas du choix qui a été fait des coordonnées généralisées, les q_i , choix qui influencera la signification et même les dimensions des p_i . Rappelons le cas étudié plus tôt d'une particule dans un champ central $V(r)$ et dont le mouvement sera limité à un plan que nous choisissons être $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou le plan xOy . Le lagrangien se réduit à

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r). \quad (4.29)$$

Nous avons vu que les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$mr^2 \dot{\phi} = l = \text{constante}, \quad (4.30)$$

puisque φ est cyclique

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (4.31)$$

(après remplacement de $\dot{\varphi}$). Nos moments généralisés seront

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (4.32)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} \quad (4.33)$$

que l'on peut inverser en

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

où on voit que p_r et p_φ n'ont même pas les mêmes dimensions !
On construit H selon la formule générale

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L \quad (4.34)$$

qui donne ici

$$\begin{aligned} H &= \dot{r}p_r + \dot{\varphi}p_\varphi - \frac{m}{2} [(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)] \\ &= \frac{p_r}{m}p_r + \frac{p_\varphi}{mr^2}p_\varphi - \frac{m}{2} \left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2 + r^2 \left(\frac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2 \right] + V(r) \quad (4.35) \end{aligned}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) \quad (4.36)$$

Ici φ est variable cyclique donc

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \implies p_\varphi = \text{constante} \quad (4.37)$$

où on voit que dans ce formalisme une variable cyclique, en plus d'être (automatiquement) *éliminée*, *éliminera* aussi son moment conjugué qui sera une constante. Deux des variables de H sont ainsi éliminées, ce qui n'est pas le cas dans le formalisme de Lagrange. Les équations pour r et p_r sont

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad (4.38)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (4.39)$$

Si on veut comparer avec Euler-Lagrange, on dérive par rapport au temps (4.38)

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m}$$

et on compare p_r avec (4.39)

$$m\ddot{r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Rappelant le résultat précédent (3.103) obtenu avec l'équation d'Euler -Lagrange

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (4.40)$$

l'identification est immédiate avec $p_\phi = l$.



On voit que, comme dans le cas de Lagrange, le formalisme canonique est invariant de forme, c'est-à-dire il prend à son compte la cuisine algébrique qui entoure le choix de coordonnées généralisées dont les propriétés géométriques et dimensionnelles peuvent être quelconques.

Les exemples ci-dessus donnent tous

$$H(q_i, p_i) = T(q_i, p_i) + V(q_i), \quad (4.41)$$

c'est-à-dire l'hamiltonien est la somme de $T + V$ du système. Cette

forme de $H = T + V$ demeurera est possible seulement si entre autres, les interactions qui apparaissent dans le lagrangien ne dépendent pas des vitesses comme dans le cas de l'interaction électromagnétique par exemple.

Définition 4.2

i Conditions pour que $H(q_i, p_i)$ soit identifiable à l'énergie $T + V$

$H(q_i, p_i)$ est identifiable à l'énergie $T + V$ si seulement si la fonction est dérivée de contraintes scléronomes (contraintes indépendantes du temps) et que l'énergie potentielle ne dépend pas des vitesses généralisées.

i

On peut facilement imaginer un contre-exemple où les $\{q_i\}$ ont été obtenues de coordonnées inertielles par une transformation dépendant du temps.

Exemple 4.8

i Le cas suivant en est un exemple (voir figure 4.2). Soit une bille contrainte de se déplacer sur une boucle circulaire (disons centrée à l'origine) et qui elle-même tourne autour de l'axe Oz avec une fréquence angulaire ω , entraînée par un moteur (extérieur).

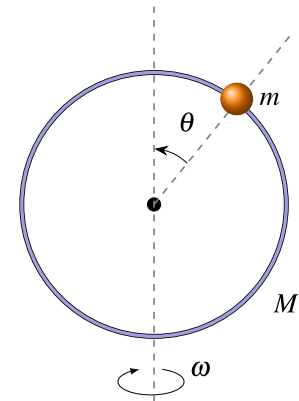


Figure 4.2 ▲

Bille contrainte de se déplacer sur une boucle circulaire.

A priori, on peut écrire, en coordonnées sphériques

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (4.42)$$

mais ici $r = a$ est le rayon de la boucle, donc $\dot{r} = 0$ et de plus $\phi = \omega t$ donc $\dot{\phi} = \omega = \text{constante}$. Donc

$$T = \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta), \quad (4.43)$$

et il n'y a qu'un seul degré de liberté, θ . En l'absence d'autre interaction $L = T$, c'est-à-dire

$$L = \frac{ma^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta), \quad (4.44)$$

et de

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} \quad (4.45)$$

on trouve

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} - \frac{ma^2}{2}\omega^2 \sin^2 \theta. \quad (4.46)$$

Ici H ne dépend pas du temps, c'est donc une constante du mouvement mais on ne peut pas l'identifier à l'énergie physique de la

particule parce que en posant

$$\varphi = \omega t \quad (4.47)$$

on fait l'équivalent d'une transformation de coordonnées dépendant du temps. En fait on se retrouve dans un repère non inertiel puisqu'il tourne donc est accéléré par rapport au laboratoire (que nous considérons inertiel). 

Exercice 4.1

 Obtenez les équations du mouvement. 

Que H représente l'énergie physique ou non, il peut être une constante du mouvement.

Définition 4.3

Conditions pour $H = \text{constante du mouvement}$

Si H ne dépend pas explicitement du temps alors c'est une constante du mouvement (ou intégrale première). 

4.4 Crochets de Poisson

4.4.1 Définition

Le crochet de Poisson $\{A, B\}_{q,p}$ est la façon standard de noter une certaine opération qui implique les quantités $A(q_i, p_i)$ et $B(q_i, p_i)$ ainsi que l'ensemble de variables canoniques (q_i, p_i)

$$\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_i^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right] \quad (4.48)$$

Considérons une fonction quelconque $F(q_i, p_i, t)$. Sa dérivée totale par rapport au temps le long d'une trajectoire s'écrit

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i^n \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (4.49)$$

Si cette trajectoire est une trajectoire physique, elle obéit aux équations canoniques de l'hamiltonien H du système

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.50)$$

et alors

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_i^n \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

En particulier, cette équation permet un calcul *facile* des constantes du mouvement,

$$\frac{dF}{dt} = 0.$$

En effet, le calcul de $\frac{\partial F}{\partial t}$ est immédiat et le calcul de $\{F, H\}$ est un simple exercice.

Remarque 4.2

i Comme on le voit, le crochet de Poisson $\{F, H\}$ peut être identifié à la dérivée totale dF/dt lorsqu'il n'y a pas de dépendance explicite de F p/r au temps ($\partial F/\partial t = 0$). **i**

Remarque 4.3

i Certains auteurs exigent $\partial F/\partial t = 0$ et $\{F, H\} = 0$ pour appeler F une constante du mouvement (ou intégrale première), une définition plus restrictive que celle que nous adoptons. **i**

Ainsi donc, on calcule facilement $\partial F/\partial t$. Par exemple, si F ne dépend pas explicitement du temps c'est-à-dire $\partial F/\partial t = 0$ alors $F(q_i, p_i)$ est une constante du mouvement si son crochet de Poisson

avec H est nul.

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\} \quad (4.52)$$

$$\text{Si } \{F, H\} = 0 \implies \frac{dF}{dt} = 0. \quad (4.53)$$

Ceci permet d'identifier rapidement bon nombre de constantes du mouvement.

Par exemple, nous avons déjà vu que la conservation du moment angulaire

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

implique

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

a comme conséquence que le mouvement est dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{l}$. L'inverse n'est pas vrai cependant. Considérons un mouvement dans le plan xOy d'une particule obéissant à l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y). \quad (4.54)$$

Sous quelles conditions le moment angulaire $\mathbf{l}$ sera-t-il constant ? Ici, $\mathbf{l}$ n'a qu'une composante, soit l_z où

$$l_z = xp_y - yp_x. \quad (4.55)$$

Or l_z ne dépend pas explicitement du temps donc $\partial l_z / \partial t = 0$

$$\begin{aligned} \dot{l}_z &= \{l_z, H\} \\ &= \frac{\partial l_z}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} + \frac{\partial l_z}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial l_z}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial l_z}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

On calcule

$$\frac{\partial l_z}{\partial x} = p_y, \quad \frac{\partial l_z}{\partial y} = -p_x, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial p_x} = -y, \quad \frac{\partial l_z}{\partial p_y} = x \quad (4.58)$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (4.60)$$

et on obtient

$$\dot{l}_z = \frac{p_y p_x}{m} - \frac{p_x p_y}{m} + y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} \quad (4.61)$$

$$= y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (4.62)$$

l_z sera donc une constante du mouvement (ou intégrale première) si et seulement si

$$x \frac{\partial V}{\partial y} = y \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (4.63)$$

Pour un force conservatrice,

$$F_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = - \frac{\partial V}{\partial y}$$

et

$$y \frac{\partial V}{\partial x} - x \frac{\partial V}{\partial y} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$

où on reconnaît le moment de force dans la direction des z . Mathématiquement cela n'est possible que si, indépendamment de z qui n'apparaît pas ici, $V(x, y)$ ne dépend de x et de y que sous la forme d'une fonction de $(x^2 + y^2)$. soit

$$V(x, y) = f_1(x^2 + y^2).$$

Si on s'intéresse aux trois dimensions, on obtiendra des conditions sur $l_x \rightarrow V = f_2(y^2 + z^2)$ et sur $l_y \rightarrow V = f_3(x^2 + z^2)$. Pour avoir conservation de $\mathbf{l}$, on doit donc avoir

$$V(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2) \text{ ou } f(r).$$

c'est-à-dire un potentiel central.

4.4.2 Propriétés

On peut déduire un certain nombre de propriétés des crochets de Poisson

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (4.64)$$

$$\{A, b\} = 0 \quad b = \text{constante} \quad (4.65)$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \quad (4.66)$$

$$\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{A, B\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial t}, B \right\} + \left\{ A, \frac{\partial B}{\partial t} \right\} \quad (4.68)$$

$$\{A, q_i\} = -\frac{\partial A}{\partial p_i} \quad (4.69)$$

$$\{A, p_i\} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \quad (4.70)$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0 \quad (4.71)$$

où cette dernière expression est l'identité de Jacobi.

Au delà d'une simple notation, leur calcul assez facile permet d'obtenir un certain nombre de résultats intéressants. D'autre part, ils sont intimement reliés aux *commutateurs* de la mécanique quantique.

4.4.3 Variables canoniques

Il existe toute une famille de résultats intéressants associés au crochet de Poisson. Parmi les plus importants, calculons certains de ces crochets entre des variables canoniques : coordonnées et moments : $\{q_k, q_j\}$, $\{p_k, p_j\}$ et $\{q_k, p_j\}$ où k et j sont fixés

1. $\{q_k, q_j\}$: Considérons

$$\{q_k, q_j\} = \sum_i^n \left[\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial q_i} \right] \equiv 0 \quad (4.72)$$

puisque

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0 \quad (4.73)$$

parce que les variables canoniques sont indépendantes

2. $\{p_k, p_j\}$: De la même façon, on obtient

$$\{p_k, p_j\} = 0 \quad (4.74)$$

3. $\{q_k, p_j\}$: Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 \{q_k, p_j\} &= \sum_i^n \left[\frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right] \\
 &= \sum_i^n \frac{\partial q_k}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\
 &= \sum_i^n \delta_{ki} \delta_{ji} = \delta_{kj}
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

où δ_{kj} est le delta de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} . \tag{4.76}$$

Remarque 4.4

i Ces résultats sont très importants parce qu'on peut démontrer que leur inverse est vrai, c'est-à-dire si un ensemble de n coordonnées q_i et de n moments p_i obéit aux relations ci-dessus, alors l'ensemble des q_i et des p_i constitue un ensemble de variables canoniques. Ceci est très important et trouve éventuellement des applications dans les théories quantiques du champ.

i

Une autre utilisation intéressante des crochets de Poisson est qu'ils permettent de complètement *symétriser* les équations canoniques. Puisqu'il est vrai que pour une fonction quelconque des variables (p_i, q_i) , soit $F(p_i, q_i)$, sa dérivée par rapport au temps est donnée par

$$\dot{F} = \{F, H\} \quad (4.77)$$

la chose est certainement vraie pour les q_i et les p_i eux-mêmes et les équations canoniques peuvent s'écrire

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad (4.78)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (4.79)$$

À cause de cette symétrie, on est parfois amené à parler des $2n$ variables canoniques. Une telle symétrie n'existe pas dans le formalisme lagrangien entre les q_i et les $\dot{q}_i$.

4.5 Moments généralisés

On parle des p_i comme étant des moments généralisés de la même façon que les q_i sont des coordonnées généralisées. Comme les dimensions des q_i peuvent être à peu près n'importe quoi, il en va de même des p_i .

Dans les exemples que nous avons vus, les p_i étaient les composantes de $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (4.80)$$

ce qui est particulièrement évident en coordonnées cartésiennes. Mais même en coordonnées cartésiennes, cette définition n'est pas toujours vraie. En effet, lorsque l'interaction dépend des vitesses $\mathbf{p} \neq m\mathbf{v}$. L'exemple le plus important est sans doute celui des interactions de jauge. En effet, nous avons vu que le lagrangien d'une particule de masse m et de charge e dans un champ électromagnétique est, en coordonnées cartésiennes, $x_i = (x, y, z)$

$$L = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 + e \sum_i \dot{x}_i A_i - eV \quad (4.81)$$

où V et $\mathbf{A}$ sont les potentiels scalaire et vectoriel du champ électromagnétique qui dépendent généralement des x_i et de t .

Définissant les moments généralisés p_i

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + eA_i \quad (4.82)$$

on constate que $\mathbf{p}$ n'est plus $m\mathbf{v}$ mais

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad (4.83)$$

Ces équations s'inversent en

$$\dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m} \quad (4.84)$$

Avec la définition de $H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$, on obtient

$$H = \frac{1}{2m} \sum_i (p_i - eA_i)^2 + eV = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + eV. \quad (4.85)$$

Exercice 4.2

❖ Vérifiez ce résultat et vérifiez que les équations canoniques redonnent les équations du mouvement d'une particule soumise à une force de Lorentz. ❖

Les équations canoniques sont

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1}{2m} \sum_j (p_j - eA_j)^2 + eV \right) \\ &= \frac{1}{2m} \sum_j 2 (p_j - eA_j) \delta_{ij} \\ &= \frac{p_i - eA_i}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_i &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2m} \sum_j (p_j - eA_j)^2 + eV \right) \\
 &= -\left(\frac{1}{2m} \sum_j 2(p_j - eA_j) \left(-e \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) + e \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \\
 &= e \left(\sum_j \frac{p_j - eA_j}{m} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}$$

Les équations de mouvement sont alors

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_i &= \dot{p}_i - e\dot{A}_i \\
 &= e \left(\sum_j \frac{p_j - eA_j}{m} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) - e\dot{A}_i
 \end{aligned}$$

Rappelant que

$$\begin{aligned}
 \frac{p_i - eA_i}{m} &= \dot{x}_i \\
 m\ddot{x}_i &= e \left(\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} - \dot{A}_i \right)
 \end{aligned}$$

Par ailleurs les champs électrique et magnétique sont

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad E_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right)$$

et

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Alors on vérifie que

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_1 &= \dot{x}_2 B_3 - \dot{x}_3 B_2 \\ &= \dot{x}_2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) - \dot{x}_3 \left(-\frac{\partial A_3}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) \\ &= \dot{x}_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_2 \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} \right) + \dot{x}_3 \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) - \dot{x}_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) - \dot{x}_2 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) - \dot{x}_3 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} \right) \\ &= \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_1} - \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_1}{\partial x_j} \end{aligned}$$

où à la troisième ligne nous avons ajouté et soustrait $\dot{x}_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right)$.

La dérivée par rapport au temps d'une quantité est donnée par

$$\frac{dA_1}{dt} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} \right) + \sum_j \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_j} \right)$$

On obtient alors

$$\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_1} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_1 + \frac{dA_1}{dt} - \frac{\partial A_1}{\partial t}.$$

Généralisant pour toutes les composantes

$$\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i + \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

et

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x}_i &= e \left(\sum_j \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} - \dot{A}_i \right) \\
 &= e \left((\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_i + \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x_i} - \dot{A}_i \right) \\
 &= e \left((\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_i - \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \\
 &= e ((\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_i + E_i)
 \end{aligned}$$

On trouve donc la force de Lorentz :

$$m\mathbf{a} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) = \mathbf{F}_{\text{Lorentz}}$$

Ce résultat est important puisqu'il nous dit comment écrire l'hamiltonien pour une particule soumise à une interaction de jauge. Aujourd'hui on cherche à écrire toutes les interactions qui apparaissent dans la nature comme des interactions de jauge.

4.6 Transformations canoniques

On dit que des q_i et des p_i que ce sont des variables canoniques généralisées. Ce n'est pas un euphémisme puisqu'il n'y a pratiquement aucune limite à ce qu'elles peuvent représenter physiquement.

Nous en verrons d'ailleurs quelques exemples. Puisque tel est le cas, il doit exister des transformations entre ces différents choix. Nous noterons, Q_i et P_i , les nouvelles variables canoniques obtenues suite à une telle transformation.

$$q_i, p_i \xrightarrow{\text{TC}} Q_i, P_i$$

On n'est pas surpris par contre de constater que ces transformations sont soumises à des conditions assez sévères. En effet, les q_i et p_i sont généralisés mais puisque ce sont des variables canoniques, elles obéissent à

$$\{q_k, q_j\} = 0, \quad \{p_k, p_j\} = 0, \quad \{q_k, p_j\} = \delta_{kj} \quad (4.86)$$

et les équations canoniques

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4.87)$$

sont invariantes de forme.

Ainsi, à la suite d'une transformation des q_i et p_i vers les Q_i et P_i et définissant un nouvel hamiltonien que nous noterons $H'(Q_i, P_i)$, c'est-à-dire

$$q_i, p_i, H(q_i, p_i) \xrightarrow{\text{TC}} Q_i, P_i, H'(Q_i, P_i)$$

nous devrons avoir

$$\begin{aligned}\{Q_k, Q_j\}_{Q,P} &= 0, \\ \{P_k, P_j\}_{Q,P} &= 0, \\ \{Q_k, P_j\}_{Q,P} &= \delta_{kj}\end{aligned}$$

et les équations canoniques

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad (4.88)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}. \quad (4.89)$$

Strictement les équations de transformation peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}Q_i &= Q_i(q_j, p_j, t) \\ P_i &= P_i(q_j, p_j, t)\end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.90)$$

et doivent pouvoir s'inverser puisque la physique reste indépendante des variables qu'on emploie pour la décrire, donc on doit pouvoir écrire les transformations inverses

$$\begin{aligned}q_i &= q_i(Q_j, P_j, t) \\ p_i &= p_i(Q_j, P_j, t)\end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.91)$$

Les q_i , p_i , Q_i et P_i forment $4n$ variables mais il est évident que seules $2n$ d'entre elles sont indépendantes. D'autre part s'il est généralement possible d'écrire, par exemple, les n équations de transformation

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j, t) \quad (4.92)$$

de façon assez arbitraire il est généralement impossible d'écrire les n autres équations

$$P_i = P_i(q_j, p_j, t) \quad (4.93)$$

de façon aussi arbitraire puisqu'un tel choix ne satisfera pas en général les conditions énoncées plus haut.

Il faut donc apprendre à faire correctement ces transformations. La façon *standard* de le faire est de considérer que pour les fins de la transformation n des anciennes variables et n des nouvelles sont linéairement indépendantes, par exemple, les q_i et les P_i alors que n anciennes et n nouvelles restantes sont linéairement dépendantes, ici les p_i et les Q_i .

$$q_i, P_i \xrightarrow{\text{TC}} p_i, Q_i$$

Dans ce cas précis nous écririons donc les équations de transformation

$$p_i = p_i(q_j, P_j, t) \quad (4.94)$$

$$Q_i = Q_i(q_j, P_j, t) \quad (4.95)$$

Pour obtenir la forme habituelle, on inverse les n premières en

$$P_j = P_j(q_i, p_i, t) \quad (4.96)$$

que l'on remplace dans les n dernières

$$Q_i = Q_i(q_j, P_j(q_k, p_k, t), t) = Q_i(q_j, p_j, t). \quad (4.97)$$

Schématiquement dans cet exemple

$$\text{Choisir la TC :} \quad q_i, P_i \xRightarrow{\text{TC}} p_i, Q_i$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Écrire } p_i \text{ et } Q_i : \quad p_i &= p_i(q_j, P_j, t) \\ Q_i &= Q_i(q_j, P_j, t) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Inverser } p_i = p_i(q_j, P_j, t) : \quad P_j = P_j(q_i, p_i, t)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{Substituer dans } Q_i = Q_i(q_j, P_j, t) : \quad Q_i(q_j, P_j, t) \Rightarrow Q_i(q_j, p_j, t)$$

4.6.1 Fonctions génératrices

Pour générer ces transformations, nous retournerons au principe variationnel lui-même. Nous savons que

$$\delta S = \delta \int_1^2 L dt = 0. \quad (4.98)$$

Par ailleurs de

$$H = \sum_i^n p_i \dot{q}_i - L \quad \text{où} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.99)$$

on peut obtenir

$$L = \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \quad \text{où} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial p_i} \quad (4.100)$$

ce qui permet d'écrire

$$\delta S = \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \delta \int_1^2 L dt = 0. \quad (4.101)$$

Or si L correspond à H , L' correspondra à H' et nous exigeons d'avoir également

$$\delta \int_1^2 L' dt = 0 \quad \text{où} \quad L' = \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H'. \quad (4.102)$$

Autrement dit nous aurons

$$L, H \xrightarrow{\text{TC}} L', H'$$

Pour que L' et L décrivent la même physique nous avons déjà vu que L et L' ne peuvent différer l'un de l'autre que par la dérivée totale d'une fonction F , c'est-à-dire

$$L = L' + \frac{dF}{dt}. \quad (4.103)$$

Nous poserons donc

$$\delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{dF}{dt} \right] dt \quad (4.104)$$

Cette fonction F , que l'on appelle le générateur de la transformation canonique sera choisie comme ne dépendant que des variables indépendantes de la transformation. On identifie généralement quatre cas

Variables indépendantes	Variables dépendantes	Générateurs
q_i, Q_i	p_i, P_i	$F_1(q_i, Q_i, t)$
q_i, P_i	p_i, Q_i	$F_2(q_i, P_i, t)$
p_i, Q_i	q_i, P_i	$F_3(p_i, Q_i, t)$
p_i, P_i	q_i, Q_i	$F_4(p_i, P_i, t)$

Étudions un peu plus en détails les cas $F_1(q_i, Q_i, t)$, $F_2(q_i, P_i, t)$. Dans le cas $F_1(q_i, Q_i, t)$ — q_i, Q_i indépendantes

$$\frac{dF_1}{dt} = \{F_1, H\}_{q, Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (4.105)$$

$$= \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (4.106)$$

Ici, il est suffisant de comparer les fonctions à intégrer dans $\delta \int_1^2 L dt = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) &= \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H'(Q_i, P_i, t) + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &\quad + \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Cette équation est satisfaite si on identifie, q_i, Q_i et donc $\dot{q}_i$ et $\dot{Q}_i$ comme étant indépendantes. Regroupant, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i^n \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i^n \left(P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i \\ &\quad + \left(H'(Q_i, P_i, t) - H(q_i, p_i, t) - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Les facteurs devant ces variables indépendantes, doivent donc être identiques

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q_j, Q_j, t) = p_i(q_j, Q_j, t) \\ P_i &= -\frac{\partial}{\partial Q_i} F_1(q_j, Q_j, t) = P_i(q_j, Q_j, t) \\ H' &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.108)$$

Clairement ces lois de transformation nous permettent d'écrire les $2n$ variables dépendantes (ici les p_i et P_i) en fonction des $2n$ variables indépendantes (ici les q_i et Q_i). Ces $2n$ équations peuvent se mettre sous la forme *plus habituelle*

$$q_i = q_i(Q_j, P_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.109)$$

$$p_i = p_i(Q_j, P_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.110)$$

ce qui permet de calculer H'

$$\begin{aligned} H'(Q_i, P_i, t) &= H(q_i(Q_j, P_j, t), p_i(Q_j, P_j, t), t) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} F_1(q_i(Q_j, P_j, t), Q_i, t). \end{aligned} \quad (4.111)$$

En étudiant les équations de transformation obtenues ci-dessus, on constate que

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial}{\partial Q_j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i \partial Q_j}, \quad (4.112)$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q_j \partial q_i} \quad (4.113)$$

ainsi donc, un test du caractère canonique de la transformation

$$p_i = p_i(q_j, Q_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.114)$$

$$P_i = P_i(q_j, Q_j, t) : n \text{ équations} \quad (4.115)$$

est qu'elle doit satisfaire

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \quad (4.116)$$

ce qui est équivalent à

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{et} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}. \quad (4.117)$$

Dans le cas $F_2(q_i, P_i, t)$ ce sont les q_i et les P_i qui sont considérés indépendants. On calcule

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (4.118)$$

Ici la comparaison des fonctions à intégrer n'est pas suffisante et nous devons récrire au complet

$$\begin{aligned} \delta \int_1^2 \left[\sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \right] dt = \\ \delta \int_1^2 \left\{ \sum_i^n P_i \dot{Q}_i - H' + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i \right. \\ \left. + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Le problème vient de ce que les Q_i ne sont pas considérés indépendants ici et donc les $\dot{Q}_i$ ne le sont pas. Intégrons par partie le premier terme à droite

$$\delta \int_1^2 \sum_i^n P_i \dot{Q}_i dt = \delta \int_1^2 \left(\frac{d}{dt} \sum_i^n P_i Q_i \right) dt - \delta \int_1^2 \sum_i^n \dot{P}_i Q_i dt. \quad (4.120)$$

$$= \underbrace{\delta \sum_i^n P_i Q_i \Big|_1^2}_{=0 \text{ pcq points fixes}} - \delta \int_1^2 \sum_i^n \dot{P}_i Q_i dt. \quad (4.121)$$

Maintenant nous pouvons comparer les fonctions à intégrer

$$\begin{aligned} \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H &= - \sum_i^n \dot{P}_i Q_i - H' + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &\quad + \sum_i^n \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.122)$$

en regroupant

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i^n \left(-p_i + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i^n \left(-Q_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i \\ &\quad + \left(H(q_i, p_i, t) - H'(Q_i, P_i, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

et identifier les facteurs des variables indépendantes, $\dot{q}_i$ et $\dot{P}_i$

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} F_2(q_j, P_j, t) = p_i(q_j, P_j, t) \\ Q_i &= \frac{\partial}{\partial \dot{P}_i} F_2(q_j, P_j, t) = Q_i(q_j, P_j, t) \\ H' &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.123)$$

Ici encore les variables dépendantes apparaissent exprimées en fonction des variables indépendantes. Comparant les expressions pour p_i et Q_i , le test du caractère d'une transformation de type F_2 est

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial P_j} &= \frac{\partial}{\partial P_j} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \dot{q}_i \partial P_j} \\ \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot{P}_j} \right) = \frac{\partial^2 F_2}{\partial \dot{q}_i \partial P_j} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \quad (4.124)$$

On peut vérifier alors que

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\} \quad \text{et} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}. \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned}
 (q_j, Q_j, t) &= p_i(q_j, Q_j, t) \\
 (q_j, Q_j, t) &= P_i(q_j, Q_j, t)
 \end{aligned}
 \tag{4.126}$$

De la même façon, on trouve

Var. ind.	Générateurs	Transformation			Éqs. de la TC
q_i, Q_i	$F_1(q_i, Q_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$
q_i, P_i	$F_2(q_i, P_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
p_i, Q_i	$F_3(p_i, Q_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$	$\frac{\partial P_j}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}$
p_i, P_i	$F_4(p_i, P_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$	$\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$

Les fonctions $F_1(q_i, Q_i, t)$, $F_2(q_i, P_i, t)$ etc..., ne génèrent pas des transformations différentes mais sont simplement des façons différentes de générer une transformation donnée. Évidemment, deux fonctions F_1 différentes par exemple vont en général générer des transformations différentes.

En fait, les fonctions génératrices sont reliées entre-elles par des transformations de Legendre

$$F_1(q_i, Q_i, t) = F_2(q_i, P_i, t) - \sum_i^n P_i Q_i = F_3(p_i, Q_i, t) + \sum_i^n p_i q_i = F_4(p_i, P_i, t) + \sum_i^n (p_i q_i - P_i Q_i).$$

4.6.2 Quelques transformations canoniques particulières

1. Transformation identité :

La transformation canonique F_2 ayant la forme

$$F_2(q, P) = \sum_i q_i P_i \quad (4.127)$$

donne

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = P_k \\ Q_k &= \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = q_k \\ H' &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \end{aligned}$$

Ici F_2 correspond donc à la transformation identité.

2. Transformations ponctuelles

Une transformation canonique de la forme

$$F_2(q, P) = \sum_i f_i(q, t) P_i \quad (4.128)$$

implique

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_i \frac{\partial f_i(q, t)}{\partial q_k} P_i \\ Q_k &= \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = f_k(q, t) \\ H' &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}$$

génère des nouvelles coordonnées Q_k qui ne dépendent pas des moments. Une telle transformation est dite ponctuelle. On note que les f_i étant arbitraires, toute transformation ponctuelle est alors canonique !

3. Échange coordonnée-moment

La transformation de type F_1 ayant la forme

$$F_1 = \sum_i q_i Q_i \quad (4.129)$$

mène aux relations

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = Q_k \\ P_k &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = -q_k \\ H' &= H \end{aligned}$$

correspondant à un échange entre coordonnée généralisée et moment.

Remarque 4.5

i Comme on le constate, la notion de coordonnée spatiale et quantité de mouvement se confond en mécanique hamiltonienne puisque elles peuvent être tout aussi bien assignées à la coordonnée qu'au moment généralisé. **i**

4.6.3 Quelques exemples

Fréquemment on cherche à effectuer une transformation de coordonnées, c'est-à-dire on connaît les fonctions

$$Q_i = Q_i(q_j, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.130)$$

toujours inversibles en

$$q_i = q_i(Q_j, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.131)$$

En général il n'est alors pas possible de poser à priori les équations de transformation des moments, on doit s'assurer que ces derniers seront des moments canoniques généralisés. Une façon « simple » de procéder est par le biais d'une transformation de type

$F_2(q_i, P_i, t)$ définie comme

$$F_2(q_i, P_i, t) = \sum_i^n Q_i(q_j, t) P_i. \quad (4.132)$$

et dont les propriétés sont

$F_2(q_i, P_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
--------------------	---	---	--	---

Dans ce cas, les équations canoniques de transformation seront

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i(q_j, t) : \text{ tel que désiré } \quad (4.133)$$

et

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_j^n P_j \frac{\partial}{\partial q_i} Q_j(q_k, t) = p_i(P_j, q_k, t). \quad (4.134)$$

Ces n dernières équations peuvent s'inverser en

$$P_i = P_i(q_j, p_j, t) \quad (4.135)$$

complétant ainsi l'opération et garantissant que les P_i ainsi définis seront canoniques.

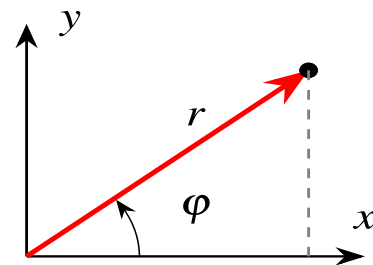


Figure 4.3 ▲

Passage aux coordonnées cartésiennes en deux dimensions, x et y aux coordonnées polaires, r, φ .

Exemple 4.9

💡 Voyons un exemple simple (voir figure 4.3), celui du passage aux coordonnées cartésiennes en deux dimensions, x et y aux coordonnées polaires, r, φ .

Ici $q_i = (x, y)$ et $Q_i = (r, \varphi)$ avec $i = 1, 2$. De plus, $p_i = (p_x, p_y)$ et $P_i = (P_r, P_\varphi)$. Nous savons que

$$\left. \begin{aligned} q_1 = x &= r \cos \varphi \\ q_2 = y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ du type } q_i = q_i(Q_j) \text{ et } \left\{ \begin{aligned} p_1 &= p_x \\ p_2 &= p_y \end{aligned} \right. \quad (4.136)$$

donc

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \iff Q_1 = (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.137)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \iff Q_2 = \tan^{-1} \left(\frac{q_2}{q_1} \right). \quad (4.138)$$

Nous écrivons la fonction $F_2(q_i, P_i)$

$$\begin{aligned} F_2(q_i, P_i) &= \sum_i^n Q_i(q_j, t) P_i \\ &= F_2(x, y, P_r, P_\varphi) \end{aligned}$$

et

$F_2(q_i, P_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
--------------------	---	---	--	---

Alors

$$\begin{aligned}
 F_2(q_i, P_i) &= (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}} P_r + \tan^{-1} \left(\frac{q_2}{q_1} \right) P_\varphi \\
 &\equiv F_2(x, y, P_r, P_\varphi) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} P_r + \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) P_\varphi.
 \end{aligned}$$

Les lois canoniques d'une transformation F_2 sont

$$\begin{aligned}
 p_x &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \\
 &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} P_r - \frac{y}{(x^2 + y^2)} P_\varphi \\
 &= \cos \varphi P_r - \frac{\sin \varphi}{r} P_\varphi
 \end{aligned} \tag{4.139}$$

$$\begin{aligned}
 p_y &= \frac{\partial F_2}{\partial y} \\
 &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} P_r + \frac{x}{(x^2 + y^2)} P_\varphi \\
 &= \sin \varphi P_r + \frac{\cos \varphi}{r} P_\varphi
 \end{aligned} \tag{4.140}$$

d'où on obtient facilement

$$P_r = \frac{x p_x + y p_y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|} \tag{4.141}$$

$$P_\varphi = x p_y - y p_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = l_z \tag{4.142}$$

où $(\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z$ = composante z du moment angulaire. Supposons de plus que nous ayons

$$T = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) \quad \text{et} \quad V(x, y) \tag{4.143}$$

alors on calcule facilement

$$T = \frac{1}{2m} \left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2} \right) \quad \text{et} \quad V(r, \varphi) \tag{4.144}$$

que l'on sait déjà être le bon résultat. 

Exercice 4.3

 Calculez les $\{Q_i, P_j\}$ pour vérifier que les nouvelles variables sont canoniques. 

Exemple 4.10

 Quelques exemples illustrateurs sur l'oscillateur harmonique dont l'hamiltonien (1 dimension) est

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2. \quad (4.145)$$

Tentons de passer des variables canoniques x et p_x à de nouvelles, notées q et p par

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}q \implies q = \sqrt{m\omega}x \quad (4.146)$$

$$p_x = \sqrt{m\omega}p \implies p = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}p_x. \quad (4.147)$$

On vérifie que

$$\{q, p\} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p_x} - \frac{\partial q}{\partial p_x} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.148)$$

$$= \sqrt{m\omega} \cdot \frac{1}{\sqrt{m\omega}} - 0 \cdot 0 = 1 \quad (4.149)$$

ce qui est correct et de toute évidence $\{q, q\} = \{p, p\} = 0$, donc la transformation est canonique et H devient H' :

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H \quad (4.150)$$

$$H'(q, p) = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2). \quad (4.151)$$

La solution est triviale

$$\dot{q} = \frac{\partial H'}{\partial p} = \omega p \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H'}{\partial q} = -\omega q \quad (4.152)$$

alors

$$\ddot{q} = \omega \dot{p} = -\omega^2 q \quad (4.153)$$

d'où

$$q(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (4.154)$$

donc

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} A \sin(\omega t + \delta). \quad (4.155)$$



Exemple 4.11

 Au lieu de cette transformation, essayons plutôt de passer de (x, p_x) à (q, p) définis par

$$x = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} q \quad \text{et} \quad p_x = \sqrt{2m} p \quad (4.156)$$

ou

$$q = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} x \quad \text{et} \quad p = \frac{p_x}{\sqrt{2m}}. \quad (4.157)$$

Nous passons alors de H à H' défini par $(\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \implies H' = H)$

$$\begin{aligned} H'(q, p) &= H(x(q), p_x(p)) \\ &= \frac{1}{2m} \cdot 2mp^2 + \frac{m\omega^2}{2} \frac{2}{m\omega^2} q^2 \\ &= p^2 + q^2 \end{aligned} \quad (4.158)$$

La solution est triviale

$$\dot{q} = \frac{\partial H'}{\partial p} = 2p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H'}{\partial q} = -2q \quad (4.159)$$

donc

$$\ddot{q} = 2\dot{p} = -4q \quad (4.160)$$

donc

$$q(t) = A \sin(2t + \delta). \quad (4.161)$$

On s'attend à ce que $q(t) = N \sin(\omega t + \delta)$ où $\omega \neq 2$ en général, donc ce résultat est faux. La raison est que la transformation faite ici, même si elle semble très simple, n'est pas canonique. En effet on vérifie que

$$\begin{aligned} \{q, p\} &= \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p_x} - \frac{\partial q}{\partial p_x} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m}} - 0 \cdot 0 = \frac{\omega}{2} \neq 1 \end{aligned} \quad (4.162)$$

sauf pour le cas particulier $\omega = 2$. 

Exemple 4.12

 Reprenons l'hamiltonien $H'(q, p)$ correctement obtenu précé-

demment

$$\implies H'(q, p) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \quad (4.163)$$

et considérons une transformation canonique additionnelle définie par

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}}(q - ip) \quad (4.164)$$

On inverse facilement la T.C

$$q = \frac{Q - iP}{\sqrt{2}}, \quad p = -\frac{i(Q + iP)}{\sqrt{2}} \quad (4.165)$$

Même si la transformation est complexe on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Trivialement le nouveau H' , noté ici H'_1 est

$$H'_1(Q, P) = -iQP \quad (4.167)$$

Les équations du mouvement seront

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'_1}{\partial P} = -i\omega Q, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'_1}{\partial Q} = +i\omega P \quad (4.168)$$

donc

$$Q(t) = ae^{-i\omega t}, \quad P(t) = be^{i\omega t}. \quad (4.169)$$

Ainsi

$$q(t) = \frac{ae^{-i\omega t} - ibe^{i\omega t}}{\sqrt{2}}. \quad (4.170)$$

On note que de par les définitions même de Q et P , $P = iQ^*$. Mais P serait donc une fonction de Q^* alors que P et Q devraient être indépendants ? En fait, c'est le cas puisqu'ils sont complexes et impliquent donc deux degrés de liberté, un réel et un imaginaire. D'ailleurs une relation ne suffit pas à déterminer P en fonction de Q^* . En utilisant $P = iQ^*$, on obtient

$$be^{it} = ia^* e^{it} \implies b = ia^* \quad (4.171)$$

et

$$q(t) = \frac{ae^{-i\omega t} + a^* e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}. \quad (4.172)$$

Mais A est une constante (complexe) que l'on peut écrire

$$a = |a| e^{i\Delta} \implies a^* = |a| e^{-i\Delta} \quad (4.173)$$

ce qui donne

$$q(t) = \frac{|a| e^{i\Delta} e^{-it} + |a| e^{-i\Delta} e^{it}}{\sqrt{2}} \quad (4.174)$$

$$= \sqrt{2} |a| \frac{e^{-i(\omega t - \Delta)} + e^{+i(\omega t - \Delta)}}{2} \quad (4.175)$$

$$= \sqrt{2} |a| \cos(\omega t - \Delta) = \sqrt{2} |a| \sin(\omega t - \Delta + \frac{\pi}{2}) \quad (4.176)$$

qui est une bonne solution. Cette façon de faire peut sembler étrange mais en plus de mélanger coordonnées et moments, elle trouve une application en mécanique quantique. 

4.6.4 Interprétation géométrique des crochets de Poisson★★

Rappelons que le théorème de Noether établit un lien entre symétries et invariants et fournit une méthode permettant de calculer l'invariant associé à un changement de variables donné. En fait, ce lien entre invariants et propriétés de symétrie s'avère une propriété géométrique de l'espace des phases.

Définition 4.4

i Rappelons que l'état d'un système à un instant t peut être représenté par un point

$$x(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

dans un espace à $2n$ dimensions, appelé l'espace des phases. Mathématiquement, il ne s'agit pas d'un espace vectoriel mais plutôt d'une variété différentiable, une classe d'équivalence d'atlas.



De plus le crochet de Poisson de deux fonctions f et g de variables dynamiques (q_i, p_i, t) donné par

$$\{f, g\} \equiv \sum_i^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right] \quad (4.177)$$

peut être vu dans l'espace de phase comme le produit scalaire

$$\{f, g\} \equiv \nabla_{q,p} f \cdot \nabla_{p,-q} g. \quad (4.178)$$

du gradient « ordinaire » de f

$$\begin{aligned} \nabla_{q,p} f &\equiv (\partial_q, \partial_p) f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \dots \right) f \end{aligned}$$

avec le gradient « symplectique » de g défini comme suit

$$\begin{aligned}\nabla_{p,-q}g &\equiv (\partial_p, -\partial_q)g \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \dots, -\frac{\partial}{\partial q_1}, -\frac{\partial}{\partial q_2}, \dots \right) g.\end{aligned}$$

Comme on le voit, le gradient symplectique $\nabla_{p,-q} \equiv (\partial_p, -\partial_q)$ est simplement le gradient ordinaire dans l'espace de phase $\nabla_{q,p} \equiv (\partial_q, \partial_p)$ auquel on a fait subir une rotation de 90° dans le sens horaire.

Générateurs de transformations canoniques infinitésimales

Une opération de symétrie implique nécessairement un changement de variables que nous choisirons ici comme étant des transformations canoniques. Posons $f(q, p, t)$ une fonction quelconque définie sur l'espace des phases. En effectuant à une transformation infinitésimale des variables ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction s'en trouve modifiée par

$$\begin{aligned}\delta f &= f(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i, t) - f(q_i, p_i, t) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

où les δq_i et δp_i ne sont pas des variations au sens du calcul variationnel mais des modifications élémentaires. Dans le cas où le

changement de variables infinitésimal est canonique, on peut écrire

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i \\ P_i &= p_i + \delta p_i. \end{aligned}$$

Cette transformation est donc très proche de la transformation identité engendrée par $F_2(q, P) = \sum_i q_i P_i$. On peut donc construire une transformation infinitésimale comme suit

$$F(q, P) = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G \quad (4.179)$$

où ε est un paramètre infinitésimal et G une fonction encore inconnue. Cependant, en imposant que F soit canonique et du type F_2 , on exige la forme

$$F' = F - PQ$$

où F' est canonique et du type F_1 .

Remarque 4.6

i Rappel : Les fonctions génératrices $F_1(q_i, Q_i, t)$ et $F_2(q_i, P_i, t)$ sont reliées entre-elles par une transformation de Legendre

$$F_1(q_i, Q_i, t) = F_2(q_i, P_i, t) - \sum_i P_i Q_i.$$



Rappelons que seules les transformations de jauge de L en L' préservent les équations d'Euler-Lagrange

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = L'(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} F'(q_i, t) \quad (4.180)$$

ou

$$\sum_i \dot{q}_i p_i - H = \sum_i \dot{Q}_i P_i - H' + \frac{dF'}{dt} \quad (4.181)$$

quelles que soient les variations des P_i et des q_i . Alors

$$\sum_i \dot{q}_i p_i - H = \sum_i \dot{Q}_i P_i - H' + \frac{d}{dt} \left(F - \sum_i P_i Q_i \right) \quad (4.182)$$

$$= - \sum_i \dot{P}_i Q_i - H' + \frac{dF}{dt} \quad (4.183)$$

$$= - \sum_i \dot{P}_i Q_i - H' + \sum_i \dot{q}_i P_i + \sum_i q_i \dot{P}_i + \varepsilon \frac{dG}{dt} \quad (4.184)$$

$$= - \sum_i \dot{P}_i Q_i - H' + \sum_i \dot{q}_i P_i + \sum_i q_i \dot{P}_i \quad (4.185)$$

$$+ \varepsilon \left(\sum_i \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial G}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) \quad (4.186)$$

Par identification de chacun des termes, on obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \\ H' &= H \end{aligned}$$

Donc le changement de variables est donné par G

$$\begin{aligned} \delta p_i &= P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ \delta q_i &= Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \simeq \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Alors, il suffit d'introduire une fonction $F(q, p)$, dépendant des anciennes variables, pour engendrer une transformation canonique infinitésimale d'ordre ε . Au premier ordre en ε , on a pour f in-

dépendant du temps

$$\begin{aligned}
 \delta f &= f(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i, t) - f(q_i, p_i, t) \\
 &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \\
 &= \varepsilon \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \\
 &= \varepsilon \{f, G\}
 \end{aligned}$$

Le crochet de Poisson $\{f, G\}$ a donc une signification précise : δf correspond à la modification de f lors d'un changement infinitésimal de coordonnées canoniques, engendrée par la fonction génératrice G , soit

$$\delta f = \varepsilon \{f, G\}.$$

Relation avec les invariants d'un système

Posons une transformation canonique quelconque G (ne dépendant pas explicitement du temps). Si

$$\{H, G\} = 0 \quad (4.187)$$

G est une constante du mouvement puisque

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \{H, G\} + \frac{\partial G}{\partial t} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Mais en utilisant le résultat précédent

$$\delta f = \varepsilon \{f, G\},$$

on voit que

$$\delta H = \varepsilon \{H, G\} = 0$$

c'est-à-dire, la transformation canonique G laisse H invariant.

Théorème 4.1

Les constantes du mouvement d'un système fermé sont les fonctions génératrices des transformations canoniques infinitésimales qui laissent H invariant.

Ce que nous savions déjà grâce à Lagrange apparaît ici comme un cas particulier d'un ensemble très vaste de transformations canoniques possibles.

Exemple 4.13



Translation dans le temps :

Rappelons que l'hamiltonien H d'un système est invariant si ce

dernier est symétrique par translation dans le temps.

Puisque $\frac{dH}{dt} = 0$, on peut identifier $G = H$ et on remarque que

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = \varepsilon \dot{p}_i$$

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} = \varepsilon \dot{q}_i$$

où on a utilisé les équations canoniques. Cette dernière relation permet d'identifier $\varepsilon = dt$. On en déduit que l'hamiltonien d'un système est bien le générateur d'une translation infinitésimale dans le temps, faisant passer celui-ci de l'instant t à l'instant $t + dt$. *En conséquence, le mouvement d'un système entre deux instants t_1 et t_2 peut être décrit par une succession de transformations canoniques infinitésimales dont le générateur est H .*



Exemple 4.14



Translation d'un des q_i :

De plus, nous savons que si une variable q_k est cyclique, alors le moment conjugué p_k est un invariant ou autrement dit une constante du mouvement (ou intégrale première).

Cette fois-ci, définissons $G = p_k$, puisque

$$\frac{dp_k}{dt} = 0 = \{H, p_k\} + \frac{\partial p_k}{\partial t}$$

soit

$$\{H, p_k\} = 0$$

et $\delta p_k = 0$. On obtient

$$\delta p_i = -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} = -\varepsilon \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 \quad (4.188)$$

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} = \varepsilon \frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \varepsilon \delta_{ik}$$



Remarque 4.7

i Donc le générateur d'une translation dans la direction q_k d'une quantité ε est simplement le moment canonique p_k . De la même façon, on peut démontrer que le générateur du mouvement de rotation du système est le moment cinétique. **i**

Considérons maintenant le crochet de Poisson pour une transla-

tion où

$$g = q \text{ et } f = p$$

où le moment canonique p est le générateur de la translation. Puisqu'il s'agit de variables canoniques

$$\{q, p\} = 1$$

ce qui mène en généralisant à plusieurs variables au résultat (4.188). Celui-ci peut être interprété comme le produit scalaire du gradient ordinaire et du gradient symplectique (voir (4.178))

$$\{q, p\} \equiv \nabla_{q,p} q \cdot \nabla_{p,-q} p = 1.$$

Remarque 4.8

i On note par ailleurs qu'après translation, les nouvelles variables canoniques (Q, P) obéissent toujours à

$$\{Q, P\} \equiv 1$$

ou autrement dit, la translation laisse le produit scalaire des gradients ordinaire et symplectique des variables canoniques invariant. On remarque alors une l'analogie entre ce résultat et

celui d'une rotation qui ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs. i

4.7 La méthode de Hamilton-Jacobi

4.7.1 L'objectif

Les transformations canoniques ont pour but de simplifier les problèmes. L'une d'entre elles est tellement systématique qu'elle porte un nom, l'équation de Hamilton-Jacobi.

Remarque 4.9

i **Rappel historique : Charles Gustave Jacob Jacobi**

Charles Gustave Jacob Jacobi, ou Carl Gustav Jakob Jacobi (10 décembre 1804 à Potsdam - 18 février 1851 à Berlin), est un mathématicien allemand surtout connu pour ses travaux sur les intégrales elliptiques, les équations aux dérivées partielles et leur application à la mécanique analytique. i

Soit un hamiltonien $H(q_i, p_i)$ dépendant de $2n$ variables canoniques, les (q_i, p_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Nous savons que nous pouvons passer à un nouvel ensemble de variables canoniques, les (Q_i, P_i) également au nombre de $2n$ et dont sera fonction un nouvel hamiltonien $H'(Q_i, P_i)$. Par ailleurs nous savons que le système compte $2n$ con-

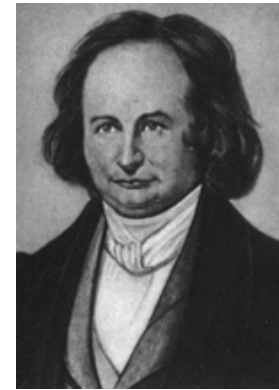


Figure 5.2 ▲

Charles Gustave Jacob Jacobi, (1804 - 1851).

stantes du mouvement. Le but de la méthode est d'opérer une transformation canonique telle que les (Q_i, P_i) soient précisément $2n$ constantes du mouvement.

Nous tirons la solution donnée directement par les équations de transformation

$$q_i = q_i(Q_j, P_j, t) \quad (4.189)$$

$$= q_i(\beta_j, \alpha_j, t) \quad (4.190)$$

$$p_i = p_i(Q_j, P_j, t) \quad (4.191)$$

$$= p_i(\beta_j, \alpha_j, t) \quad (4.192)$$

Alors une fois que la bonne transformation canonique est effectuée, les équations du mouvement dans les nouvelles $2n$ variables canoniques Q_i, P_i et $H'(Q_i, P_i)$ deviennent triviales tout comme la solution : Q_i et P_i sont des constantes

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0 \iff Q_i = \beta_i = \text{constantes} \quad (4.193)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \iff P_i = \alpha_i = \text{constantes} \quad (4.194)$$

Pour y arriver nous chercherons la fonction génératrice, ici choisie de type $F_2(q_i, P_i, t)$ avec $P_i = \alpha_i$

$F_2(q_i, P_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
--------------------	---	---	--	---

Ici, nous utiliserons la notation simplifiée où $S(q_i, \alpha_i, t) = F_2(q_i, P_i, t)|_{P_i=\alpha_i}$:

$$F_2(q_i, P_i, t)|_{P_i=\alpha_i} \rightarrow S(q_i, \alpha_i, t)$$

alors

$$H'(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} \equiv 0. \quad (4.195)$$

$$H'(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} \equiv 0. \quad (4.196)$$

En choisissant, S pour que

$$H' = 0,$$

on s'assure que les équations (4.193-4.194)

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0 \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$$

seront satisfaites.

4.7.2 L'approche

La transformation canonique est de type F_2 et donc

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i}. \quad (4.197)$$

et le but recherché est d'obtenir

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Ce sera notre équation fondamentale après remplacement des p_i dans H

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = 0. \quad (4.198)$$

C'est l'équation de Hamilton-Jacobi, une équation différentielle pour S . Cette équation différentielle du 1^{ier} ordre en n variables nécessitera n constantes d'intégration qui sont précisément les constantes α_i . Une fois solutionnée, c'est-à-dire une fois que l'on connaît S , il ne reste qu'à opérer les transformations canoniques

$$p_i = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial q_i} = p_i(q_j, \alpha_j, t) \quad (4.199)$$

et

$$\begin{aligned} Q_i &= \beta_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S(q_j, \alpha_j, t)}{\partial \alpha_i} \\ &= Q_i(q_j, \alpha_j, t) = \beta_i. \end{aligned} \quad (4.200)$$

Ces n équations peuvent s'inverser en

$$q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (4.201)$$

ce qui est la solution ! Si on veut les p_i , on remplace dans les résultats de la transformation canonique pour

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(q_i, \alpha_i, t) = p_i(q_j(\alpha_k, \beta_k, t), \alpha_i, t) \\ &= p_i(\alpha_l, \beta_l, t). \end{aligned} \quad (4.202)$$

Une simplification importante apparaît lorsque $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dans ce cas, par séparation de variables, on peut écrire (puisque alors H est une constante donc de $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \implies S \propto t$)

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t \quad (4.203)$$

où on identifie l'un des α , soit ici α_1 comme la valeur numérique (constante) de H : $H = \alpha_1$.

Comme

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \implies p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (4.204)$$

l'équation de Hamilton-Jacobi devient simplement

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0. \quad (4.205)$$

C'est l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi pour la fonction $W(q_i, \alpha_i)$. La simplification peut aller plus loin. En effet, toujours par séparation de variables on constate que si une coordonnée, disons q_k pour k fixé, est cyclique, elle n'apparaît pas dans H et p_k est alors une constante qui peut être utilisé comme α_k . Dans ce cas on peut écrire la dépendance en W sur q_k simplement comme

$$W \sim \alpha_k q_k \implies p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k} = \alpha_k : \text{constante} \quad (4.206)$$

et de façon générale W s'écrira

$$W(q_i, \alpha_i) = \sum_k^{\text{cycliques}} \alpha_k q_k + W'(q_j, \alpha_j) \quad (4.207)$$

où les q_k cycliques n'apparaissent pas dans W' .

4.7.3 Une seconde approche★

Rappelons que la méthode de Hamilton-Jacobi présenté plus haut, consiste à rechercher une « bonne » transformation canonique $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$. Dans ce cas particulier, la transformation canonique mène à un nouvel hamiltonien nul $H'(Q_i, P_i) = 0$. Il en résulte l'équation d'Hamilton-Jacobi et des nouvelles variables canoniques

$(Q_i, P_i) = (\beta_i, \alpha_i)$ qui sont des constantes du mouvement :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0 \iff Q_i = \beta_i = \text{constantes} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \iff P_i = \alpha_i = \text{constantes} \\ H'(Q_i, P_i) &= 0\end{aligned}$$

Cet objectif d'obtenir des nouvelles variables canoniques qui correspondent à des constantes du mouvement n'est pas en soi une nécessité. Dans le cas où le système est conservatif, il est possible de définir des variables canoniques particulièrement appropriées. Ce choix est particulièrement intéressant pour un mouvement périodique puisqu'un tel mouvement implique que le système est invariant par translation dans le temps, c'est-à-dire que l'hamiltonien H est une constante du mouvement.

La méthode de Hamilton-Jacobi peut servir ici à déterminer la transformation canonique appropriée. Pour un mouvement périodique par exemple, il est plus approprié de parler de fréquence ou période constante et donc un choix plus judicieux serait une variable Q_i

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i \quad (4.208)$$

où ω_i sont des constantes du mouvement, puisque toutes les Q_i sont

cycliques et H ne dépend pas explicitement du temps

$$H' = H(P_i) = \text{constante.}$$

On demande de plus que les nouveaux moments soient comme précédemment des invariants, alors

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i && \text{(dépendance linéaire)} \\ P_i &= \alpha_i = \text{constantes} \end{aligned}$$

Pour y arriver nous chercherons la fonction génératrice, ici choisie de type $F_2(q_i, P_i, t)$ donc du type $F_2(q_i, \alpha_i, t)$, que nous noterons de façon standard $S(q_i, \alpha_i, t)$, telle que

$$H'(Q_i, P_i) = H(q_i, p_i) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = \text{constante.} \quad (4.209)$$

Puisque $H = H'$ est une constante, on peut écrire

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) \quad (4.210)$$

où on identifie l'un des α , soit ici α_1 comme la valeur numérique (constante) de $H = H' = \alpha_1$.

Comme

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \implies p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (4.211)$$

l'équation de Hamilton-Jacobi devient simplement

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0. \quad (4.212)$$

et on trouve

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i$$

Notons que le choix de transformation canonique ainsi que l'équation de Hamilton-Jacobi diffèrent. Dans ce dernier cas, on cherche à trouver les variables canoniques Q_i et P_i qui sont des constantes du mouvement alors qu'ici le but est d'associer $\dot{Q}_i = \omega_i$ et P_i aux invariants.

	Approche 1 (cas général)	Approche 1 (conservatif)	Approche 2 (conservatif)
H	$H(q_i, p_i, t)$	$H(q_i, p_i)$	$H(q_i, p_i)$
Q_i	$\beta_i = \text{const.}$	$\beta_i = \text{const.}$	$\gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i$
P_i	$\alpha_i = \text{const.}$	$\alpha_i = \text{const.}$	$\alpha_i = \text{const.}$
$H'(Q_i, P_i)$	0	$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1$	$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1$
$\dot{Q}_i$	$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0$	$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0$	$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i$
$\dot{P}_i$	$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$	$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$	$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$
p_i	$p_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i}$	$p_i = \frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial q_i}$	$p_i = \frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial q_i}$
Q_i	$Q_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i$	$Q_i = \frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \beta_i$	$Q_i = \frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \omega_i t + \beta_i$
équ. de H-J	$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$	$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0$	$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0$

Il va de soi que les deux approches sont valables pour un système conservatif.

4.7.4 Quelques exemples

Exemple 4.15



Oscillateur harmonique en x et y

Illustrons la méthode par un exemple simple, soit un problème

physique décrit par

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (4.213)$$

Ici, H ne dépend pas du temps, donc on peut écrire

$$S(q_i, \alpha_i, t) = S(x, y, z, \alpha_i, t) = -\alpha_1 t + W(x, y, z, \alpha_i). \quad (4.214)$$

De plus, z est une variable cyclique et nous pouvons écrire

$$W(x, y, z, \alpha_i) = \alpha_2 z + W'(x, y, \alpha_3). \quad (4.215)$$

Nous aurons donc

$$p_x = \frac{\partial W'}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial W'}{\partial y}, \quad p_z = \alpha_2. \quad (4.216)$$

L'équation caractéristique de H.-J. sera, de

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) - \alpha_1 = 0 \quad (4.217)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W'}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W'}{\partial y} \right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - \alpha_1 = 0 \quad (4.218)$$



C'est une équation différentielle (non linéaire). Cependant la forme relativement simple de l'équation permet d'espérer qu'une séparation de variables

$$W' = W_x(x) + W_y(y) \quad (4.219)$$

on obtient

$$\frac{\partial W'}{\partial x} = \frac{dW_x(x)}{dx} \quad \frac{\partial W'}{\partial y} = \frac{dW_y(y)}{dy}.$$

donnera des résultats. On obtient en effet alors, en regroupant

$$\underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x}{dx} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} y^2 + \frac{\alpha_2^2}{2m}}_{\text{constante}} - \alpha_1 = 0. \quad (4.220)$$

Les deux premiers termes contiennent toute et seulement la dépendance en x , leur somme doit donc être égale à une constante que nous appellerons α_3^2 . Ceci nous laisse

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_x}{dx} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \alpha_3^2 \quad (4.221)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_y}{dy} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} y^2 + \alpha_3^2 + \frac{\alpha_2^2}{2m} - \alpha_1 = 0. \quad (4.222)$$

Ainsi donc les deux termes en y sont aussi égaux à une constante mais ici il n'est pas nécessaire d'en introduire une nouvelle. Nous aurons donc trois constantes $\alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ qui représentent les trois nouveaux moments, P_i , ce qui est correct puisque nous avons trois degrés de liberté. Isolant les dérivées ci-dessus nous obtenons

$$\frac{dW_x}{dx} = \sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2} \quad (4.223)$$

$$\frac{dW_y}{dy} = \sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2} \quad (4.224)$$

ou

$$W_x = \int \sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2} dx \quad (4.225)$$

$$W_y = \int \sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2} dy. \quad (4.226)$$

Souvent il n'est pas nécessaire de faire ces intégrales puisque nous n'avons pas besoin de W en soi. Ici, S s'écrira donc

$$\begin{aligned} S = & -\alpha_1 t + \alpha_2 z + \int \sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2} dx \\ & + \int \sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2} dy \end{aligned} \quad (4.227)$$

Maintenant, il reste à appliquer les règles de transformation pour une transformation canonique de type F_2 c'est-à-dire où nous savons que

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \beta_i : \text{constante} \quad (4.228)$$

ce que se lira ici, avec α_i et β_i constantes

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}. \quad (4.229)$$

Explicitement nous aurons donc

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = 2m\alpha_3 \int \frac{dx}{\sqrt{2m\alpha_3^2 - m^2\omega^2 x^2}} \\ &\quad - 2m\alpha_3 \int \frac{dy}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2}} \end{aligned} \quad (4.230)$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = z - \alpha_2 \int \frac{dy}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2}} \quad (4.231)$$

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + m \int \frac{dy}{\sqrt{2m\alpha_1 - 2m\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - m^2\omega^2 y^2}} \quad (4.232)$$

Si on intègre les équations pour β_3 et β_2 , nous obtiendrons deux expressions du type

$$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3) = 0 \quad (4.233)$$

$$g(y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2) = 0. \quad (4.234)$$

Comme nous avons 3 dimensions, ces deux équations satisfaites simultanément nous laissent un espace à une dimension : la trajectoire, exprimée en termes de x, y et z , sans la dépendance en temps. En d'autres termes $f = 0$ et $g = 0$ laissent une des coordonnées indépendante, disons y et inversant f et g on peut en principe écrire

$$x = x(y, \alpha_i, \beta_2, \beta_3) \quad (4.235)$$

$$z = z(y, \alpha_i, \beta_2, \beta_3). \quad (4.236)$$

La dernière équation, celle en β_1 donne $y = y(t, \alpha_i, \beta_1)$.

C'est de là qu'on obtient le développement dans le temps de la trajectoire. Dans un certain nombre de cas, cette dépendance en t n'est pas le but recherché et on peut alors se limiter aux deux premières qui nous donnent la trajectoire uniquement en fonction des coordonnées.

Voyons voir ce que cela donne ici.

$$\beta_3 = \frac{2\alpha_3}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{x\omega\sqrt{m}}{\alpha_3\sqrt{2}} \right] - \frac{2\alpha_3}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}}} \right], \quad (4.237)$$

$$\beta_2 = z - \frac{\alpha_2}{m\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}}} \right] \quad (4.238)$$

et

$$\beta_1 = -t + \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}}} \right]. \quad (4.239)$$

Des deux premières expressions nous tirons $x(y)$ et $z(y)$ après un peu d'algèbre élémentaire

$$x(y) = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\alpha_3}{\omega} \sin \left(\frac{\omega\beta_3}{2\alpha_3} + \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}}} \right] \right) \quad (4.240)$$

$$z(y) = \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m\omega} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}}} \right] \quad (4.241)$$

qui sont les expressions donnant la trajectoire sous la forme $x = x(y)$ et $z = z(y)$. L'équation en β_1 donne

$$y(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}} \sin(\omega t + \omega\beta_1). \quad (4.242)$$

ou

$$\sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}}} \right] = \omega t + \omega\beta_1 \quad (4.243)$$

Dans le problème étudié, il est évident que le mouvement en x et y est harmonique de fréquence ω et le mouvement en z est libre. Clairement la solution $y(t)$ est de la bonne forme

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \delta) \quad \text{avec } \delta = \omega\beta_1. \quad (4.244)$$

Remplaçant ce résultat dans les solutions $x(y)$ et $z(y)$, nous obtenons

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{\alpha_3}{\omega} \sin \left[\omega t + \omega \left(\beta_1 + \frac{\beta_3}{2\alpha_3} \right) \right] \quad (4.245)$$

aussi de la forme

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \Delta) \quad \text{avec } \Delta = \omega \left(\beta_1 + \frac{\beta_3}{2\alpha_3} \right). \quad (4.246)$$

et

$$\begin{aligned} z &= \beta_2 + \frac{\alpha_2}{m} (t + \beta_1) \\ &= \frac{\alpha_2}{m} t + \left(\beta_2 + \frac{\alpha_2 \beta_1}{m} \right) \end{aligned} \quad (4.247)$$

de la bonne forme

$$z = v_z t + z_0 \quad \text{avec } v_z = \frac{\alpha_2}{m} \text{ et } z_0 = \left(\beta_2 + \frac{\alpha_2 \beta_1}{m} \right) \quad (4.248)$$

où v_z est une vitesse constante. On voit directement ici comment relier les constantes α_i et β_i aux conditions initiales du problème :

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t + \Delta) \quad (4.249)$$

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (4.250)$$

$$z(t) = v_z t + z_0 \quad (4.251)$$

où

$$\begin{aligned} X_0 &= \sqrt{\frac{2}{m} \frac{\alpha_3}{\omega}}, & \Delta &= \omega \left(\beta_1 + \frac{\beta_3}{2\alpha_3} \right) \\ Y_0 &= \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2} - \frac{2\alpha_3^2}{m\omega^2} - \frac{\alpha_2^2}{m^2\omega^2}}, & \delta &= \omega\beta_1 \\ v_z &= \frac{\alpha_2}{m}, & z_0 &= \left(\beta_2 + \frac{\alpha_2 \beta_1}{m} \right) \end{aligned}$$

L'exemple ci-dessus est simple mais il illustre de façon claire que pour la première fois nous obtenons la trajectoire sans passer par une équation du mouvement se ramenant à $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. La méthode est

appréciée pour son intérêt théorique, notamment pour son utilité en optique ! et lorsqu'on cherche la trajectoire sous la forme

$$x = x(y), \quad z = z(y) \quad (4.252)$$

plutôt que sous la forme

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (4.253)$$

Exemple 4.16

Problème avec symétrie sphérique

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , où

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

l'hamiltonien est donné par

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right] + V(r, \theta, \phi)$$

Si le potentiel V peut s'écrire

$$V(r, \theta, \phi) = V_r(r) + \frac{V_\theta(\theta)}{r^2} + \frac{V_\phi(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta}$$

où $V_r(r)$, $V_\theta(\theta)$ et $V_\phi(\phi)$ sont des fonctions arbitraires, alors l'équation de Hamilton-Jacobi est complètement séparable. Il est alors possible d'exprimer l'action comme

$$S = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\phi(\phi) - Et$$

où E est α_1 , ce qui mène à l'équation de Hamilton-Jacobi suivante

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + 2mV_r(r) \right] + \frac{1}{2mr^2} \left[\left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + 2mV_\theta(\theta) \right] \\ & + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{dW_\phi}{d\phi} \right)^2 + 2mV_\phi(\phi) \right] \end{aligned}$$

Cette équation peut être séparée et en principe, intégrer de façon successive. D'abord, la dépendance en ϕ est isolée

$$\left(\frac{dW_\phi}{d\phi} \right)^2 + 2mV_\phi(\phi) = 2mC_\phi \quad (4.254)$$

où C_ϕ est une constante du mouvement. Le reste de l'équation ne dépend plus de ϕ et devient

$$2mE = \left[\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + 2mV_r(r) \right] + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{dW}{d\theta} \right)^2 + 2mV_\theta(\theta) \right] + \frac{2mC_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}$$

Par séparation de variable, on peut ensuite réduire la dépendance en θ à l'expression

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\theta}{d\theta} \right)^2 + V_\theta(\theta) + \frac{C_\phi}{\sin^2 \theta} = C_\theta \quad (4.255)$$

où C_θ est une constante du mouvement. Finalement, l'équation de Hamilton-Jacobi se réduit à sa partie radiale

$$\left(\frac{dW_r}{dr} \right)^2 + 2mV_r(r) + \frac{2mC_\theta}{2mr^2} = 2mE \quad (4.256)$$

En solutionnant les trois équations différentielles ordinaires (4.254), (4.255) et (4.256), on trouve la solution complète pour

l'action S soit

$$W_\phi = \sqrt{2m} \int \sqrt{C_\phi - V_\phi(\phi)} d\phi$$

$$W_\theta = \sqrt{2m} \int \sqrt{C_\theta - V_\theta(\theta) - \frac{C_\phi}{\sin^2 \theta}} d\theta$$

$$W_r = \sqrt{2m} \int \sqrt{E - V_r(r) - \frac{C_\theta}{2mr^2}} dr.$$

où E , C_ϕ et C_θ sont des constantes du mouvement. S'il y a symétrie sphérique c'est-à-dire $V_\theta(\theta) = V_\phi(\phi) = 0$ on a

$$W_\phi = \sqrt{2m} \int \sqrt{C_\phi} d\phi = \sqrt{C_\phi} \phi$$

$$W_\theta = \sqrt{2m} \int \sqrt{C_\theta - \frac{C_\phi}{\sin^2 \theta}} d\theta$$

$$W_r = \sqrt{2m} \int \sqrt{E - V_{\text{eff.}}(r)} dr.$$

où $V_{\text{eff.}}(r)$ est le potentiel efficace

$$V_{\text{eff.}}(r) = V_r(r) + \frac{1}{2} \frac{C_\theta}{mr^2}.$$

Le deuxième terme est l'énergie de rotation $L^2/2I$ avec un moment d'inertie $I = mr^2$ et un moment cinétique $L = \sqrt{C_\theta}$. 

Exemple 4.17

Problème avec symétrie cylindrique elliptique

Considérons le cas où un problème possède une symétrie cylindrique elliptique. Il convient alors d'utiliser les coordonnées cylindriques elliptiques sont données par

$$x = a \cosh \mu \cos \nu$$

$$y = a \sinh \mu \sin \nu$$

$$z = z$$

et l'hamiltonien est donné l'expression

$$H = \frac{p_\mu^2 + p_\nu^2}{2ma^2 (\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu)} + \frac{p_z^2}{2m} + V(\mu, \nu, z)$$

où les foyers de l'ellipse se situent sur l'axe des x aux points $x = \pm a$. L'équation d'Hamilton–Jacobi est alors complètement

séparable si le potentiel peut s'écrire sous la forme

$$V(\mu, \nu, z) = \frac{V_\mu(\mu) + V_\nu(\nu)}{\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu} + V_z(z)$$

où $V_\mu(\mu)$, $V_\nu(\nu)$ et $V_z(z)$ sont des fonctions arbitraires. Procédant comme dans l'exemple précédent, on écrit l'action

$$S = W_\mu(\mu) + W_\nu(\nu) + W_z(z) - Et$$

ce qui mène à l'équation de Hamilton-Jacobi

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z}{dz} \right)^2 + V_z(z) + \frac{1}{2ma^2 (\sinh^2 \mu + \sin^2 \nu)} \times \left[\left(\frac{dW_\mu}{d\mu} \right)^2 + \left(\frac{dW_\nu}{d\nu} \right)^2 + 2ma^2 V_\mu(\mu) + 2ma^2 V_\nu(\nu) \right]$$

Alors par séparation de variables, on a

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z}{dz} \right)^2 + V_z(z) = C_z$$

Ceci permet d'isoler la dépendance en μ et ν à

$$\left(\frac{dW_\mu}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dW_\nu}{d\nu}\right)^2 + 2ma^2V_\mu(\mu) + 2ma^2V_\nu(\nu) = 2ma^2(\sinh^2\mu + \sin^2\nu)(E - C_z)$$

ou

$$0 = \left[\left(\frac{dW_\mu}{d\mu}\right)^2 + 2ma^2V_\mu(\mu) + 2ma^2(C_z - E)\sinh^2\mu \right] + \left[\left(\frac{dW_\nu}{d\nu}\right)^2 + 2ma^2V_\nu(\nu) + 2ma^2(C_z - E)\sin^2\nu \right]$$

Par séparation de variables, on obtient deux autres équations différentielles ordinaires

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\mu}{d\mu}\right)^2 + a^2V_\mu(\mu) + a^2(C_z - E)\sinh^2\mu = C_\mu$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\nu}{d\nu}\right)^2 + a^2V_\nu(\nu) + a^2(C_z - E)\sin^2\nu = C_\nu = -C_\mu$$

ce qui permet en principe de trouver la solution complète pour S .

Alors

$$W_z = \sqrt{2m} \int \sqrt{C_z - V_z(z)} dz$$

$$W_\mu = \sqrt{2m} \int \sqrt{C_\mu - a^2 (V_\mu(\mu) + (C_z - E) \sinh^2 \mu)} d\mu$$

$$W_v = \sqrt{2m} \int \sqrt{-C_\mu - a^2 (V_v(v) + (C_z - E) \sin^2 v)} dv.$$

où E, C_z et C_μ sont des constantes du mouvement.



Exemple 4.18



Problème avec symétrie cylindrique parabolique

Considérons le cas où un problème possède une symétrie cylindrique parabolique. Les coordonnées cylindriques paraboliques sont données par

$$\begin{aligned} x &= \sigma\tau \\ y &= \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z &= z \end{aligned}$$

et l'hamiltonien est donné l'expression

$$H = \frac{p_\sigma^2 + p_\tau^2}{2m(\sigma^2 + \tau^2)} + \frac{p_z^2}{2m} + V(\sigma, \tau, z)$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi est alors complètement séparable si le potentiel peut s'écrire sous la forme

$$V(\sigma, \tau, z) = \frac{V_\sigma(\sigma) + V_\tau(\tau)}{\sigma^2 + \tau^2} + V_z(z)$$

où $V_\sigma(\sigma)$, $V_\tau(\tau)$ et $V_z(z)$ sont des fonctions arbitraires, alors l'équation de Hamilton-Jacobi est complètement séparable. Il est alors possible d'exprimer l'action comme

$$S = W_\sigma(\sigma) + W_\tau(\tau) + W_z(z) - Et$$

ce qui mène à l'équation de Hamilton-Jacobi suivante

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z}{dz} \right)^2 + V_z(z) + \frac{1}{2m(\sigma^2 + \tau^2)} \\ & \times \left[\left(\frac{dW_\sigma}{d\sigma} \right)^2 + \left(\frac{dW_\tau}{d\tau} \right)^2 + 2mV_\sigma(\sigma) + 2mV_\tau(\tau) \right] \end{aligned}$$

Alors par séparation de variables, on a

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_z}{dz} \right)^2 + V_z(z) = C_z$$

Le reste de l'équation ne dépend plus de z et devient

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\sigma}{d\sigma} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\tau}{d\tau} \right)^2 + V_\sigma(\sigma) + V_\tau(\tau) = (\sigma^2 + \tau^2) (E - C_z)$$

ou

$$0 = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\sigma}{d\sigma} \right)^2 + V_\sigma(\sigma) + \sigma^2 (C_z - E) \right] + \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\tau}{d\tau} \right)^2 + V_\tau(\tau) + \tau^2 (C_z - E) \right]$$

Par séparation de variables, on obtient deux autres équations

différentielles ordinaires

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\sigma}{d\sigma} \right)^2 + V_\sigma(\sigma) + \sigma^2 (C_z - E) = C_\sigma$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_\tau}{d\tau} \right)^2 + V_\tau(\tau) + \tau^2 (C_z - E) = C_\tau = -C_\sigma$$

ce qui permet en principe de trouver la solution complète pour S . Comme précédemment on peut alors écrire une expression pour W_z, W_σ et W_τ . 

4.8 L'énergie cinétique $T(q_i, p_i)$ en coordonnées généralisées

Nous avons vu dans le cadre lagrangien que l'énergie cinétique s'écrit de façon générale en fonction des vitesses $\dot{q}_i$:

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i,j} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.257)$$

Ainsi les moments généralisés (absence d'interaction dépendant de $\mathbf{v}$) sont

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m \sum_i g_{ik} \dot{q}_i \quad (4.258)$$

en utilisant la symétrie $g_{ik} = g_{ki}$ (espace de Riemann). On peut écrire cette équation de façon matricielle

$$p = mg\dot{q} \quad (4.259)$$

où

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix} \quad (4.260)$$

et m est la masse, un simple nombre. Multipliant de la gauche par $\frac{g^{-1}}{m}$ où g^{-1} est la matrice inverse de g , c'est-à-dire

$$g^{-1}g = gg^{-1} = I = \text{la matrice identité} \quad (4.261)$$

on obtient

$$\frac{1}{m}g^{-1}p = \dot{q} \quad (4.262)$$

ou de façon explicite

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m} \sum_j (g^{-1})_{ij} p_j. \quad (4.263)$$

Utilisant la notation matricielle on peut écrire

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^T g \dot{q} \quad (4.264)$$

et donc en formalisme de Hamilton où $T = T(p)$ nous aurons

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2} \left(\frac{1}{m} g^{-1} p \right)^T g \left(\frac{1}{m} g^{-1} p \right) \\
 &= \frac{1}{2m} p^T (g^{-1})^T g g^{-1} p \\
 &= \frac{1}{2m} p^T (g^{-1})^T p
 \end{aligned} \tag{4.265}$$

ou explicitement

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j} p_i (g^{-1})_{ij}^T p_j \\
 &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j} p_i g_{ji}^{-1} p_j
 \end{aligned} \tag{4.266}$$

Lorsque g est diagonal, ces opérations sont encore plus simplifiées puisque alors $g_{ij} = g_{ii} \delta_{ij}$ et que les opérations de transposition sont sans effet. Par exemple nous avons vu qu'en coordonnées sphériques, $q_i = (r, \theta, \varphi)$, la métrique

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \tag{4.267}$$

Trivialement

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (4.268)$$

donc ici

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} \left[1 \cdot p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\varphi^2 \right] \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

ce qui est le bon résultat et est de la forme

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j} p_i g_{ij}^{-1} \delta_{ij} p_j \\ &= \frac{1}{2m} \sum_i g_{ii}^{-1} p_i^2 \end{aligned}$$

qui est générale pour les cas où la métrique g est diagonale.

4.9 Interprétation de la fonction S

La procédure pour arriver à l'équation d'Hamilton-Jacobi voit apparaître une fonction génératrice de transformation canonique et

dénotée S . Nous avons déjà utilisé ce symbole pour désigner l'action. Ici, S est défini par

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (4.269)$$

où $S = S(q_i, \alpha_i, t)$. Nous avons donc, calculant la dérivée totale de S par rapport au paramètre t ,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \\ &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.270)$$

puisque $\dot{\alpha}_i = 0$, et

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad (4.271)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L \quad (4.272)$$

ou

$$dS = L dt \quad (4.273)$$

ou

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (4.274)$$

cuperont des positions fixes dans l'espace des configurations. De la même façon, une surface définie par $S(\mathbf{q}, t) = a$ où a est une constante obéit à l'équation suivante

$$W(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q}, t) + Et = a + Et$$

Autrement dit, chaque valeur de t définit une surface d'action réduite $W(\mathbf{q})$ constante et la succession de ces surfaces apparaît comme un déplacement d'une surface dans l'espace des configurations. Dans ce sens, on peut considérer ces surfaces comme des fronts d'ondes se propageant dans l'espace des configurations et leur mouvement est celui décrit par les particules qui sont situées sur le front d'onde.

On note par ailleurs que

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

Lorsqu'évaluées à la surface $S(q, t) = a$, les variables p_i pointent donc dans la direction orthogonale à la surface, c'est-à-dire la direction de propagation normale d'un front d'onde.

Ces deux propriétés, propagation des fronts d'onde et trajectoires orthogonales, rappellent celles de l'optique géométrique. Mais cette analogie est-elle plus qu'accidentelle ?

L'optique géométrique est caractérisée par un certain nombre de propriétés :

1. Un front d'onde de lumière est décrit par une phase constante $\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$, où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$) et ω est la fréquence angulaire.
2. Lorsque la lumière se déplace dans un milieu inhomogène, la vitesse de phase des ondes u dépend de l'indice de réfraction $\eta(\mathbf{r})$ qui à son tour dépend de la position,

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{c}{\eta(\mathbf{r})},$$

où ds étant une distance infinitésimale parcourue par le front d'ondes pendant un temps dt et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Un tel milieu engendre alors des déformations du front d'onde puisque chacune de ses parties se propage à une vitesse qui varie selon sa position.

3. La trajectoire des rayons lumineux est orthogonale au front d'onde. Elle obéit à un principe de minimisation (du chemin optique L), le principe de Fermat

$$\delta L = \delta \int_{t_1}^{t_2} c dt = \delta \int_{x_1}^{x_2} \eta ds = 0$$

entre deux points dans l'espace des configurations x_1 et x_2 .

4.10.2 Action et phase ★★

Considérons une particule de masse m dans un potentiel $V(q)$. Nous avons vu que les surfaces

$$S(q, t) = \text{constante}$$

sont l'équivalent de fronts d'onde. Un front d'onde de lumière est décrit par une phase constante $\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$, où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$) et ω est la fréquence angulaire. Cela suggère une correspondance entre action et phase.

4.10.3 Vitesse de phase ★★

Lorsque la lumière se déplace dans un milieu inhomogène, la vitesse de phase des ondes u dépend de l'indice de réfraction $\eta(\mathbf{r})$ qui à son tour dépend de la position,

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{c}{\eta(\mathbf{r})},$$

où ds étant une distance infinitésimale parcourue par le front d'ondes pendant un temps dt et c est la vitesse de la lumière dans le vide. Un tel milieu engendre alors des déformations du front d'onde puisque chacune de ses parties se propage à une vitesse qui varie selon sa position.

Mais alors, comment peut-on définir une vitesse de phase pour la surface $S = \text{constante}$?

Considérons la variation dW due à un déplacement ds dans la direction orthogonale à cette surface $d\mathbf{s} = ds\mathbf{e}_\perp$. Cette variation est donnée par le gradient

$$dW = \nabla W \cdot d\mathbf{s} = (\nabla W \cdot \mathbf{e}_\perp) ds = |\nabla W| ds$$

Rappelons que l'équation de Hamilton-Jacobi pour un système en 3D s'écrit

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + V = E \quad (4.275)$$

ou plus simplement

$$\frac{1}{2m} (\nabla W)^2 + V = E \quad (4.276)$$

De plus, pour une surface S constante,

$$dW = E dt.$$

Cette surface se déplace donc à la vitesse

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla W|} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}} \quad (4.277)$$

En conséquence, la vitesse de phase u n'est pas uniforme puisque V dépend de la position. Il y a aura donc déformation de la surface en général.

Par ailleurs, la vitesse de phase u ne correspond pas à la vitesse v de la particule qui obéit plutôt à la relation

$$T = E - V = \frac{1}{2}mv^2$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}$$

En prenant le produit des deux vitesses

$$uv = \frac{E}{m}. \quad (4.278)$$

on retrouve l'analogie de la relation entre la vitesse de phase u et la vitesse de groupe v pour une onde

$$uv = \frac{c^2}{\eta^2}.$$

L'analogie entre la mécanique et la lumière dans le vide suggère alors un résultat étonnant

$$E = mc^2. \quad (4.279)$$

4.10.4 Indice de réfraction d'un "milieu » mécanique ★★

En optique géométrique, on minimise le chemin optique L (principe de Fermat)

$$\delta L = \delta \int \eta ds = 0 \quad (4.280)$$

alors qu'en mécanique on minimise l'action

$$\delta W = \delta \int \sqrt{2m(E - V)} ds = 0$$

Le résultat dans le premier cas est l'équation eikonale, l'équation fondamentale régissant le trajet de la lumière dans un milieu qui permet de démontrer toutes les autres lois, telles que les lois de Snell-Descartes et de déterminer les trajectoires des rayons lumineux. Dans un milieu d'indice de réfraction η , la propagation d'une onde lumineuse est caractérisée par une longueur de chemin optique L qui obéit à l'équation eikonale

$$(\nabla L)^2 = \eta^2 \quad (4.281)$$

En mécanique, c'est l'équation de Hamilton-Jacobi qui détermine la propagation des surfaces avec S constante

$$(\nabla W)^2 = 2m(E - V) \quad (4.282)$$

suggérant un indice de réfraction d'un "milieu » mécanique correspondant à

$$\eta_{\text{méc.}} = \sqrt{2m(E - V)}.$$

Fréquence et longueur d'onde d'une particule ★★

Nous avons vu qu'un front d'onde de lumière est décrit par une phase constante

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = 2\pi \left(\frac{L(\mathbf{r})}{\lambda_0} - \nu t \right),$$

où $L(\mathbf{r})$ est le chemin optique, λ_0 la longueur d'onde dans le vide et $\nu = \omega/2\pi$ est la fréquence. En mécanique, le « front d'onde » est défini par une action constante

$$S(\mathbf{q}, t) = W(\mathbf{q}) - Et = \text{constante.}$$

Associant les termes dépendant de la position et du temps respectivement

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = 2\pi \left(\frac{L(r)}{\lambda_0} - \nu t \right)$$

$$\Downarrow \quad (4.283)$$

$$S(q, t) = W(q) - Et \quad (4.284)$$

on voit que W joue le rôle du chemin optique à une constante multiplicative près, que l'énergie mécanique E doit être proportionnelle à la fréquence ν de l'onde associée. Il est donc permis d'interpréter

$$E = h\nu \quad (4.285)$$

où la constante h est la constante de Planck. De la même manière, la longueur d'onde étant $k = 2\pi/\lambda$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{\left(\frac{E}{m}\right)}{\left(\frac{E}{h}\right)} = \frac{h}{m} = \frac{2\pi}{k}$$

et puisque $p = mv$ pour une particule, on obtient

$$p = mv = m \left(\frac{E}{mu} \right) = \frac{h\nu}{u} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k. \quad (4.286)$$

On reconnaît la relation entre l'impulsion et la longueur d'onde proposée par de Broglie.

En résumé, les équivalents optique-mécanique se lisent donc

Optique géométrique	Mécanique
L	W
η	$\eta_{\text{méc.}} = \sqrt{2m(E - V)}$
Principe de Fermat	Principe de moindre action

4.10.5 Équation d'onde ★★

L'optique géométrique ne fournit aucune explication de phénomènes ondulatoires tels que la diffraction ou les interférences. En fait, elle ne sert que d'approximation à la théorie plus fondamentale

décrivant les ondes électromagnétiques qu'est l'électromagnétisme (équations de Maxwell).

Si il y a plus qu'une simple analogie entre mécanique et optique géométrique, alors on est en droit de se demander ce que serait l'équivalent des équations de Maxwell et si des phénomènes de diffraction ou d'interférence sont possibles en mécanique.

Considérons l'équation d'onde générale qui découle des équations de Maxwell

$$(\nabla^2 - \frac{\eta^2}{c^2} \frac{d^2}{dt^2})\psi = 0 \quad (4.287)$$

Pour des solutions de type ondes planes

$$\psi = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

et l'équation d'onde prend la forme

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{u^2})\psi = 0.$$

Si l'on suppose qu'il existe une équation d'onde plus fondamentale en mécanique qui est équivalente à celle de l'électromagnétisme, alors il est permis d'introduire une fonction Ψ en

mécanique qui obéit à

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{u^2})\Psi = 0$$

$$\nabla^2\Psi + \frac{p^2}{\hbar^2}\Psi = 0$$

où on a utilisé $u = \frac{c}{\eta}$, et $p = \frac{\hbar v}{u}$. En multipliant par $\frac{\hbar^2}{2m}$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + (E - V)\Psi = 0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = E\Psi$$

$$H\Psi = E\Psi$$

on reconnaît la version stationnaire de l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique. Ψ est la fonction d'onde et H , l'opérateur hamiltonien.

Hamilton lui-même en 1834 avait remarqué l'équivalence entre l'équation de Hamilton-Jacobi et l'équation eikonale. Bien sûr à cette époque, il n'existe pas de résultats expérimentaux suggérant des propriétés ondulatoires de la matière. Ce ne fut que beaucoup plus tard en 1926, que la nature ondulatoire et l'équation d'onde furent proposée par de Broglie et Schrödinger respectivement.

Si on persiste dans l'analogie et qu'on propose des fonctions d'ondes de la forme

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 e^{i\frac{S(\mathbf{r}, t)}{\hbar}}$$

alors lorsque substituée dans l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{i\hbar}{2m}\nabla\cdot(\Psi\nabla S) + V\Psi &= -\Psi\frac{\partial S}{\partial t} \\ \frac{1}{2m}\Psi(\nabla S)^2 - \frac{i\hbar}{2m}\Psi\nabla^2 S + V\Psi &= -\Psi\frac{\partial S}{\partial t} \\ \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} + V &= \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2 S. \end{aligned}$$

Puisqu'on a seulement effectué un changement de variables de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ à $S(\mathbf{r}, t)$, cette équation reste tout à fait équivalente à l'équation de Schrödinger. Par ailleurs, sous cette forme, on reconnaît l'équation de Hamilton-Jacobi si le membre de droite est nul, c'est-à-dire lorsque on prend la limite classique $\hbar \rightarrow 0$. (Noter que formellement, la limite classique ne peut être simplement décrite par $\hbar \rightarrow 0$ puisque $\hbar$ est dimensionné et donc sa valeur numérique dépend du choix des unités ; elle doit plutôt être décrite en fonction d'un rapport de quantités physiques qui tend vers zéro.)

Par ailleurs, $\hbar$ a été introduit ici sans qu'il n'ait été fait aucune mention de quantification. Le traitement ne nécessite d'ailleurs pas que l'énergie ou l'action prennent des valeurs quantifiées. Ce qu'on a plutôt relevé, c'est la nature ondulatoire de la matière avec les phénomènes qui s'y rattachent (interférences, diffraction,...). La quantification en tant que requiert une hypothèse supplémentaire propre à la mécanique quantique de laquelle découle une discrétisation des valeurs prises par l'action S et l'énergie E d'une particule.

4.11 L'espace des phases ★

Rappelons que l'état d'un système à un instant t peut être représenté par un point

$$X(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

dans un espace à $2n$ dimensions, appelé l'espace des phases. Mathématiquement, il ne s'agit pas d'un espace vectoriel mais plutôt d'une variété différentiable, une classe d'équivalence d'atlas. Cet espace des phases est naturellement muni de la forme symplectique ω , définie par

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

où $\wedge$ dénote le produit extérieur.

Remarque 4.10

i Le produit extérieur $\wedge$ de deux vecteurs de l'espace vectoriel E , appelé bivecteur, n'est pas un vecteur du même espace mais d'un nouvel espace, noté $\wedge^2(E)$. Il s'apparente au produit vectoriel sauf que le produit extérieur est défini pour tout espace vectoriel alors que le produit vectoriel n'est défini que dans un espace à 3 dimensions. **i**

L'espace des phases est un outil omniprésent en physique théorique notamment en physique statistique. Il est associé à tout un ensemble de propriétés formelles des systèmes dynamiques.

4.11.1 Flot hamiltonien ★

L'évolution temporelle d'un système se résume à une version compacte des équations canoniques

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = g_H^t(x, t) \quad (4.288)$$

où le vecteur

$$g_H^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

désigne le « champ de vitesses » au point x . La solution décrit une trajectoire dans l'espace des phases. La quantité g_H^t est appelé flot

hamiltonien, par analogie avec la mécanique des fluides.

Le flot hamiltonien a une structure de groupe :

1. Il possède une loi interne,
2. On peut y définir un élément neutre,
3. Chaque élément possède un élément inverse,
4. Il possède la propriété d'associativité

Un théorème proposé par Cauchy suggère que :

Théorème 4.2

Théorème de Cauchy :

Pour des conditions initiales données $\dot{x}_0 = \dot{x}(t = t_0)$, la solution $\dot{x}(t)$ de l'équation (4.288) existe et est unique pour un temps t fini.

Intuitivement cela semble logique : si deux trajectoires passent par le même point x à un instant donné $t = t_0$, elles doivent être identiques puisque les équations de mouvement prédisent alors la même trajectoire pour $t > t_0$ (ainsi que pour $t < t_0$). Le contraire serait en contradiction avec l'unicité des solutions. On peut penser toutefois à deux exceptions où cet argument ne tient plus :

1. Lorsque la trajectoire contient un ou des points singuliers dans l'espace des phases.
2. Les trajectoires associées à des temps de parcours infinis. Il est possible que dans cette limite des trajectoires convergent.

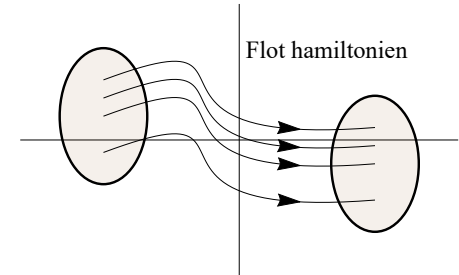


Figure 4.6 ▲

Flot hamiltonien: Un volume V quelconque de l'espace des phases est conservé par le flot hamiltonien g_H^t .

4.11.2 Incompressibilité du flot ★

L'analogie avec la mécanique des fluides ne s'arrête pas là. En effet, on peut démontrer que le flot hamiltonien est incompressible.

Conservation du volume ★

Par incompressibilité du flot, on entend qu'un volume V quelconque de l'espace des phases est conservé par le flot hamiltonien g_H^t , c'est-à-dire

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (4.289)$$

Pour démontrer cette affirmation, considérons un volume V quelconque dans l'espace des phases. Chacun des points contenus dans ce volume à l'instant t_0 suivra une trajectoire précise dans l'espace des phases déterminée par les équations canoniques définissant ainsi l'évolution du volume à tout instant. Le volume peut se déplacer, tourner mais aussi se déformer, un peu comme un élément de fluide pris dans un écoulement. S'il y a incompressibilité du flot, cela signifie que la déformation due au flot hamiltonien conserve le volume (écoulement incompressible).

Rappelons que la variation de p et q déterminée par les équations de mouvement peut être considérée comme une transformation canonique. Donc, si le volume V ne change pas en fonction du temps, c'est qu'il doit être un invariant canonique.

Pour un espace des phases à $2n$ dimensions, l'élément de volume dV est simplement

$$dV = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

et le volume V s'écrit

$$V = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n.$$

Après une transformation canonique, le volume devient

$$\begin{aligned} V' &= \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n \\ &= \int \dots \int \mathbf{J} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \end{aligned}$$

où $\mathbf{J}$ est le jacobien correspondant au changement de variables

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} & \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \\ \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} & \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

On peut en particulier réécrire $\mathbf{J}$ sous la forme

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{J}_1}{\mathbf{J}_2} = \frac{\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}}{\frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \\ \mathbf{J}_2 &= \frac{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)} = \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \end{aligned} \quad (4.290)$$

Les dernières simplifications proviennent du fait que $\mathbf{J}_1$ et $\mathbf{J}_2$ contiennent une matrice en identité $n \times n$ ($\frac{\partial(P_1, \dots, P_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)}$ et $\frac{\partial(q_1, \dots, q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)}$ respectivement) ce qui permet de réduire le rang du jacobien.

Le volume est un invariant canonique si $V = V'$, c'est-à-dire si le jacobien $\mathbf{J} = 1$ pour toute transformation canonique. Si on choisit comme fonction génératrice de la transformation canonique $F_2(q_i, P_i, t)$, les variables canoniques doivent obéir à la relation

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

alors $\mathbf{J} = 1$, ce qui prouve que un volume V de l'espace des phases est conservé par les équations canoniques.

Invariants intégraux de Poincaré ★★★

À part le volume de l'espace des phases, on peut définir d'autres quantités invariantes par rapport à une transformation canonique. Par exemple, l'intégration de l'espace des phases sur une surface à

2 dimensions S quelconque

$$I_1 = \int \int \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

est un invariant canonique. En effet, posant deux coordonnées u et v indépendantes qui permettent de déterminer tous les points de la surface S alors, on peut effectuer les changements de variables suivants

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(u, v) & p_i &= p_i(u, v) \\ Q_k &= Q_k(u, v) & P_k &= P_k(u, v) \end{aligned}$$

pour tous les indices i et k . Ici on s'intéresse au cas où les variables (Q, P) sont reliées aux (q, p) par une transformation canonique. Il n'y a invariance canonique de I_1 que si

$$I_1 = \int \int \sum_i dq_i \wedge dp_i = \int \int \sum_k \mathbf{J}'_k du dv$$

est égal à

$$I'_1 = \int \int \sum_k dQ_k \wedge dP_k = \int \int \sum_k \mathbf{J}_k du dv$$

c'est-à-dire si

$$\sum_i \mathbf{J}_i = \sum_k \mathbf{J}'_k$$

avec les jacobiens $\mathbf{J}_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)}$ et $\mathbf{J}'_k = \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}$. Utilisant la fonction génératrice $F_2(q, P, t)$ et les propriétés du jacobien, on trouve

$$\mathbf{J}_i = \frac{\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(q_i, P_i)}}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(q_i, P_i)}} = \frac{1}{\mathbf{A}_i} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial q_i}{\partial q_i} & \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \\ \frac{\partial q_i}{\partial P_i} & \frac{\partial p_i}{\partial P_i} \end{array} \right| = \frac{1}{\mathbf{A}_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{1}{\mathbf{A}_i} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial q_i}$$

De la même façon,

$$\mathbf{J}'_k = \frac{\frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(q_k, P_k)}}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(q_k, P_k)}} = \frac{1}{\mathbf{A}_k} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} & \frac{\partial P_k}{\partial q_k} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial P_k} & \frac{\partial P_k}{\partial P_k} \end{array} \right| = \frac{1}{\mathbf{A}_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} = \frac{1}{\mathbf{A}_k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_k \partial P_k}$$

et donc évident que $\sum_i \mathbf{J}_i = \sum_k \mathbf{J}'_k$.

De façon générale, Poincaré a montré que toutes les intégrales de la forme

$$I_s = \int \int \cdots \int \sum_i dq_i \wedge dp_i \quad (4.291)$$

calculées sur une hypersurface S à $2s$ dimensions sont des invariants canoniques, dans un espace des phases à $2n$ dimensions ($n \geq s$). En fait, le cas $s = n$ correspond à la conservation du volume.

4.11.3 Densité d'états et théorème de Liouville ★★

Nous avons vu qu'il y a conservation du volume V de l'espace des phases par le flot hamiltonien g_H^t , c'est-à-dire

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (4.292)$$

Le théorème de Liouville établit que

Théorème 4.3

Théorème de Liouville :

La densité d'états d'un système mécanique au voisinage d'un point de l'espace des phases, $D = dN/dV$ est aussi conservée pendant l'évolution du système, c'est-à-dire

$$\frac{dD}{dt} = 0. \quad (4.293)$$

Ici, dN est le nombre d'états contenus dans le volume dV de l'espace des phases. L'élément de volume dV étant un invariant canonique et le nombre d'états dN restant également constant pendant l'évolution du système (sinon une trajectoire pourrait traverser la surface frontière définissant le volume dV entraînant que deux conditions initiales différentes donneraient le même état), le quotient dN/dV est donc une constante. L'évolution temporelle de la

densité d'états s'écrit

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dD}{dt} - \{D, H\} = \{H, D\}$$

Cependant, c'est surtout en physique statistique, où le nombre de particules N est très grand, que ce théorème prend toute son importance. Ici, la densité d'états est associée à la densité de particules dans un état donné et à l'équilibre statistique, le nombre de particules dans un état donné doit être constant. On obtient $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire

$$\{H, D\} = 0 \quad (4.294)$$

Il suffit donc de poser D comme fonction des constantes du mouvement pour assurer l'équilibre statistique du système. Par exemple, on obtient l'ensemble microcanonique en choisissant $D = D_0 \delta_{E_0}$, c'est-à-dire une constante pour une énergie donnée E_0 , nulle sinon.

4.12 Variables angles-actions ★

Pour un mouvement périodique ou quasi-périodique, il est possible de définir des variables canoniques particulièrement appropriées, les variables angles-actions.

Considérons un système fermé périodique à 1 degré de liberté. Ce système peut manifester deux types de mouvements périodiques :

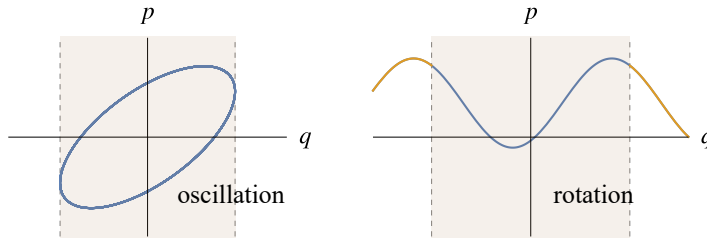


Figure 4.7 ◀▶

Espace des phases pour un mouvement périodique. Deux types sont observés: l'oscillation et la rotation.

1. la libration ou l'oscillation : $q(t)$ et $p(t)$ sont alors des fonctions périodiques de même fréquence. Dans l'espace des phases, la trajectoire y est décrite par une courbe fermée. C'est le cas par exemple d'un pendule qui oscille autour du minimum de potentiel.
2. la rotation (ou circulation) : $q(t)$ n'est pas périodique (dans le sens $q(t) \neq A \sin(\omega t + \phi)$) mais le système est invariant par translation $q + q_0$. Le moment conjugué $p(t)$, quant à lui, reste borné. La trajectoire dans l'espace des phases est ouverte mais q_0 -périodique.

Pour un système à n degrés de liberté, le mouvement sera appelé périodique si la projection de la trajectoire dans le plan défini par chacun des couples de variables (q_i, p_i) est périodique. On dit d'un système qu'il est simplement périodique, si les toutes périodes T_i associées aux degrés de liberté q_i sont égales. Autrement, on parle de mouvement multiplement périodique ou quasi-périodique.

Quoi qu'il en soit, on a affaire à des systèmes pour lesquels

les valeurs que peuvent prendre q_i et p_i , l'espace des phases, est borné. Qui plus est, un mouvement périodique implique que le système est invariant par translation dans le temps, c'est-à-dire que l'hamiltonien H est une constante du mouvement.

La méthode de Hamilton-Jacobi pouvant servir à déterminer la transformation canonique appropriée est alors celle définie dans l'approche 2. Les nouveaux moments vérifient

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$$

et pour un système périodique

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i(P_i) \quad (4.295)$$

$$H' = H(P_i) = \text{constante.} \quad (4.296)$$

où ω_i sont également des invariants, puisque toutes les Q_i sont cycliques et H ne dépend pas explicitement du temps. On trouve alors

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i (\text{dépendance linéaire}) \\ P_i &= \alpha_i = \text{constantes} \end{aligned} \quad (4.297)$$

4.12.1 Variables d'angles ★

Par ailleurs, on sait que les Q_i varient linéairement avec le temps. Puisque nous nous intéressons ici à des systèmes (quasi-)périodiques, ne balayant qu'une partie finie (bornée) de l'espace des phases, cela n'implique que les variables Q_i qu'il est possible de les ramener à des variables sont du type « angle » variant de 0 à 2π .

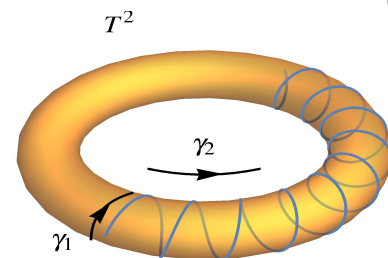


Figure 4.8 ▲
Hypertore T^2 .

On peut donc dire que les angles $\mathbf{Q} = \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ résident sur un hypertore de dimension n , noté $\mathbf{T}^n$ dont les rayons dépendent de $P_i = \alpha_i$ et donc sont des constantes. Un hypertore de dimension n peut être vu comme est le produit tensoriel de n cercles. Autrement dit, un point quelconque $\mathbf{Q}$ sur ce hypertore $\mathbf{T}^n$ est caractérisé par n angles $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, où γ_i est l'angle sur le cercle i de rayon R_i .

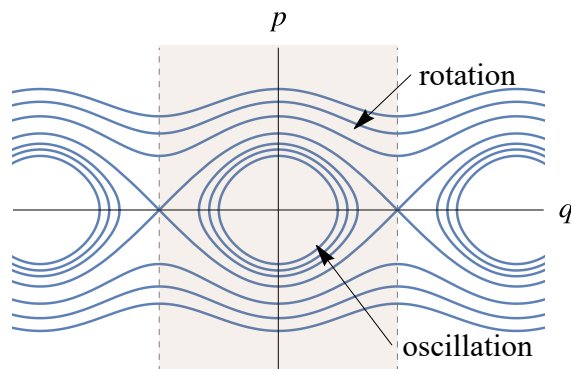


Figure 4.9 ◀▶

Espace des phases d'un pendule simple. Deux types de mouvements périodiques sont observés : l'oscillation et la rotation.

Exemple 4.19**❖ Problème du pendule (1 degré de liberté) :**

Pour le pendule, $H = E$ est un invariant et le mouvement d'oscillation du pendule décrit une ellipse dans l'espace des phases. On peut alors effectuer le changement de variables $(q, p) \rightarrow (\gamma, R)$ et se placer en coordonnées polaires où le rayon $R = R(E)$, directement relié à la valeur de E , est un invariant et la deuxième variable est un angle γ autour de $\mathbf{T}^1$ qui est un cercle

**4.12.2 Variables d'actions ★**

Pour les systèmes conservatifs périodiques, nous avons vu que les nouvelles variables Q_i doivent être des angles γ_i , tel que $0 \leq \gamma_i \leq$

2π . Si c'est le cas, les moments P_i sont des moments angulaires et les ω_i , des fréquences angulaires

$$\omega_i(P_i) = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

Les variables P_i ont des dimensions d'une énergie divisée par une fréquence angulaire, c'est à dire les dimensions d'un moment cinétique ou de l'action. Il est donc approprié de désigner P_i comme des « variables d'actions » et pour mettre en évidence qu'il s'agit de moments cinétiques, nous les dénoterons par $J_i = P_i$ dans ce qui suit.

Exemple 4.20

Système à 1 degré de liberté :

L'espace des phases est de dimension 2 et ce qui nous intéresse, c'est la transformation canonique qui mène aux variables canoniques angle-action suivantes

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \omega t + \beta \\ J(t) &= J = \text{constante.}\end{aligned}$$

L'hamiltonien d'un système à 1 degré de liberté prend la forme générale

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Rappelons que pour un système périodique, l'espace des phases est borné. Puisque H est indépendant du temps, $H = E$ l'énergie du système et on peut écrire

$$p(q) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}.$$

Cette dernière relation définit une aire A dans l'espace des phases dont la forme dépend de E .

$$A(E) = \int \int_A dq dp.$$

Or, cette aire peut être calculée en termes des nouvelles variables canonique

$$\int \int_A dq dp = \int \int_A \frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} dQ dP$$

où le jacobien associé au changement de variable

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{vmatrix}.$$

Mais pour une transformation de type F_2

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{\partial Q}{\partial q}$$

si bien que le jacobien est $\frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)} = 1$ et on trouve que l'aire est laissée invariante par la transformation

$$A(E) = \int \int_A dq dp = \int \int_A dQ dP.$$

Utilisant le théorème de Stokes, on peut réécrire

$$\int \int_A dq dp = \oint_{\Gamma} p dq$$

où Γ est un contour fermé de l'aire, orienté dans le sens gauche ou indirect. Puisque γ est un angle qui prend valeur entre 0 et 2π et que J doit être un invariant, on obtient

$$A(E) = \oint_{\Gamma} p dq = \oint_{\Gamma} J d\gamma = J \int_0^{2\pi} d\gamma = 2\pi J.$$

Autrement dit,

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} p dq. \quad (4.298)$$

ce qui est la variable d'action.



4.12.3 Fonction génératrice ★

La méthode de Hamilton-Jacobi passe par une fonction génératrice du type $F_2(q_j, P_j, t)$ qui obéit aux relations suivantes

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} F_2(q_j, P_j, t) = p_i(q_j, P_j, t) \\ Q_i &= \frac{\partial}{\partial P_i} F_2(q_j, P_j, t) = Q_i(q_j, P_j, t) \\ H' &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.299)$$

Le choix particulier des variables canoniques angles-actions correspond à prendre pour fonction génératrice l'action réduite

$$F_2(q_j, P_j, t) = W(q_j, P_j) = \int \sum_i p_i(q_k, P_k) dq_i \quad (4.300)$$

On s'intéresse encore une fois au cas où H est conservé et $Q_i \equiv \gamma_i$ et $P_i \equiv J_i$. Avec cette notation, on obtient

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} W(q_j, J_j) = p_i(q_j, J_j) \\ \gamma_i &= \frac{\partial}{\partial J_i} W(q_j, J_j) = \gamma_i(q_j, J_j) \\ H' &= H + \frac{\partial W(q_j, J_j)}{\partial t} = H \end{aligned} \quad (4.301)$$

Pour un système périodique,

$$\gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i$$

où $T_i = 2\pi/\omega_i(J_k)$ est l'une des périodes du système, le changement d'angle γ_i entre t et $t + T_i$ est simplement

$$\gamma_i(t + T_i) - \gamma_i(t) = 2\pi$$

mais selon (4.301) et (4.300)

$$\begin{aligned} \gamma_i(t + T_i) - \gamma_i(t) &= \left. \frac{\partial W(q_j, J_j)}{\partial J_i} \right|_{t+T_i} - \left. \frac{\partial W(q_j, J_j)}{\partial J_i} \right|_t = 2\pi \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \left(\int_{q_i(t)}^{q_i(t+T_i)} \sum_k p_k dq_k \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \left(\oint_{\Gamma_i} \sum_k p_k dq_k \right) = \frac{\partial}{\partial J_i} (2\pi J_i) \end{aligned}$$

ce qui démontre que $W(q_j, J_j)$ est bien la fonction génératrice de notre transformation canonique.

Si l'on veut exprimer les variables angles-actions en fonction des anciennes variables (q_i, p_i) , il « suffit » de remplacer les invariants par leur expression en fonction des (q_i, p_i) .

Exemple 4.21**🔍 Retour au système à 1 degré de liberté :**

Si on remplace E par l'expression en fonction des anciennes variables (q_i, p_i) , c'est-à-dire $E = H(q, p)$, alors on peut exprimer les variables angles-actions en fonction de (q_i, p_i)

$$J = J(E) = J(H(q, p)) = J(q, p) \quad (4.302)$$

$$\gamma(t) = \omega(J)t + \beta = \omega(q, p)t + \beta. \quad (4.303)$$

L'exercice inverse n'est pas toujours aussi évident mais plusieurs méthodes sont disponibles :

- (1) Inverser si c'est possible les relations (4.302) et (4.303),
- (2) Si l'on connaît $W(q, E)$ et en inversant $J = J(E)$, alors on peut calculer $\gamma = \gamma(q, J) = \frac{\partial W(q, E(J))}{\partial J}$. Après inversion, on aura $q = q(\gamma, J)$. Puis sachant que $p = p(q, E)$

$$p = p(q, E) = p(q(\gamma, J), E(J)) = p(\gamma, J).$$

(3) Les équations canoniques donnent

$$\begin{aligned}\gamma - \beta &= \omega t = \omega \int_0^t dt = \omega \int_{q_0}^q \frac{dq}{\dot{q}} \\ &= \omega(J) \int_{q_0}^q \frac{dq}{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)}.\end{aligned}$$

Après évaluation de l'intégrale, on obtient une expression $\gamma = \gamma(q, J)$. On procède comme précédemment, c'est-à-dire par inversion pour obtenir $q = q(\gamma, J)$ par substitution pour $p = p(\gamma, J)$.



4.13 Systèmes intégrables ★★★

4.13.1 Théorème d'Arnold-Liouville ★★★

L'accès à des ordinateurs plus puissants permet maintenant de résoudre les équations du mouvement de nombreux systèmes, une fois posées des conditions initiales particulières. Bien qu'utile, cette approche ne nous donne pas de renseignements sur l'ensemble des comportements possibles du système et ne permet pas d'identifier des comportements ou des quantités particuliers (ex : région de stabilité, période d'un système,...) ; il faudrait pour y arriver répéter ces calculs en modifiant les conditions initiales un nombre indéfini de fois. De plus, certains systèmes démontrent une ex-

trême sensibilité aux conditions initiales, les systèmes chaotiques (ex : problème à $N > 2$ corps), pour lesquels l'approche numérique devient déficiente. Pour toutes ces raisons, il est souvent utile de considérer une approche analytique du système. Or, il existe une classe de système où une approche analytique complète est possible, les systèmes intégrables.

Lorsqu'il est possible de déterminer complètement les trajectoires d'un système dans son espace des phases, ce système est dit intégrable.

Théorème 4.4

Théorème d'Arnold-Liouville (1963) :

Un système mécanique à n degrés de liberté est intégrable s'il possède les trois propriétés suivantes :

- (1) Il existe n intégrales premières (ou constantes du mouvement) I_i ;
- (2) Elles sont indépendantes ;
- (3) Elles sont en involution.

La première propriété requiert l'identification des n constantes du mouvement d'un système ou de façon équivalente, de trouver les n symétries du système. Cette approche peut faire appel aux propriétés d'invariance liées à l'espace-temps, aux crochets de Poisson ou simplement à l'intuition physique. Si le système est fermé,

alors on peut identifier $H = I_1$ comme un invariant. Alors, I_i est une intégrale première ou une constante du mouvement si

$$\{I_i, H\} = \{I_i, I_1\} = 0 \quad (4.304)$$

La seconde propriété implique l'indépendance de ces invariants : l'espace formé par l'intersection des surfaces $I_i = Cte$ doit être de dimension n puisqu'il y a n degré de liberté. Combiné à la première propriété, cela établit à $n - 1$ relations sur l'ensemble des I_i (le cas $i = 1$ est trivial).

La troisième propriété exige que les intégrales premières soient en involution, c'est-à-dire que leurs crochets de Poisson vérifient :

$$\{I_i, I_j\} = 0 \quad \text{pour } 1 < i, j \leq n$$

Autrement dit chacune des I_i reste constante pendant l'évolution du système par rapport à la quantité I_j , c'est-à-dire le long du flot $g_{I_j}^t$. Cela généralise (4.304) pour totaliser $n(n-1)/2$ relations. Pour $n = 2$, la condition d'involution est équivalente à celle d'indépendance.

Une conséquence immédiate de ce théorème est que tout système conservatif à 1 degré de liberté est intégrable. Les systèmes intégrables possédant plus d'un degré de liberté sont l'exception plutôt que la règle.

4.13.2 Variables angles-actions ★★★

Pour des systèmes intégrables, le mouvement est souvent périodique ou quasi-périodique. Dans ce cas, les variables angles-actions sont particulièrement appropriées.

Dans le cas d'un système intégrable à n degrés de liberté, on dispose de n invariants I_k indépendants (théorème de Arnold-Liouville). Or, la méthode de Hamilton-Jacobi peut servir ici à déterminer la transformation canonique appropriée. Si on écrit les nouveaux moments en terme des invariants tel que $P_i = P_i(I_k)$, alors

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0$$

De plus, pour un système périodique

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i(P_i) \quad (4.305)$$

$$H' = H(P_i) = \text{constante.} \quad (4.306)$$

où ω_i sont également des invariants, puisque toutes les Q_i sont cycliques et H ne dépend pas explicitement du temps. On trouve alors

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i (\text{dépendance linéaire}) \\ P_i(I_k) &= \alpha_i = \text{constantes} \end{aligned} \quad (4.307)$$

L'espace des phases est borné. Les intégrales premières I_k étant constantes, tout mouvement doit se dérouler dans un « volume » d'espace des phases, de dimension n , désigné par $\mathbf{T}^n$. Celui correspond ici à l'intersection des hypersurfaces $I_k(q_i, p_i) = \text{constante}$.

Par ailleurs, on sait que les Q_i varient linéairement avec le temps. Puisque nous nous intéressons ici à des systèmes (quasi-)périodiques, ne balayant qu'une partie finie (bornée) de l'espace des phases, cela implique que les nouvelles variables Q_i doivent être des angles γ_i , tel que $0 \leq \gamma_i \leq 2\pi$. $\mathbf{T}^n$ est donc un hypertore de dimension n se trouvant dans un espace des phases de dimension $2n$.

Puisque les Q_i sont des angles, les moments P_i sont des moments angulaires, c'est-à-dire possèdent dimensions d'un moment cinétique ou de l'action, et les ω_i , des fréquences angulaires

$$\omega_i(P_i) = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

Exemple 4.22



Problème avec 2 degré de liberté :

Il existe dans ce cas deux invariants, des analogues au rayon de l'exemple précédent, et deux autres variables qui jouent le rôle d'angles. L'espace des phases est un tore $\mathbf{T}^2$ définit les cercles de

rayon R_1 et R_2 . Deux angles γ_1 et γ_2 indiquent la position sur le tore. Puisque γ_1 et γ_2 dépendent linéairement du temps la trajectoire associée au système correspond à une hélice qui s'enroule autour du tore $\mathbf{T}^2$ 

Exemple 4.23 **Système séparable à n degrés de liberté**

Nous avons vu que lorsque que l'hamiltonien est conservé, l'action peut s'écrire (4.203)

$$S(q_i, P_i, t) = W(q_i, P_i) - Et \quad (4.308)$$

où W est l'action réduite ou fonction caractéristique de Hamilton. Il est donc approprié d'utiliser la seconde approche de la section ??

Approche 2 (système conservatif)

$$P_1 = H = H(q_i, p_i) = \alpha_1 = E = \text{énergie constante}$$

$$Q_i = \frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i \quad (\text{variables angles : dépendance linéaire})$$

$$P_i(I_k) = J_i(I_k) = \alpha_i \quad (\text{variables action : constantes})$$

$$p_i = \frac{\partial W(q_i, \alpha_i)}{\partial q_i}.$$

Dans le cas d'un système séparable à n degrés de liberté, l'action

réduite peut être séparée en une somme d'actions « partielles » indépendantes

$$W(q_i, P_i) = \int \sum_i p_i dq_i = \sum_i W_i(q_i, I_k) = W_1(q_1, I_k) + W_2(q_2, I_k) + \dots$$

où nous avons mis en évidence que $P_i = P_i(I_k)$, c'est-à-dire que les P_i dépendent des n invariants I_k . Puisque chaque moment conjugué p_i est défini par

$$p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i(q_i, I_k)$$

la séparation de variable a pour conséquence que chaque p_i n'est fonction que d'une seule variable conjuguée q_i (et des n invariants I_k). Donc, les paires de variables canoniques (q_i, p_i) sont indépendantes les unes des autres, tout comme chacun des n termes $W_i(q_i, I_k)$ formant l'action réduite.

Suivant le raisonnement du cas à 1 degré de liberté (page 321), on peut définir l'aire $A_i(I_k)$ formée par la projection du mouvement borné (système périodique) sur le plan (q_i, p_i) . Cette aire $A_i(I_k)$ est un invariant intégral de Poincaré. De la même façon, on introduit

les moments conjugués ou actions

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_i} p_i dq_i \quad (4.309)$$

où l'intégration est effectuée sur un contour fermé de ce plan, parcouru dans le sens gauche. Après intégration, J_i ne dépend plus que des invariants I_k ,

$$J_i = J_i(I_k).$$

On trouve donc que J_i est un invariant du mouvement. Les paires (q_i, p_i) étant indépendantes les unes des autres, les aires $A_i(I_k)$ (et les J_i) forment également des n invariants indépendants.

La transformation canonique complète $q_i, p_i, H \rightarrow \gamma_i, J_i, H'$ est alors

$$\begin{aligned} \dot{J}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial \gamma_i} = 0 \\ \dot{\gamma}_i &= \frac{\partial H'}{\partial J_i} = \omega_i(J_i). \end{aligned}$$

ce qui est la transformation recherchée, les $\omega_i(J_i)$ étant bien de la dimension d'une fréquence angulaire



La méthode générale ★★★

Si on part de la prémisse que l'on connaît n invariants I_j satisfaisant les conditions du théorème de Arnold-Liouville notamment l'indépendance et l'involution des invariants alors la méthode de résolution est relativement directe

1. On commence par exprimer les moments conjugués p_i en fonction des q_i et des invariants I_j .
2. La deuxième étape consiste à choisir n contours irréductibles Γ_i ce qui permet de calculer les variables actions J_i .
3. Ensuite, on trouve l'expression pour $H = H(J_i)$;
4. Finalement, il reste à calculer les variables angles

$$\gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i \text{ avec}$$

en utilisant $\omega_i = \frac{\partial H(J_i)}{\partial J_i}$.

Toute la beauté de cette procédure réside dans le fait qu'on obtient les n fréquences angulaires ω_i d'un système périodique à n degrés de liberté sans avoir à résoudre d'équations différentielles.

Pour illustrer, considérons deux exemples de système intégrables à 1 degré de liberté dont nous connaissons déjà les solutions : un corps en chute libre et l'oscillateur harmonique. Comme il s'agit de système conservatif avec un 1 degré de liberté, on doit connaître un invariant et celui-ci est facile à identifier : Il s'agit de l'hamiltonien $H = E$.

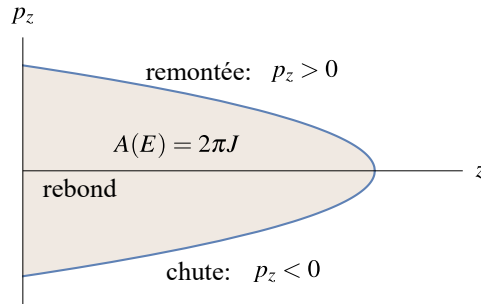


Figure 4.10 ◀▶

Espace des phases pour un corps en chute libre.

Exemple 4.24**Corps en chute libre**

Considérons le mouvement périodique suivant : Un corps de masse m soumis à la gravité est en chute libre. Partant du repos d'une hauteur $z = h$, il tombe jusqu'au sol ($z = 0$) puis rebondit de façon élastique, revient à sa position initiale. Le mouvement se répète alors indéfiniment. Le hamiltonien de ce système s'écrit simplement

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + mgz$$

où on reconnaît l'énergie cinétique et potentielle respectivement. Il existe un invariant : $H = E$ et le moment conjugué prend donc

la forme

$$p_z(z, E) = \pm \sqrt{2m(E - mgz)}$$

où $p_z(z, E)$ est négatif pendant la chute et positif pendant la remontée. Fixant l'énergie potentielle $V = 0$ au niveau du sol $z = 0$, la hauteur de départ est donnée par $z = h = E/mg$. L'aller-retour du corps forme ainsi un contour fermé Γ et on peut alors calculer la variable action

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} p_z dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_h^0 \left(-\sqrt{2m(E - mgz)} \right) dz + \frac{1}{2\pi} \int_0^h \sqrt{2m(E - mgz)} dz \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^h \sqrt{2m(E - mgz)} dz \\ &= \frac{2}{3\pi g} \sqrt{\frac{2}{m}} E^{3/2}. \end{aligned}$$

La variable angle est $\gamma(t) = \omega t + \beta$ avec la fréquence angulaire est donnée par $\omega = \frac{\partial H}{\partial J}$. En inversant l'expression pour J on obtient directement

$$H(J) = E(J) = \frac{1}{2} (9g\pi^2 m^2)^{1/3} J^{2/3}$$

d'où on tire

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \pi g \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

Pour retrouver les variables angle-action en terme des anciennes variables canoniques, on substitue E par $H(z, p_z)$ dans leurs expressions. D'abord

$$J(z, p_z) = \frac{2}{3\pi g} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{p_z^2}{2m} + mgz \right)^3}.$$

De plus, l'équation canonique de Hamilton donne

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \frac{\sqrt{2m(E - mgz)}}{m}.$$

Alors en intégrant

$$\begin{aligned}
 \gamma - \beta &= \int_0^t \omega dt = \omega \int_0^z \frac{dz}{\dot{z}} = \omega \int_0^z \frac{dz}{\frac{\partial H}{\partial p_z}} = \omega \int_0^z \frac{dz}{\frac{\partial H}{\partial p_z}} \\
 &= m\omega \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{2m(E - mgz)}} = -\frac{\sqrt{2}}{gm} \omega \sqrt{m(E - mgz)} \Big|_0^z \\
 &= \pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{mgz}{E(J)}} \right).
 \end{aligned}$$

Inversement, pour revenir aux variables (z, p_z) , et en inversant, on obtient

$$z(\gamma, J) = \frac{E(J)}{mg} \left(1 - \left(1 - \frac{\gamma - \beta}{\pi} \right)^2 \right).$$

Puisque $\gamma - \beta = \omega t = \pi g \sqrt{\frac{m}{2E}} t$, on retrouve la forme familière

$$z(\gamma, J) = -\frac{1}{2}gt^2 + \sqrt{\frac{2E}{m}}t$$

où la condition initiale dans l'intégration correspond au début de la remontée pour laquelle $z = 0$ et $\dot{z} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ à $t = 0$. Le moment

conjugué est

$$\begin{aligned} p_z(z, J) &= \pm \sqrt{2m(E - mgz)} \\ &= -gt + \sqrt{2mE} \end{aligned}$$

comme il se doit.



Exemple 4.25

Oscillateur harmonique 1D

Le hamiltonien de ce système s'écrit simplement

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2.$$

Il est invariant : $H = E$ et le moment conjugué prend donc la forme

$$p(q, E) = \pm \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}kq^2)}$$

ce qui correspond à une ellipse. Les valeurs de q et p se situent

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{2E}{k}} &\leq q \leq \sqrt{\frac{2E}{k}} = a \\ -\sqrt{2mE} &\leq p \leq \sqrt{2mE} = b. \end{aligned}$$

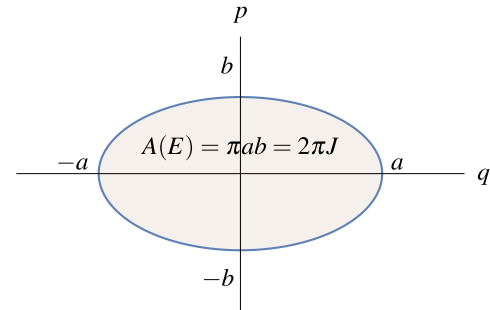


Figure 4.11 ▲

L'espace des phases (q, p) est une ellipse de demi-grand axe $a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ et demi-petit axe $b = \sqrt{2mE}$. L'action est proportionnelle à l'aire $J = A(E)/2\pi$

La variable action est calculée sur le contour de l'ellipse mais elle correspond à l'aire de celle-ci et donc on obtient directement

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} p(q) dq = \frac{A(E)}{2\pi} = \frac{\pi ab}{2\pi} = E \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Autrement dit

$$H(J) = J \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et la fréquence angulaire est donnée par

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et

$$E = \omega J.$$

Pour retrouver les variables angle-action en terme des anciennes variables canoniques, on substitue E par $H(q, p)$ dans leurs ex-

pressions

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \int \omega dt = \omega \int \frac{dq}{\dot{q}} = \omega \int \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} \\
 &= m\omega \int \frac{dq}{\sqrt{2m(E - \frac{1}{2}kq^2)}} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{k}{2E}} q \right) \\
 &= \arcsin \left(\frac{m\omega}{\sqrt{p^2 + m^2\omega^2 q^2}} q \right).
 \end{aligned}$$

En inversant

$$\begin{aligned}
 q(\gamma, J) &= \sqrt{\frac{2J}{m^2\omega}} \sin \gamma \\
 p(\gamma, J) &= \pm \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m^2\omega^2 q^2)} \\
 &= \pm \sqrt{2m(\omega J - \omega J \sin^2 \gamma)} \\
 &= \pm \sqrt{2m\omega J} \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

En fonction du temps, on retrouve

$$\begin{aligned} q(\gamma, J) &= \sqrt{\frac{2J}{m^2 \omega}} \sin(\omega t + \beta) \\ p(\gamma, J) &= \pm \sqrt{2m\omega J} \cos(\omega t + \beta). \end{aligned}$$



Fort de ce dernier exemple, considérons un oscillateur en 3D simplifié.

Exemple 4.26

Systèmes quasi-périodiques

L'oscillateur harmonique 3D considéré ici suppose que les trois directions sont découplées. Il s'agit donc d'un système complètement séparable. On peut alors définir des invariants qui ont la forme d'un hamiltonien pour chacune des directions. En posant les variables canoniques (q_i, p_i) de l'espace des phases, on écrit

$$I_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{k_i}{2} q_i^2$$

où k_i est la constante de ressort et I_i une constante du mouvement associées à chaque direction de telle sorte que $E = \sum_{i=1}^3 I_i$. En

conséquence, les variables actions sont données par

$$J_i = I_i \sqrt{\frac{m}{k_i}}$$

et suivant le même raisonnement que dans le cas en $1D$, les variables angles sont des fonctions périodiques du temps de période $T_i = 2\pi/\omega_i$.

$$\gamma_i(t) = \omega_i t + \beta_i = \arcsin\left(\sqrt{\frac{k_i}{2I_i}} q_i\right)$$

où $\omega_i = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$. On trouve aussi que chaque coordonnée q_i est une fonction périodique de γ_i

$$q_i(\gamma_i, J_i) = \sqrt{\frac{2J_i}{m^2 \omega_i}} \sin \gamma_i = \sqrt{\frac{2I_i}{m^2 \omega_i^2}} \sin \gamma_i.$$

Le mouvement dans chaque direction sera une fonction périodique des γ_i , caractérisé par un période T_i et donc la coordonnée q_i reprend sa valeur après un délai de T_i . Cependant puisque le mouvement se fait simultanément dans les trois directions on ne peut pas en général le qualifier de périodique. Pour ce faire, il faut que toutes les variables q_i retrouvent leur valeur initiale après un moment. Si c'est le cas, la trajectoire est fermée.

Par exemple, si les trois périodes T_i sont identiques et on a des trajectoires fermées dont la période est T_i

En fait, il y a périodicité si certaines ou toutes les périodes T_i sont commensurables entre elles. Deux périodes sont commensurables si leur rapport est égal à un nombre rationnel. Par définition, on dit qu'un système à n degrés de liberté est partiellement dégénéré si au moins deux de ses périodes propres sont commensurables. Il est dit complètement dégénéré si elles sont toutes commensurables. De plus, un système quasi-périodique est désigné comme un système partiellement dégénéré.

Alors pour un système complètement dégénéré, la période du mouvement T est simplement le plus petit commun multiple des périodes T_i puisque c'est après un tel délai que les variables q_i reprennent toutes simultanément les valeurs qu'elles avaient originalement.



4.14 Exercices

4.1 Tunnel géant

On considère la Terre comme une sphère de rayon $R_T = 6371$ km, de densité de masse uniforme. L'accélération gravitationnelle au niveau du sol est $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. On imagine un tunnel rectiligne entre deux points A et B quelconque de la surface terrestre, qui rejoignent par exemple Québec à Paris. On imagine un wagon qui roule sans frottement dans ce tunnel. Partant de Québec, sous l'action de la gravité, le wagon se déplacera vers Paris. Combien de temps durera le voyage Québec-Paris ?

- Déterminez le champ gravitationnel $g(r)$ en un point intérieur de la Terre à une distance r de son centre sachant que le champ gravitationnel à sa surface est $g = \frac{GrM_T}{R_T^2}$.
- Calculer le potentiel $V(r)$ en ce même point.
- Ce problème peut dépendre que d'une seule coordonnée généralisée. Déterminez-la et donnez à une constante près l'énergie potentielle du wagon de masse m en fonction de cette coordonnée. Déterminez l'hamiltonien ainsi que l'équation différentielle du système.
- Solutionnez l'équation en considérant un départ de Québec à vitesse nulle. Combien de temps dure le trajet jusqu'à Paris ? Montrez que ce temps est indépendant des points

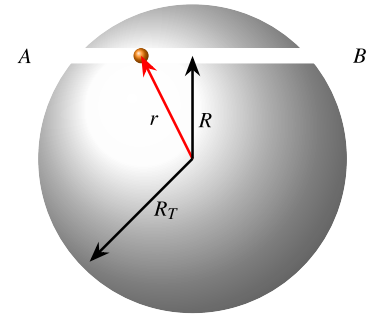


Figure 4.12 ▲
Problème 4.1.

A et B.

4.2 Pendules couplés

Soient deux blocs de masse m reliés au plafond par une tige de longueur l et de masse négligeable et reliés ensemble par un ressort de constante de rappel k (voir figure 4.13).

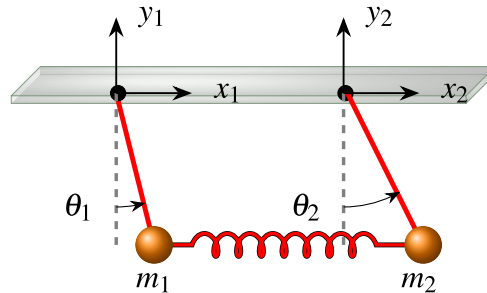


Figure 4.13 ◀▶
Problème 4.2.

- Déterminez l'énergie cinétique et le potentiel du système, en coordonnées cartésiennes.
- Démontrez que pour les petites oscillations, où $x \ll l$, l'hamiltonien du système peut être approximé par

$$H \approx \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 - \frac{mg}{l} \left(2l^2 - \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right)$$

où p_1 et p_2 sont respectivement les moments conjugués aux coordonnées x_1 et x_2 .

- (c) Obtenez les équations canoniques du mouvement pour l'hamiltonien obtenu en (b).

4.3 Pendules couplés (suite)

On cherche à déterminer les fréquences propres d'oscillation pour le problème précédent.

- (a) On écrit d'abord les équations canoniques sous forme vectorielle :

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{P}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= -K\mathbf{X}. \end{aligned}$$

Écrivez explicitement les vecteurs $\mathbf{X}$ et $\dot{\mathbf{X}}$, ainsi que les matrices M et K et démontrez que ces deux équations sont équivalentes à l'équation du deuxième ordre :

$$\ddot{\mathbf{X}} = -M^{-1}K\mathbf{X}.$$

- (b) On pose $\mathbf{X} = \Re\{\mathbf{Z}\}$ et l'équation du mouvement devient $\ddot{\mathbf{Z}} = -M^{-1}K\mathbf{Z}$, qui a pour solution $\mathbf{Z} = \mathbf{A}\exp(-i\omega t)$. En réinsérant cette solution dans l'équation différentielle, on obtient la relation de dispersion $(M^{-1}K - \omega^2 I)\mathbf{A} = 0$. Il s'agit d'une équation aux valeurs propres. Les ω^2 sont les valeurs propres de la matrice $M^{-1}K$. Déterminez les fréquences propres d'oscillations ω .
- (c) Quels sont les deux types d'oscillations associés à chacune de ces fréquences propres ω (il n'y a pas de calculs

à faire pour ce point) ?

4.4 Crochet de Poisson

Vérifiez les propriétés suivantes du crochet de Poisson, pour $A = A(q_i, p_i)$ et $B = B(q_i, p_i)$.

- (a) $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- (b) $\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$
- (c) $\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C$
- (d) $\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$ (Identité de Jacobi)

4.5 Crochet de Poisson revisité

Démontrez les résultats suivants du crochet de Poisson.

- (a) Soit une fonction quelconque $F(q_i, p_i, t)$ dépendant des $2n$ variables canoniques q_i et p_i et possiblement du temps t . Montrez que pour une trajectoire physique obéissant aux équations canoniques du hamiltonien H d'un système physique donné, on a :

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

- (b) Montrez que les crochets de Poissons suivants entre des variables canoniques sont toujours nuls :

$$\{q_k, q_j\} \equiv 0 \text{ et } \{p_k, p_j\} \equiv 0 ;$$

et qu'entre variables conjuguées, le crochet de Poisson est égal au delta de Kronecker :

$$\{q_k, p_j\} = \delta_{kj}.$$

4.6 Méthode de Hamilton-Jacobi

Solutionnez le système décrit par l'hamiltonien en coordonnées cylindriques

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} p_\phi^2 + p_z^2 \right) + \rho^2,$$

en utilisant la méthode de Hamilton-Jacobi.

- Effectuer une transformation canonique pour passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes.
- Écrivez explicitement l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi pour ce système en partant des coordonnées cartésiennes.
- Effectuez la séparation des variables et exprimez explicitement l'action S en fonction d'intégrales non couplées. (Exploitez les variables cycliques, s'il y en a.)
- Appliquez les lois de transformation d'une transformation canonique de type F_2 , pour obtenir les nouvelles variables canoniques conjuguées.

- (e) Effectuez l'intégration dans les deux équations ne dépendant pas du temps et obtenez la trajectoire sous sa forme paramétrique $\mathbf{r} = (x(y), y, z(y))$. (Une autre coordonnée que y peut aussi paramétrer la courbe.)
- (f) Effectuez l'intégration dans l'équation dépendant du temps pour déterminer la dépendance temporelle du paramètre de la courbe. Exprimez maintenant la trajectoire explicitement en fonction du temps : $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

4.7 Crochets de Poisson

- (a) Calculez $\{x, \mathbf{p}^2\}$ et $\{l_z, \mathbf{l}^2\}$.
- (b) Parmi les quantités suivantes, lesquelles peuvent être simultanément moments canoniques : $p_x, l_x, \mathbf{l}^2$

4.8 Particule dans des champs électrique et magnétique

Une particule de masse m et de charge e est au repos à l'origine à $t = 0$. Elle est plongée dans des champs électrique et magnétique $\mathbf{E} = E_0 \hat{i}$ et $\mathbf{B} = B_0 \hat{k}$. Écrivez l'hamiltonien et donnez-en la solution pour $t > 0$. Faites un dessin de la trajectoire.

4.9 Canon

Un canon situé à l'origine d'un système de coordonnées tire un obus de masse m à un angle ϕ_0 et à une vitesse initiale v_0 .

- (a) Utilisez la méthode de Hamilton-Jacobi pour étudier le mouvement et obtenir une équation de l'orbite sous la forme $z = z(x)$.

- (b) Gardant l'équation sous cette forme ($z = z(x)$) quelles précisions ou contraintes les conditions initiales apportent-elles à l'évaluation des constantes α_i et β_i de H-J.
- (c) Toujours par H-J obtenez la trajectoire sous la forme paramétrique :

$$x = x(t), \quad z = z(t)$$

et déterminez les constantes α_i et β_i complètement.

4.10 Force en $1/r^2$

Une masse est attirée par une force $F = k/r^2$ avec k une constante, dans le plan (r, θ) .

- (a) Quel est le lagrangien de ce système ?
- (b) Obtenez les moments généralisé p_r et p_θ .
- (c) Obtenez l'hamiltonien de ce système.
- (d) Refaire cet exercice en coordonnées cartésiennes (Supposez $F = k/y^2$).

4.11 Une masse dans le plan xy

Une masse se déplace sans frottement dans le plan xy et est soumise à un potentiel $V(r)$.

- (a) Quel est le lagrangien de ce système selon (r, θ) ?
- (b) Obtenez les moments généralisé p_r et p_θ .
- (c) Obtenez l'hamiltonien de ce système.

4.12 Oscillateur harmonique à une dimension

Un oscillateur harmonique à une dimension et de masse m

possède une énergie cinétique et un potentiel de la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad V = \frac{1}{2}kq^2$$

- Quel est l'hamiltonien de ce système ?
- Obtenez l'équation de Hamilton-Jacobi de ce système.
- Solutionnez l'équation de Hamilton-Jacobi pour déterminer le déplacement de l'oscillateur, q , en fonction du temps. Ne trouvez pas une solution exacte pour les constantes indéterminées dépendantes des conditions initiales.

4.13 Mouvement en 3D

Une masse se déplace en trois dimensions.

- Déterminez le lagrangien de ce système en coordonnées sphériques pour un potentiel $V(r, \theta, \phi)$.
- Obtenez les moments généralisés p_r et p_θ et p_ϕ .
- Déterminez l'hamiltonien de ce système en coordonnées sphériques pour un potentiel $V(r, \theta, \phi)$.
- Obtenez les équations de Hamilton, c'est-à-dire les expressions pour $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{p}_r$, $\dot{p}_\theta$ et $\dot{p}_\phi$.

4.14 Mouvement en 3D avec potentiel en $1/r^2$

Une masse se déplace en trois dimensions.

- Déterminez l'hamiltonien de ce système en coordonnées sphériques pour un potentiel $V = -K \cos \theta / r^2$.

- (b) Obtenez l'équation de Hamilton-Jacobi pour ce système.
 (c) Solutionnez l'équation de Hamilton-Jacobi. Ne trouvez pas une solution exacte pour les constantes indéterminées dépendantes des conditions initiales. La solution attendue est :

$$S = \int \sqrt{2mE + \beta/r^2} dr + \int \sqrt{2mK \cos \theta - p_\phi^2 / \sin^2 \theta - \beta} d\theta + p_\phi \phi - Et$$

où E est l'énergie totale du système et β une constante dépendante des conditions initiales de la situation.

4.15 Un hamiltonien non-linéaire

Soit l'hamiltonien non-linéaire suivant : $H(p, q) = 2p^2 - 4pq^2 + q + 2q^4$

- (a) Déterminez les équations de Hamilton de cet hamiltonien.
 (b) Posez la transformation suivante $Q = q + (p - q^2)^2$ et $P = p - q^2$ et déterminez le nouvel hamiltonien $H'(Q, P)$.
 (c) Vérifiez que la transformation précédente était bel et bien canonique.
 (d) Déterminez les équations de Hamilton de ce nouvel hamiltonien.
 (e) Déterminez $P(t)$, $Q(t)$ et substituez dans l'équation que vous avez trouvé pour H' . Est-ce que H' dépend du temps ?

4.16 **Fonction génératrice** $F(q, P) = q^2 e^P$

Soit une fonction génératrice d'une transformation canonique :

$$F(q, P) = q^2 e^P$$

(a) Avec les relations suivantes : $Q = \frac{\partial F}{\partial P}$, $p = \frac{\partial F}{\partial q}$, Trouvez

$Q(P, q)$ et $p(P, q)$.

(b) Déterminez $P(p, q)$ et $Q(p, q)$.

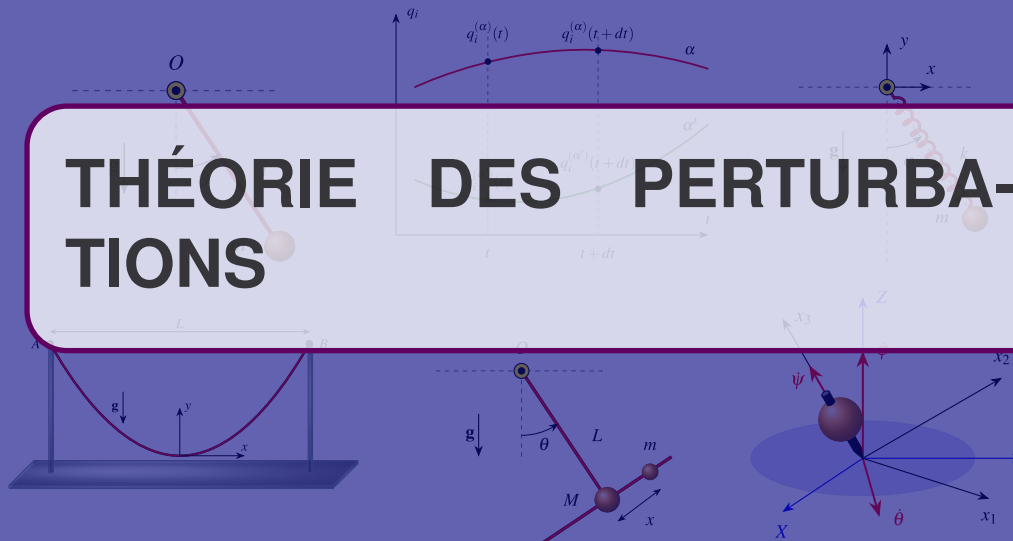
(c) Vérifiez la validité de la transformation canonique en évaluant $\{P, Q\}_{(p, q)}$.

(d) En utilisant les $Q(P, q)$ et $p(P, q)$, déterminez la fonction génératrice $\Upsilon(p, Q)$ qui permet la même transformation canonique que $F(q, P) = q^2 e^P$



5

THÉORIE DES PERTURBATIONS



Chapitre 5

5.1 L'idée de base : « varier » les constantes	358
5.2 Les approximations	361
5.3 Exemple	366
5.4 Méthode canonique de perturbations	370
5.5 Autre exemple	372
5.6 Exercices	391

IL S'AGIT D'UNE MÉTHODE APPROXIMATIVE pour obtenir une solution analytique à un problème de mécanique qui n'a pas de solution analytique exacte ou pour lequel cette solution est trop difficile à obtenir. En fait, il n'existe que très peu de problèmes de mécanique qui ont une solution analytique exacte.

Les ordinateurs d'aujourd'hui permettent de résoudre numériquement certains problèmes avec pratiquement la précision désirée mais à chaque fois pour un ensemble donné de conditions initiales. Pour avoir une vision générale du type de trajectoire, il faut faire plusieurs fois les calculs et ceci peut être onéreux. D'autre part, le problème à trois corps, par exemple, n'a pas de telle solution et est considéré comme chaotique. Il est en pratique impossible de résoudre ce problème, même numériquement, avec une précision arbitraire malgré les ordinateurs dont on dispose puisque la solution se trouve être très sensible aux conditions initiales. Nous allons considérer ici seulement les problèmes qui peuvent faire l'objet de « perturbations »

5.1 L'idée de base : « varier » les constantes

Soit un système décrit par un hamiltonien $H(q_i, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. On sait que la solution du problème dépend de $2n$ constantes d'intégration, appelons-les les a_i et les b_i , $i = 1, 2, \dots, n$, qui sont évidemment des constantes du mouvement. La solution devrait alors s'écrire

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, a_j, b_j) \\ p_i &= p_i(t, a_j, b_j) \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.1)$$

Supposons que nous soyons incapables d'obtenir ces solutions analytiques mais que pour des raisons du type énumérées en ci-dessus,

nous désirons obtenir une solution approximative et analytique. La méthode des perturbations peut permettre d'obtenir cette solution approximative. Elle requiert que nous soyons capables d'écrire

$$H(q_i, p_i) = H_0(q_i, p_i) + H_1(q_i, p_i) \quad (5.2)$$

de façon telle que

1. il soit possible d'obtenir une solution analytique pour H_0 et,
2. que H_1 soit *petit* devant H_0 (Comment ? On ne le sait pas encore).

Cette dernière condition est souvent difficile à vérifier à priori. Elle requiert une certaine stabilité du mouvement face aux changements dans les conditions initiales et de fait la méthode n'est pas appropriée au traitement des mouvements chaotiques par exemple qui sont caractérisés par une très grande sensibilité aux conditions initiales.

L'idée de base est relativement simple et elle compte les étapes suivantes :

- i) On résout analytiquement pour H_0 et on obtient les solutions

$$\begin{aligned} q_i &= q_i^{(0)}(t, a_j^{(0)}, b_j^{(0)}) = q_i^{(0)}(t, a_i, b_i) \\ p_i &= p_i^{(0)}(t, a_j^{(0)}, b_j^{(0)}) = p_i^{(0)}(t, a_i, b_i). \end{aligned} \quad (5.3)$$

ii) On inverse ces $2n$ équations pour obtenir les

$$\begin{aligned} a_i &= a_i^{(0)}(t, q_j^{(0)}, p_j^{(0)}) \\ b_i &= b_i^{(0)}(t, q_j^{(0)}, p_j^{(0)}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

qui vérifient évidemment (puisque ce sont des constantes du mouvement)

$$\begin{aligned} \dot{a}_i^{(0)} &= \{a_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i^{(0)} \equiv 0 \\ \dot{b}_i^{(0)} &= \{b_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} b_i^{(0)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

iii) On pose que la solution complète pour H peut prendre la même forme que celle en (5.3) et (5.4) mais avec des $a_i^{(0)}$ et $b_i^{(0)}$ remplacés par des a_i et b_i qui ne sont plus des constantes du mouvement c'est-à-dire, pour lesquels $\dot{a}_i \neq 0 \neq \dot{b}_i$.

iv) On calcule les a_i et les b_i par leur équation du mouvement impliquant H au complet et dans lesquelles les a_i et b_i sont présumés avoir la même dépendance dans les q_i et p_i qu'en (5.4). Ainsi

$$\dot{a}_i = \{a_i, H\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i = \{a_i, H_0\} + \{a_i, H_1\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i. \quad (5.6)$$

$$\dot{b}_i = \{b_i, H\} + \frac{\partial}{\partial t} b_i = \{b_i, H_0\} + \{b_i, H_1\} + \frac{\partial}{\partial t} b_i. \quad (5.7)$$

Mais selon la seconde relation (voir (5.5))

$$\{a_i, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i = 0 \quad (5.8)$$

et il ne reste que

$$\dot{a}_i = \{a_i, H_1\} \quad (5.9)$$

et de la même façon

$$\dot{b}_i = \{b_i, H_1\}. \quad (5.10)$$

- v) Il reste à intégrer ces équations pour obtenir $a_i(t)$ et $b_i(t)$ et à les replacer dans les équations (i) en lieu et place des $a_i^{(0)}$ et $b_i^{(0)}$ pour obtenir la solution désirée

$$\begin{aligned} q_i &= q_i^{(0)}(t, a_j, b_j) \\ p_i &= p_i^{(0)}(t, a_j, b_j) \end{aligned} \quad (5.11)$$

mêmes fonctions que pour la solution non perturbée mais ici $a_i = a_i(t)$ et $b_i = b_i(t)$.

5.2 Les approximations

À ce point-ci, il n'y a aucune approximation de faite. Elles apparaissent dans l'intégration des équations pour a_i et b_i souvent elles-mêmes trop difficiles pour être résolues exactement.

On présente souvent la méthode perturbative comme l'approximation d'une expansion en série de puissance d'un paramètre qui caractérise H_1 . C'est d'ailleurs généralement le cas en mécanique quantique. Ce n'est pas cependant la seule approximation possible. Mentionnons la méthode itérative et celle de la moyenne, cette dernière étant utile lorsque les trajectoires de H_0 sont des orbites fermées.

5.2.1 Méthode par série

Sous une forme simplifiée, on peut la présenter de la façon suivante. On identifie d'abord un paramètre λ , idéalement sans dimension (et petit) tel que

$$H_1 = \lambda h(q_i, p_i) \quad (5.12)$$

et on pose que l'on peut écrire les a_i (et les b_i) en séries de puissance

$$a_i = a_i^{(0)} + \lambda a_i^{(1)} + \lambda^2 a_i^{(2)} + \dots \quad (5.13)$$

Remplaçant dans l'équation pour $\dot{a}_i$ on obtient

$$\dot{a}_i = \{a_i, H_1\} = \{a_i, \lambda h\} \quad (5.14)$$

$$= \dot{a}_i^{(0)} + \lambda \dot{a}_i^{(1)} + \lambda^2 \dot{a}_i^{(2)} + \dots = \lambda \{a_i^{(0)}, h\} + \lambda^2 \{a_i^{(1)}, h\} + \dots \quad (5.15)$$

Égalant les termes en même puissance, on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_i^{(0)} = 0 & \quad \Longrightarrow \quad a_i^{(0)} = \int (0) dt = \text{constante} \\
 & \quad \swarrow \\
 \dot{a}_i^{(1)} = \{a_i^{(0)}, h\} & \quad \Longrightarrow \quad a_i^{(1)} = \int \{a_i^{(0)}, h\} dt \\
 & \quad \swarrow \\
 \dot{a}_i^{(2)} = \{a_i^{(1)}, h\} & \quad \Longrightarrow \quad a_i^{(2)} = \int \{a_i^{(1)}, h\} dt \\
 & \quad \vdots \\
 \dot{a}_i^{(n)} = \{a_i^{(n-1)}, h\} & \quad \Longrightarrow \quad a_i^{(n)} = \int \{a_i^{(n-1)}, h\} dt
 \end{aligned}$$

Wet de même pour les b_i . C'est la philosophie qu'on retrouve dans la théorie des perturbations de la mécanique quantique par exemple.

5.2.2 Méthode itérative

La méthode suppose que la séquence suivante converge. À partir de

$$\dot{a}_i = \{a_i, H_1\} \quad (5.16)$$

$$\dot{b}_i = \{b_i, H_1\}, \quad (5.17)$$

on calcule d'abord la première itération

$$\dot{a}_i^{(1)} = \{a_i, H_1\} \big|_{a_j^{(0)}, b_j^{(0)}} \quad (5.18)$$

$$\dot{b}_i^{(1)} = \{b_i, H_1\} \big|_{a_j^{(0)}, b_j^{(0)}} \quad (5.19)$$

5.2.3 Méthode de la moyenne

Elle est utilisable lorsque la solution non perturbée est une orbite cyclique de période τ . On peut alors calculer l'effet net moyen de la perturbation sur une orbite par

$$\bar{a}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{a_i, H_1\} dt \quad (5.22)$$

$$\bar{b}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{b_i, H_1\} dt. \quad (5.23)$$

Cette méthode est compatible avec la méthode itérative par exemple. Les changements orbitaux des satellites et des planètes dus à certaines excentricités ou aux autres planètes, sont généralement calculés de cette façon, comme le déplacement (rotation) de l'orbite (elliptique) de Mercure par exemple.

Remarque 5.1

i Les crochets de Poisson qui apparaissent ici sont présumés calculés en utilisant les variables canoniques q_i et p_i . Cela implique d'avoir constamment recours aux équations (5.3) et (5.4). On verra en plus bas une façon systématique de choisir ces constantes en optant pour les α_i et β_i de Hamilton-Jacobi qui ont l'avantage considérable d'être variables canoniques. **i**

5.3 Exemple

Exemple 5.1

☞ Voyons d'abord un cas très simple, soit celui d'une particule soumise à une force constante en une dimension donc

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \lambda q \quad (5.24)$$

où $V = \lambda q$ donc la force s'oppose au mouvement vers les q croissants si $\lambda > 0$ et l'inverse si $\lambda < 0$. On reconnaît le cas d'une particule de masse m soumise à une force constante

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\lambda$$

c'est-à-dire accélération constante dont la solution est

$$q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{\lambda t^2}{2m}.$$

On sait résoudre exactement le problème par la méthode canonique

$$\dot{q} = \{q, H\} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = \{p, H\} = -\lambda \quad (5.25)$$

et donc

$$\ddot{q} = -\frac{\lambda}{m} \implies \begin{cases} q(t) = q_0 + \dot{q}_0 t - \frac{\lambda t^2}{2m} \\ p(t) = m\dot{q} = m\dot{q}_0 - \lambda t. \end{cases} \quad (5.26)$$



Afin de tester la méthode perturbative décomposons H en $H_0 + H_1$ où

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \quad H_1 = \lambda q \quad (5.27)$$

et reprenons les étapes 1 à 5.

1- La solution analytique pour H_0 est triviale, nous avons une particule libre et donc

$$q = a^{(0)}t + b^{(0)} \quad (5.28)$$

$$p = ma^{(0)}. \quad (5.29)$$

2- L'inverse de ces équations est

$$a^{(0)} = \frac{p}{m} \quad (5.30)$$

$$b^{(0)} = q - \frac{p}{m}t \quad (5.31)$$

et même si $b^{(0)}$ dépend explicitement du temps on vérifie (c'est

inutile en fait) que

$$\dot{a}^{(0)} = \{a^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} a^{(0)} = \left\{ \frac{p}{m}, \frac{p^2}{2m} \right\} + 0 \equiv 0 \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}^{(0)} &= \{b^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} b^{(0)} \\ &= \left\{ q - \frac{p}{m}t, \frac{p^2}{2m} \right\} - \frac{p}{m} \\ &= \frac{1}{2m} \{q, p^2\} - \frac{t}{2m} \{p, p^2\} - \frac{p}{m} \\ &= \frac{2p}{2m} - 0 - \frac{p}{m} = \frac{p}{m} - \frac{p}{m} \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.33)$$

3- On pose que la solution pour H sera (voir étape 1)

$$\begin{aligned} q &= at + b \\ p &= ma \end{aligned} \implies \begin{aligned} a &= \frac{p}{m} \\ b &= q - \frac{p}{m}t. \end{aligned} \quad (5.34)$$

4- On calcule les équations d'évolution de a et b

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \{a, H_1\} = \left\{ \frac{p}{m}, \lambda q \right\} \\ &= \frac{\lambda}{m} \{p, q\} = \frac{\lambda}{m} \cdot (-1) \\ &= -\frac{\lambda}{m} \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{b} &= \{b, H_1\} = \left\{q - \frac{pt}{m}, \lambda q\right\} \\
 &= \frac{\lambda}{m} \{q, q\} - \frac{\lambda t}{m} \{p, q\} \\
 &= \lambda \cdot 0 - \frac{\lambda t}{m} (-1) = \frac{\lambda t}{m}.
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

5- On intègre trivialement en posant que la perturbation a été allumée à $t = 0$ et que pour $t < 0$, seul H_0 jouait un rôle. Ceci nous donne les conditions initiales donc les constantes d'intégration pour les équations pour a et b . Donc ici

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \int_0^t \left(-\frac{\lambda}{m}\right) dt = -\frac{\lambda}{m}t + a^{(0)} \quad \text{où } a(0) = a^{(0)} \\
 b(t) &= \int_0^t \left(\frac{\lambda t}{m}\right) dt = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{m} t^2 + b^{(0)} \quad \text{où } b(0) = b^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Remplaçant dans les équations de l'étape 3 on obtient

$$\begin{aligned}
 q &= a(t)t + b(t) \\
 &= \left(a^{(0)} - \frac{\lambda t}{m}\right)t + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{m} t^2 + b^{(0)} \\
 &= b^{(0)} + a^{(0)}t - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{m} t^2
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} p &= ma(t) \\ &= ma^{(0)} - \lambda t. \end{aligned}$$

Ces résultats sont exacts.

5.4 Méthode canonique de perturbations

L'idée est la même mais les manipulations sont sensiblement simplifiées du fait qu'on choisit les constantes de la méthode de Hamilton-Jacobi, les α_i et β_i au lieu de laisser ce choix au *hasard*. Ces constantes ne seront vraiment constantes que pour H_0 , l'introduction de H_1 fera qu'elles ne seront plus constantes du mouvement. L'avantage vient du fait que les α_i et β_i étant variables canoniques (respectivement moments et coordonnées généralisés) on peut les utiliser pour calculer les crochets de Poisson. On évite ainsi cet incessant va-et-vient entre les (a_i, b_i) et les (p_i, q_i) qui ressort dans les exemples de la section ci-dessus. Une fois que H_0 a été résolu par H.-J. on obtient

$$q_i = q_i(t, \alpha_j, \beta_j) \quad (5.37)$$

$$p_i = p_i(t, \alpha_j, \beta_j) \quad (5.38)$$

que l'on inverse en

$$\alpha_i = \alpha_i(t, q_j, p_j) \quad (5.39)$$

$$\beta_i = \beta_i(t, q_j, p_j) \quad (5.40)$$

C'est toutefois la première forme qui est utile puisqu'elle permet d'écrire

$$H_1(q_i, p_i) = H_1(q_i(t, \alpha_j, \beta_j), p_i(t, \alpha_j, \beta_j)) \quad (5.41)$$

$$= H'_1(\alpha_j, \beta_j, t) \quad (5.42)$$

Par la suite, tous les calculs des crochets de Poisson se feront par

$$\{A, B\} = \sum_j \left[\frac{\partial A}{\partial \beta_j} \frac{\partial B}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A}{\partial \alpha_j} \frac{\partial B}{\partial \beta_j} \right] \quad (5.43)$$

ainsi

$$\dot{\alpha}_i = \{\alpha_i, H_1\} = \sum_j^n \left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_j} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial H_1}{\partial \beta_j} \right] \quad (5.44)$$

$$= - \sum_j^n \delta_{ij} \frac{\partial H'_1}{\partial \beta_j} = - \frac{\partial H'_1}{\partial \beta_i} \quad (5.45)$$

et

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial H'_1}{\partial \alpha_i}. \quad (5.46)$$

C'est sous cette forme que la théorie des perturbations est généralement présentée dans la littérature.

5.5 Autre exemple

Exemple 5.2

⚠ Considérons un exemple assez « classique » parfois appelé l'oscillateur quartique décrit par

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{mk}{4}q^4. \quad (5.47)$$

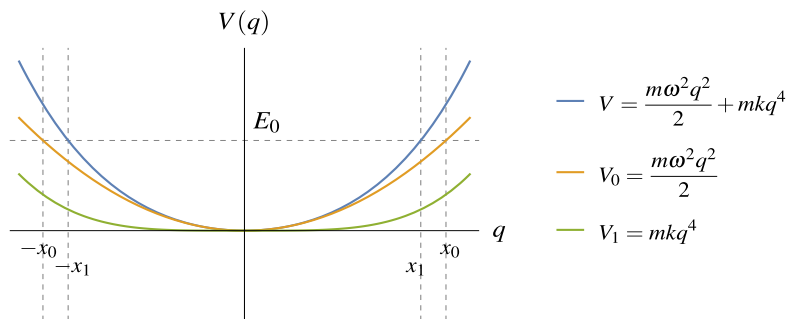


Figure 5.1 ◀▶ Potentiel $V(q)$ pour l'oscillateur avec et sans le terme quartique.

Les équations canoniques du mouvement sont

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (5.48)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q - mkq^3 \quad (5.49)$$

ou, en les combinant

$$\ddot{q} = -\omega^2 q - kq^3. \quad (5.50)$$

Intégrer cette équation n'est pas trivial. Choisissons de décomposer H en $H_0 + H_1$ où

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 : \text{ oscillateur harmonique} \quad (5.51)$$

$$H_1 = \frac{mk}{4} q^4 : \text{ perturbation.} \quad (5.52)$$

Nous allons d'abord résoudre pour H_0 par la méthode de H.-J. Puisqu'on peut écrire, H_0 étant indépendant du temps,

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha t + W(q, \alpha) \quad (5.53)$$

et sachant que

$$H_0(q, \frac{\partial S}{\partial q}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (5.54)$$

On voit immédiatement que

$$H_0(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha. \quad (5.55)$$

Ainsi notre nouveau moment canonique, α , sera une constante égale à l'énergie du système ! Explicitant avec

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad \text{et} \quad p = \frac{\partial W}{\partial q}$$

l'équation ci-dessus devient

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \alpha \quad (5.56)$$

et on obtient

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}. \quad (5.57)$$

Intégrant

$$W = \int dq \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} \quad (5.58)$$

et

$$S(q, \alpha, t) = -\alpha t + \int dq \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}.$$

En plus de

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2},$$

nos équations de transformation canonique incluent à un facteur près

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + m \int \frac{dq}{\sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2}} \quad (5.59)$$

$$= -t + \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left[\frac{m\omega q}{\sqrt{2m\alpha}} \right] \quad (5.60)$$

qui s'inverse en

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta) \\ p(t) &= \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} \\ &= \sqrt{2m\alpha - 2m\alpha \sin^2 \omega(t + \beta)} \\ &= \sqrt{2m\alpha} \cos \omega(t + \beta). \end{aligned}$$

où on reconnaît la solution harmonique. Nous pouvons récrire H_1

$$H_1 = \frac{mk}{4} q^4 = \frac{k\alpha^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta).$$

α et β nos nouveaux moment et coordonnée généralisés sont des constantes sous H_0 mais ne le sont plus lorsqu'on introduit la perturbation (disons à $t = 0$). Leur équation d'évolution est canonique

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = -\frac{4k\alpha^2}{m\omega^3} \sin^3 \omega(t + \beta) \cos \omega(t + \beta) \\ \dot{\beta} &= \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = +\frac{2k\alpha}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta)\end{aligned}$$

Ces dernières équations ne sont pas triviales à résoudre non plus mais elles se prêtent à une méthode d'approximation, que ce soit par développement en série, par itération ou par moyenne.

5.5.1 Développement en série

Considérons tout d'abord un développement en série. On constate que k est le paramètre qui caractérise H_1 . Ce n'est pas un très bon choix puisqu'il est lui-même dimensionné, néanmoins nous allons tenter un développement en série du type

$$\alpha = \alpha_0 + k\alpha_1 + k^2\alpha_2 + k^3\alpha_3 + \dots \quad (5.61)$$

$$\beta = \beta_0 + k\beta_1 + k^2\beta_2 + k^3\beta_3 + \dots \quad (5.62)$$

Cependant on constate ici que le côté droit des équations pour $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ dépend de fonctions trigonométriques d'argument $\omega(t + \beta)$. Comme

les fonctions trigonométriques sont hautement non linéaires dans leur argument, il n'est pas trivial d'identifier leur degré de dépendance en β et d'identifier ordre par ordre la dépendance en k . Par exemple

$$\dot{\beta} \sim \sin^4 \omega(t + \beta) \quad (5.63)$$

de

$$\sin \omega(t + \beta) = \sin \omega t \cos \omega \beta + \sin \omega \beta \cos \omega t \quad (5.64)$$

on aura

$$\begin{aligned} \cos \omega \beta &\approx \cos(\omega \beta_0 + \omega k \beta_1) \\ &\approx \cos \omega \beta_0 \cos \omega k \beta_1 - \sin \omega \beta_0 \sin \omega k \beta_1 \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \sin \omega \beta &\approx \sin(\omega \beta_0 + \omega k \beta_1) \\ &\approx \sin \omega \beta_0 \cos \omega k \beta_1 + \cos \omega \beta_0 \sin \omega k \beta_1 \end{aligned} \quad (5.66)$$

et prenant

$$\sin \omega k \beta_1 \approx \omega k \beta_1 + \mathcal{O}(k^3) \quad (5.67)$$

$$\cos \omega k \beta_1 \approx 1 + \mathcal{O}(k^2) \quad (5.68)$$

alors

$$\sin \omega(t + \beta) = \sin \omega(t + \beta_0) + \omega k \beta_1 \cos \omega(t + \beta_0). \quad (5.69)$$

Si k est considéré petit alors

$$\begin{aligned}\sin^4 \omega(t + \beta) &\approx \sin^4 \omega(t + \beta_0) \\ &+ 4\omega k \beta_1 \sin^3 \omega(t + \beta_0) \cos \omega(t + \beta_0) + \mathcal{O}(k^2)\end{aligned}\quad (5.70)$$

et on peut faire les remplacements appropriés pour identifier les termes d'une puissance donnée de k . L'exercice est assez lourd ici mais direct. Il suffit de remplacer systématiquement

$$\alpha = \alpha_0 + k\alpha_1 + k^2\alpha_2 + k^2\alpha_3 + \dots \quad (5.71)$$

$$\beta = \beta_0 + k\beta_1 + k^2\beta_2 + k^3\beta_3 + \dots \quad (5.72)$$

et nous ne le complétons pas dans les équations

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = -\frac{4k\alpha^2}{m\omega^3} \sin^3 \omega(t + \beta) \cos \omega(t + \beta) \quad (5.73)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = +\frac{2k\alpha}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta) \quad (5.74)$$

et de séparer les relations ordre par ordre en puissance de k . On obtient pour les premiers termes, jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(k^3)$:

Pour les α_i ,

$$\frac{m\omega^3}{4}\dot{\alpha}_1 = -\alpha_0^2 \cos \omega(t + \beta_0) \sin^3 \omega(t + \beta_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^3}{4}\dot{\alpha}_2 &= \alpha_0^2 (\omega\beta_1 \sin^4 \omega(t + \beta_0) - 3\omega\beta_1 \cos^2 \omega(t + \beta_0) \sin^2 \omega(t + \beta_0)) \\ &\quad - 2\alpha_0\alpha_1 \cos \omega(t + \beta_0) \sin^3 \omega(t + \beta_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^3}{4}\dot{\alpha}_3 &= \alpha_0^2 ((\sin^3 \omega(t + \beta_0)) \left(\frac{1}{2}\omega^2\beta_1^2 \cos \omega(t + \beta_0) + \omega\beta_2 \sin \omega(t + \beta_0) \right) \\ &\quad + 3\omega^2\beta_1^2 \cos \omega(t + \beta_0) \sin^3 \omega(t + \beta_0) \\ &\quad - \frac{1 \cos \omega(t + \beta_0)}{2 \sin \omega(t + \beta_0)} (6 (\sin^3 \omega(t + \beta_0)) \left(\omega\beta_2 \cos \omega(t + \beta_0) - \frac{1}{2}\omega^2\beta_1^2 \sin \omega(t + \beta_0) \right) \\ &\quad + 6\omega^2\beta_1^2 \cos^2 \omega(t + \beta_0) \sin^2 \omega(t + \beta_0))) \\ &\quad - (\cos \omega(t + \beta_0) \sin^3 \omega(t + \beta_0)) (\alpha_1^2 + 2\alpha_0(\alpha_2 + \alpha_3)) \\ &\quad + 2\alpha_0\alpha_1 (\omega\beta_1 \sin^4 \omega(t + \beta_0) - 3\omega\beta_1 \cos^2 \omega(t + \beta_0) \sin^2 \omega(t + \beta_0)) \end{aligned}$$

Pour les β_i ,

$$\frac{m\omega^4}{2}\dot{\beta}_1 = \alpha_0 \sin^4 \omega(t + \beta_0)$$

$$\frac{m\omega^4}{2}\dot{\beta}_2 = (\alpha_1 \sin^4 \omega(t + \beta_0) + 4\omega\alpha_0\beta_1 \cos \omega(t + \beta_0) \sin^3 \omega(t + \beta_0))$$

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^4}{2}\dot{\beta}_3 &= (\sin^4 \omega(t + \beta_0)) (\alpha_2 + \alpha_3) + 4\omega\alpha_1\beta_1 \cos \omega(t + \beta_0) \sin^3 \omega(t + \beta_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\sin \omega(t + \beta_0)} (8 (\sin^4 \omega(t + \beta_0)) \left(\omega\beta_2 \cos \omega(t + \beta_0) - \frac{1}{2} \omega^2 \beta_1^2 \sin \omega(t + \beta_0) \right) \\ &\quad + 12\omega^2 \beta_1^2 \cos^2 \omega(t + \beta_0) \sin^3 \omega(t + \beta_0)) \end{aligned}$$

À l'ordre $O(k)$, on peut résoudre facilement en intégrant

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{4\alpha_0^2}{m\omega^3} \sin^3 \omega(t + \beta_0) \cos \omega(t + \beta_0) \quad (5.75)$$

$$\dot{\beta}_1 = +\frac{2\alpha_0}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta_0). \quad (5.76)$$

Comme α_0 et β_0 ne dépendent pas de t , l'intégration est triviale et donne

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta_0) + C \quad (5.77)$$

$$\beta_1 = \frac{2\alpha_0}{m\omega^5} \left\{ \frac{3\omega}{8}(t + \beta_0) - \frac{\sin 2\omega(t + \beta_0)}{4} + \frac{\sin 4\omega(t + \beta_0)}{32} \right\} + C' \quad (5.78)$$

Définissons

$$\lambda = \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4}$$

Donc la solution devient

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - k \left(\frac{\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta_0) + C \right) + O(k^2) \\ &= \alpha_0 - \alpha_0 \lambda \left(\frac{4}{3} \sin^4 \omega(t + \beta_0) + \frac{C}{\alpha_0 \lambda} \right) + O(k^2) \\ \beta &= \beta_0 + k \left(\frac{\alpha_0}{16m\omega^5} (12\omega(t + \beta_0) - 8\sin 2\omega(t + \beta_0) + \sin 4\omega(t + \beta_0)) + C' \right) + O(k^2) \\ &= \beta_0 + \alpha_0 \lambda \left(\frac{1}{12\omega} (12\omega(t + \beta_0) - 8\sin 2\omega(t + \beta_0) + \sin 4\omega(t + \beta_0)) + C' \right) + O(k^2) \end{aligned}$$

où C et C' sont des constantes d'intégration.

5.5.2 Solution itérative.

À partir des équations pour $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ qui sont de la forme

$$\dot{\alpha} = f(\alpha, \beta, t) \quad (5.79)$$

$$\dot{\beta} = g(\alpha, \beta, t) \quad (5.80)$$

elle consiste à dire qu'on peut tendre vers α et β par une série d'itérations

$$\dot{\alpha} = f(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, t) = - \left. \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\alpha_{n-1}, \beta=\beta_{n-1}} \quad (5.81)$$

$$\dot{\beta} = g(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, t) = \left. \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{n-1}, \beta=\beta_{n-1}} \quad (5.82)$$

au sens où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \rightarrow \alpha \quad (5.83)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \rightarrow \beta. \quad (5.84)$$

La première de ces itérations est

$$\dot{\alpha}_1 = f(\alpha_0, \beta_0, t) = - \left. \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0} \quad (5.85)$$

$$\dot{\beta}_1 = g(\alpha_0, \beta_0, t) = \left. \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0}. \quad (5.86)$$

Nous nous limiterons ici à cette première étape et résoudrons donc

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{4k\alpha_0^2}{m\omega^3} \sin^3 \omega(t + \beta_0) \cos \omega(t + \beta_0) \quad (5.87)$$

$$\dot{\beta}_1 = +\frac{2k\alpha_0}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta_0). \quad (5.88)$$

Comme α_0 et β_0 ne dépendent pas de t , l'intégration est triviale et donne

$$\alpha_1 = -\frac{k\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega(t + \beta_0) + C \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \left\{ \frac{3\omega}{8}(t + \beta_0) - \frac{\sin 2\omega(t + \beta_0)}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\sin 4\omega(t + \beta_0)}{32} \right\} + C' \end{aligned} \quad (5.90)$$

On remarque ici que cette première itération donne exactement le même résultat que celui obtenu dans le développement en série à l'ordre $O(k)$.

Les constantes d'intégration C et C' sont ajustées par les conditions initiales touchant la perturbation. Si par exemple, on dit que la perturbation est *allumée* à $t = 0$, alors pour $t < 0$, la solution non perturbée prévaut et $\alpha(t \leq 0) = \alpha_0$, $\beta(t \leq 0) = \beta_0$. Donc à $t = 0$,

$\alpha_1(0) = \alpha_0, \beta_1(0) = \beta_0$, ce qui fixe

$$C = \alpha_0 + \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^3} \sin^4 \omega\beta_0 \quad (5.91)$$

$$C' = \beta_0 - \frac{2k\alpha_0}{m\omega^4} \left[\frac{3\omega\beta_0}{8} - \frac{\sin 2\omega\beta_0}{4} + \frac{\sin 4\omega\beta_0}{32} \right] \quad (5.92)$$

et alors

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^4} [\sin^4 \omega(t + \beta_0) - \sin^4 \omega\beta_0] \quad (5.93)$$

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \left\{ \frac{3\omega t}{8} - \frac{\sin 2\omega(t + \beta_0) - \sin 2\omega\beta_0}{4} + \frac{\sin 4\omega(t + \beta_0) - \sin 4\omega\beta_0}{32} \right\}. \quad (5.94)$$

Ci-dessous fixons $\beta_0 = 0$ pour alléger les expressions.

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega t \quad (5.95)$$

$$\beta_1 = \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \left\{ \frac{3\omega t}{8} - \frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{\sin 4\omega t}{32} \right\}. \quad (5.96)$$

La solution perturbée est obtenue de celle non perturbée

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta) \quad (5.97)$$

en remplaçant α et β par α_1 et β_1 . Nous obtenons

$$q(t) = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \left[\alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega t \right]^{\frac{1}{2}} \times \sin \left(\omega t + \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \left[\frac{3\omega t}{8} - \frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{\sin 4\omega t}{32} \right] \right). \quad (5.98)$$

On voit que l'amplitude, qui était $\sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}}$ dans le cas non perturbé, a été modifiée, α_1 étant remplacée par

$$\left[\alpha_0 - \frac{k\alpha_0^2}{m\omega^4} \sin^4 \omega t \right] = \alpha_0 \left[1 - \frac{4}{3} \lambda \sin^4 \omega t \right] \quad (5.99)$$

ceci nous donne un test du domaine de validité de l'approximation puisque la quantité k est à la puissance $\frac{1}{2}$ et que $q(t)$ doit demeurer réel, donc

$$1 - \frac{4}{3} \lambda \sin^4 \omega t > 0$$

alors

$$\lambda < \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad k < \frac{m\omega^4}{\alpha_0}. \quad (5.100)$$

Pour $k > 0$, l'amplitude décroît. De plus, le comportement qui était harmonique en ω , c'est-à-dire $\sin \omega t$ a été modifié en

$$\sin \left(\omega (1 + \lambda) t + \frac{3}{8} \lambda \left[-\frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{\sin 4\omega t}{32} \right] \right) \quad (5.101)$$

où, si on veut encore parler d'une fréquence Ω , on doit définir

$$\Omega \approx \omega(1 + \lambda) = \omega \left(1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right). \quad (5.102)$$

On voit que pour $k > 0$, la fréquence augmente. Il faut aussi préciser que s'ajoute une modulation en $\sin 2\omega t$ et $\sin 4\omega t$. Strictement le mouvement n'est plus harmonique.

5.5.3 Méthode de la moyenne

Elle ne donne pas des résultats aussi détaillés que cette en série mais c'est parfois suffisant. Sachant que le mouvement non perturbé est ici cyclique de période ($\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, ici) nous remplaçons α et $\dot{\beta}$ par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\dot{\beta}}$ moyennés sur une période

$$\bar{\alpha} = -\frac{4k}{m\omega^3} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha^2 \sin^3 \omega(t + \beta) \cos \omega(t + \beta) dt \quad (5.103)$$

$$\bar{\dot{\beta}} = \frac{2k}{m\omega^4} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \alpha \sin^4 \omega(t + \beta) dt. \quad (5.104)$$

Il est trivial de voir que, ne connaissant pas $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ (c'est ce que nous cherchons), il est difficile sinon impossible de faire les intégrales. C'est pourquoi cette méthode est souvent augmentée de l'approximation itérative, remplaçant α et β dans les intégrales par

α_0 et β_0 pour faire un premier calcul de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$, le résultat duquel pourra être remplacé dans les intégrales...etc. Au premier ordre nous aurons ici $\bar{\alpha} \approx \bar{\alpha}_1$ où

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1 &= -\frac{4k}{m\omega^3} \frac{1}{\tau} \alpha_0^2 \int_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \sin^3 \omega(t + \beta_0) \cos \omega(t + \beta_0) dt \\ &= -\frac{4k}{m\omega^4} \frac{\omega}{2\pi} \alpha_0^2 \sin^4 \omega(t + \beta_0) \Big|_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \equiv 0\end{aligned}\quad (5.105)$$

donc $\bar{\alpha} \approx 0 \implies \alpha = \text{constante} = \alpha_0$. De la même façon, $\bar{\beta} \approx \bar{\beta}_1$ où

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_1 &= \frac{2k}{m\omega^4} \frac{1}{\tau} \alpha_0 \int_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \sin^4 \omega(t + \beta_0) dt \\ &= \frac{2k\alpha_0}{m\omega^5} \frac{\omega}{2\pi} \left[\frac{3\omega(t + \beta_0)}{8} - \frac{\sin 2\omega(t + \beta_0)}{4} + \frac{\sin 4\omega(t + \beta_0)}{32} \right]_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= \frac{k\alpha_0}{\pi m\omega^4} \left[\frac{3\omega}{8} \frac{2\pi}{\omega} + 0 \right]_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} \approx \frac{3k\alpha_0}{m\omega^4} = \lambda\end{aligned}\quad (5.106)$$

et donc

$$\beta(t) \approx \lambda t + \beta_0. \quad (5.107)$$

Ici, la solution perturbée se lira

$$\begin{aligned}
 q(t) &= \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta) \\
 &\approx \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta_0 + \lambda t) \\
 &\approx \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sin(\omega[1 + \lambda]t + \omega\beta_0).
 \end{aligned}$$

Le seul effet de la perturbation ici est une modification de la fréquence qui de ω passe à

$$\omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega(1 + \lambda) = \omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right] \quad (5.108)$$

donc qui augmente si $k > 0$, et qui est d'ailleurs la fréquence Ω déjà obtenue.

Remarque 5.2

i À une énergie E donnée (voir figure 5.1), le mouvement va de $-x_0$ à $+x_0$ avec une fréquence ω . Introduire un terme quartique positif diminue l'amplitude entre $-x_1$ à $+x_1$

$$\left[\frac{2\alpha_0}{m\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{2\alpha_0}{m\omega^2} - \frac{2k\alpha_0^2}{m^2\omega^6} \sin^4 \omega t \right]^{\frac{1}{2}}$$

tout en affectant le fréquence ω .

$$\omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right] \quad (5.109)$$



Comparons maintenant les solutions

1. Pour l'oscillateur harmonique :

$$q_0(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sin \omega(t + \beta_0)$$

2. Pour le développement en série d'ordre $O(k)$ et la première itération de la méthode du même nom

$$q_1(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sqrt{1 - \frac{k\alpha_0}{m\omega^4}} \sin^4 \omega t \times \\ \sin \left(\omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right] t + \frac{2k\alpha_0}{m\omega^4} \left[-\frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{\sin 4\omega t}{32} \right] \right).$$

3. Pour la méthode de la moyenne

$$q_{\text{moy}}(t) = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sin \left(\omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right] t + \beta_0 \right).$$

Approximation	Amplitude	Fréquence
Oscillateur harmonique	$\sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}}$	ω
Série	$\sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sqrt{1 - \frac{k\alpha_0}{m\omega^4} \sin^4 \omega t}$	$\omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right]$
Itération	$\sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} \sqrt{1 - \frac{k\alpha_0}{m\omega^4} \sin^4 \omega t}$	$\omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right]$
Moyenne	$\sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}}$	$\omega \left[1 + \frac{3k\alpha_0}{4m\omega^4} \right]$

Pour simplifier, posons

$$\sqrt{\frac{2\alpha_0}{m\omega^2}} = 1, \quad \omega = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad k = 0.2$$

On obtient graphiquement

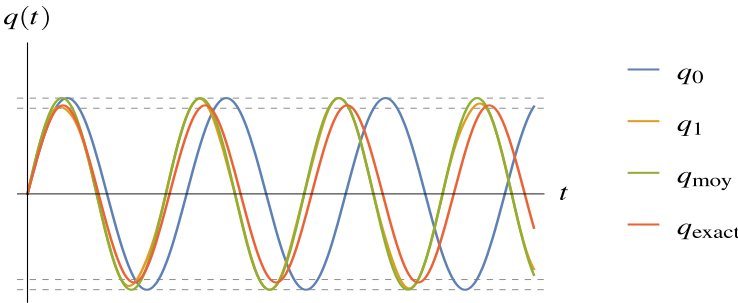


Figure 5.2 Solutions approximatives $q_0(t)$ (oscillateur harmonique), $q_1(t)$ (méthode par série et itérative) et $q_{moy}(t)$ (méthode par moyenne). $q_{exact}(t)$ est la solution exacte obtenue numériquement.

5.6 Exercices

5.1 Oscillateur anharmonique

Nous étudions un système unidimensionnel composé d'une masse m et d'un ressort. Le ressort n'est pas parfait de telle sorte que des effets anharmoniques se font sentir un peu. Ces effets contribuent un terme $\gamma x^3/3$ à l'hamiltonien. Étudiez-en les effets par perturbations au premier ordre de perturbation, c'est-à-dire calculez $\alpha_1(t)$ et $\beta_1(t)$ pour en déduire le résultat « corrigé » pour $x(t)$.

5.2 Perturbations sur un pendule

À l'aide de la méthode canonique de perturbations déterminez, en première approximation, le changement en fréquence du pendule plan lorsqu'on commence à tenir compte de l'amplitude finie du mouvement. Déterminez les contributions de l'énergie, de la masse et de la longueur du pendule sur ce changement de fréquence.

5.3 Équation différentielle non-linéaire

Considérez l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^2 = 0 \quad (5.110)$$

où λ caractérise une faible perturbation. En régime linéaire ($\lambda = 0$), définissons la solution comme étant x_0 . En régime non-linéaire nous pouvons donc exprimer la solution de la

façon qui suit :

$$x(t) \simeq x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \lambda^3 x_3 + \dots$$

Puisque λ est très faible, nous négligerons les termes λ^n avec $n \geq 2$. Nous supposons donc une solution de la forme $x(t) \simeq x_0 + \lambda x_1$. Déterminez $x_1(t)$ directement à partir de l'équation (5.110). Ce terme correctif devrait avoir une composante harmonique. Déterminez sa fréquence angulaire ω_1 .

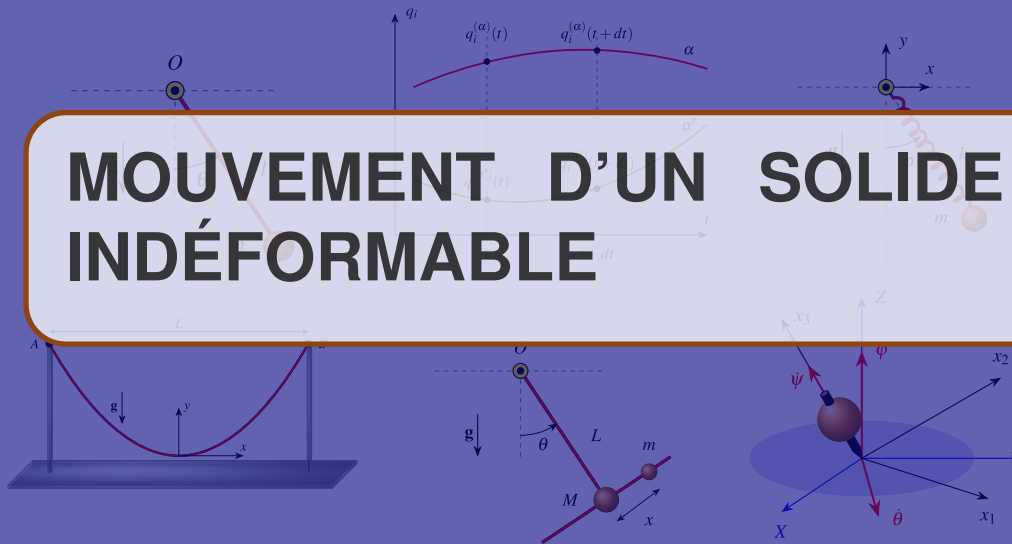
5.4 Langage Python ou C

Écrire un programme en langage Python ou C pour tracer un graphique comparant les solutions $x_0(t)$ et $x_0(t) + \lambda x_1(t)$ du problème 5.3 pour des valeurs de $\lambda = 0.05, 0.01, 0.001$. Tracez les solutions pour t suffisamment grand pour permettre de les distinguer clairement. Citez la référence de toute librairie dédiée qui a été utilisée (ex : matplotlib pour python). Le code de programmation et les graphiques sont tous deux requis.



6

MOUVEMENT D'UN SOLIDE INDÉFORMABLE



Chapitre 6

6.1 Degrés de liberté du solide	394
6.2 Énergie cinétique	398
6.3 Axes principaux et tenseur d'inertie	404
6.4 Moment cinétique d'un solide	414
6.5 Approche vectorielle et équations d'Euler	419
6.6 Angles d'Euler et approche lagrangienne	428
6.7 Toupie symétrique libre	434
6.8 Toupie symétrique pesante	440
6.9 Toupie asymétrique libre et stabilité	457
6.10 Exercices	461

JUSQU'ICI nous n'avons considéré que des particules ponctuelles en nombre relativement petit. Nous allons maintenant permettre aux corps physiques d'avoir de véritables dimensions physiques, telles des longueurs, largeurs et épaisseurs. Nous allons cependant nous limiter aux solide indéformables, ce

qui est une approximation de la réalité physique, mais une approximation souvent très valable. Nous considérerons donc que chaque point du corps solide demeure à distance constante de tout autre point du même corps solide. Il n'y a pas de déformation.

6.1 Degrés de liberté du solide

En mécanique classique la structure microscopique du corps solide est sans intérêt. On peut donc le considérer comme constitué d'un grand nombre de *petites* particules ou comme un ensemble continu de matière. Par exemple, la masse d'un tel corps s'écrira

$$M = \sum_i m_i = \int_V \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (6.1)$$

où m_i serait la masse de la particule i , constituante du corps solide, et $\rho(\mathbf{x})$ serait une densité continue de masse (les unités de masse par volume). À l'occasion nous utiliserons donc l'une ou l'autre notation. La notation discrète ($\sum_i$) est parfois plus pédagogique puisqu'elle fait essentiellement la somme sur un grand nombre de particules ponctuelles, concept avec lequel nous sommes maintenant familiers.

Dans l'espace physique à trois dimensions, une particule ponctuelle a trois degrés de liberté. Dans le cas du solide indéformable, on se

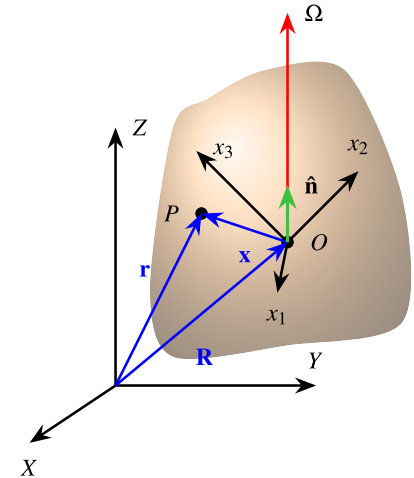


Figure 6.1 ▲

Système de référence inertiel du laboratoire, noté XYZ , et système de référence $x_1x_2x_3$ en rotation autour de Ω et fixé au corps en O .

convainc rapidement que l'état du solide peut se décrire par la position d'un des points du solide (3 degrés de liberté) et l'orientation du solide indéformable par rapport à un système d'axes fixées en ce point, ce qui implique trois autres degrés de liberté. Au total donc un solide a 6 degrés de liberté. (Il est très avantageux, pour assurer la simplicité des expressions qui vont suivre, de choisir le point dont nous suivons le déplacement et par rapport auquel nous mesurons l'orientation du solide, comme étant le centre de masse du solide). Si on visualise le solide comme étant constitué de N particules, on devrait avoir a priori $3N$ degrés de liberté. Le fait qu'il n'en reste que 6, résulte de l'ensemble de contraintes qui font que chacune de ces particules est toujours à égale distance de chacune des autres.

Pour décrire ces 6 degrés de liberté nous procéderons de la façon suivante. Imaginons un premier système de référence, noté XYZ , fixé dans le laboratoire et présumé inertiel. Fixons ensuite solidement au corps en O un nouveau système de référence $x_1x_2x_3$ (voir figure 6.1). Ce système se déplace et tourne avec le solide indéformable. Ce n'est donc généralement pas un système inertiel mais comme il est solidaire du solide il apparaît comme immobile à un observateur se trouvant sur le solide. Pour faciliter le travail à venir, nous centrerons souvent le système $x_1x_2x_3$ sur le centre de masse du solide et définissons $\mathbf{R}$ comme la position du centre de masse du solide dans le système XYZ . $\mathbf{r}$ est la position d'un

point P de ce solide, mesurée dans le système inertiel XYZ . Notons par $\mathbf{x}$ la position de ce même point P mesurée dans le système $x_1x_2x_3$. Comme ce dernier est fixé au corps, $\mathbf{x}$ est constant (mesuré dans $x_1x_2x_3$). Lorsque le solide se déplace, le point P se déplace. Vectoriellement, on voit que

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{x}.$$

Pour mesurer un déplacement dans le système inertiel, $d\mathbf{r}$, nous le décomposons en déplacement du point O , $d\mathbf{R}$, plus un changement possible d'orientation du solide, $d\phi$, mesuré par rapport à l'axe de rotation passant par O . Alors

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\phi \times \mathbf{x} \quad \text{où} \quad d\phi = \mathbf{e}_\perp d\phi \quad (6.2)$$

ce qui nous donne

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{x} \equiv \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (6.3)$$

ou

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}. \quad (6.4)$$

Si $\mathbf{R}$ mesure la position du C.M., c'est-à-dire si O est positionné sur le C.M., alors $\mathbf{V}$ est la vitesse de C.M. et correspond à une translation du solide comme un tout. $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse angulaire du solide et sa direction, comme celle de $d\hat{\phi}$ coïncide avec l'axe de

rotation du solide. Notons qu'elle n'est pas constante en général. Comme le système $x_1x_2x_3$ est fixé dans le solide, $\boldsymbol{\Omega}$ est également la vitesse angulaire de la rotation de ce système. Ce résultat ne dépend en aucune façon du fait que nous ayons centré le système $x_1x_2x_3$ en O , le C.M. du solide. Nous aurions pu choisir ici un autre centre O' déplacé de O par une longueur $\mathbf{a}$ au sens où la position $\mathbf{x}'$ du même point P est reliée à $\mathbf{x}$ par

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a}. \quad (6.5)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{R}' + \mathbf{x}' \\ &= \mathbf{R} + \mathbf{x} \\ &= \mathbf{R} + (\mathbf{x}' + \mathbf{a}) \end{aligned}$$

alors

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' - \mathbf{a}$$

Donc

$$d\mathbf{R} = d\mathbf{R}' \quad (6.6)$$

Nous aurions alors au lieu de (6.4), mais $d\mathbf{R} = d\mathbf{R}'$

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x}' + \mathbf{a}) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}. \quad (6.7)$$

D'autre part, à partir de la forme de (6.4) nous pouvons écrire

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{x}' \quad (6.8)$$

ce qui nous force à identifier, $\mathbf{v}$ étant identique à lui-même et $\mathbf{a}$ arbitraire

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega}. \quad (6.9)$$

La deuxième de ces équations est importante puisqu'elle nous indique que la vitesse angulaire de rotation est totalement indépendante du système $x_1x_2x_3$ (fixé dans le solide) choisi. À un moment donné, tous ces systèmes tournent donc autour d'axes parallèles les uns aux autres (de direction donnée par celle de $\boldsymbol{\Omega}$) avec une même vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$. Cette propriété *d'absolu* dans la rotation du solide ne se retrouve pas dans la translation du solide puisque $\mathbf{V}' \neq \mathbf{V}$. Notons qu'en général, lorsque le solide se déplace, $\boldsymbol{\Omega}$ n'est constant ni en direction ni en longueur. Il est parfois intéressant de choisir une origine O' telle que $\mathbf{V}' = 0$. Instantanément le mouvement apparaîtra comme une rotation pure autour de l'axe défini comme passant par O' évidemment. On appelle cet axe, l'*axe de rotation instantané* du corps. Cependant à partir de maintenant nous choisirons l'origine O du système $x_1x_2x_3$ comme étant le centre de masse du solide, à moins que la chose ne soit clairement spécifiée.

6.2 Énergie cinétique

Considérons le solide comme étant constitué de points matériels discrets et calculons l'énergie cinétique du solide, évidemment

mesurée dans le système inertiel XYZ

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{v}^2 \quad (6.10)$$

la somme porte sur tous les points du solide

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{v}^2 \equiv \frac{1}{2} \sum_a^N m_a \mathbf{v}_a^2$$

mais pour simplifier l'écriture nous laissons tomber les indices identifiant ces points. Nous nous sommes évidemment placés dans le référentiel inertiel et $v^2 = \mathbf{v}^2$ où $\mathbf{v}$ est défini par l'équation (6.4), ce qui donne

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{V}^2 + \sum_{\text{part.}} m \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Les vitesses $\mathbf{V}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ sont les mêmes pour tous les points et peuvent donc sortir des sommes. Ainsi le premier terme devient

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{V}^2 = \frac{\mathbf{V}^2}{2} \sum_{\text{part.}} m = \frac{M \mathbf{V}^2}{2} \quad (6.12)$$

où M = masse totale du solide.

Le deuxième terme devient, par la propriété des produits triples

$$\begin{aligned} \sum_{\text{part.}} m \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) &= \sum_{\text{part.}} m \mathbf{x} \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \\ &= (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \sum_{\text{part.}} m \mathbf{x} \equiv \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.13)$$

parce que la somme est nulle, ayant choisi l'origine du référentiel $x_1 x_2 x_3$ au centre de masse du solide. Pour le troisième terme nous développons le carré du produit vectoriel

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \left[\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2 \right]. \quad (6.14)$$

Au total (6.11) devient donc, lorsque $(x_1 x_2 x_3)$ est centré sur le C.M.,

$$T = \frac{M \mathbf{V}^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m \left[\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x})^2 \right]. \quad (6.15)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique de translation du solide. Ce serait le seul terme si toute la masse du solide était concentrée au C.M. Le deuxième terme est l'énergie cinétique de rotation, donc

$$T = T_{\text{CM}} + T_{\text{rot}}. \quad (6.16)$$

Étudions la forme de T_{rot} en décomposant les vecteurs selon les axes $x_1x_2x_3$ puisque T_{rot} est une énergie cinétique de rotation impliquant certains concepts d'inertie qui seraient propres c'est-à-dire intrinsèques au solide. Les composantes de Ω et de $\mathbf{x}$ seront donc selon les axes du référentiel $Ox_1x_2x_3$ (notons que T demeure mesuré dans le système inertiel)

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m [\Omega_i \Omega_i x_l x_l - \Omega_i \Omega_k x_i x_k] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{part.}} m [\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l x_l - \Omega_i \Omega_k x_i x_k]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Les coordonnées¹ x_j dépendent de la particule sur laquelle on fait la somme mais $\Omega_i \Omega_k$ n'en dépend pas et peut sortir de la somme sur les particules, ce qui donne

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum_{\text{part.}} m [\delta_{ik} x_l x_l - x_i x_k] \\ &\equiv \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k I_{ik} = \frac{1}{2} \Omega_i I_{ik} \Omega_k = \frac{1}{2} \Omega^T I \Omega. \end{aligned} \quad (6.18)$$

¹Dans ce chapitre, nous utilisons la notation d'Einstein où un indice répété dans un terme est automatiquement sommé à moins d'avis contraire, ainsi $\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l x_l = \sum_{i,j,l} \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l x_l$.

Cette expression a la forme usuelle d'une énergie cinétique mais le rôle d'inertie joué par I est plus compliqué que dans le cas des translations. Ici I s'appelle le tenseur d'inertie et on identifie ses éléments

$$I_{ik} = \sum_{\text{part.}} m [x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k] = I_{ki}. \quad (6.19)$$

On dit qu'il est un tenseur parce qu'il a deux indices. On peut dès lors lui donner une représentation matricielle

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Si on écrit aussi

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\Omega}^T = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \quad (6.21)$$

alors on peut écrire

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T I \boldsymbol{\Omega} \quad (6.22)$$

À partir de (6.19) on calcule directement

$$I = \begin{pmatrix} \sum m(x_2^2 + x_3^2) & -\sum m x_1 x_2 & -\sum m x_1 x_3 \\ -\sum m x_2 x_1 & \sum m(x_1^2 + x_3^2) & -\sum m x_2 x_3 \\ -\sum m x_3 x_1 & -\sum m x_3 x_2 & \sum m(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

où ici, on a allégé la notation par $\sum_{\text{part.}} \rightarrow \sum$. On voit aussi qu'on peut passer à une notation et un calcul continu où la matière est réputée être distribuée de façon continue dans le solide selon une densité $\rho(\mathbf{x}) = \rho(x_1, x_2, x_3)$. On écrit alors

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{x}) [x_i x_l \delta_{ik} - x_i x_k] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (6.24)$$

Il est possible de choisir le référentiel $Ox_1 x_2 x_3$ en l'orientant de telle sorte que I est diagonal

$$I = \begin{pmatrix} I_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{3'} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Les éléments $I_{1'}$, $I_{2'}$ et $I_{3'}$ sont en fait les valeurs propres de la matrice (6.23). Ici nous avons noté par un prime (') le référentiel (voir figure 6.2) qui garantit que le tenseur d'inertie est diagonal : $Ox_{1'} x_{2'} x_{3'}$.

On appelle ces trois directions, $Ox_{1'}$, $Ox_{2'}$ et $Ox_{3'}$ les axes principaux (d'inertie) du solide et $I_{1'}$, $I_{2'}$ et $I_{3'}$ les moments principaux d'inertie. Si on choisit le différentiel $Ox_1 x_2 x_3$ pour coïncider avec les axes principaux alors T_{rot} devient une simple somme (plus de matrice !)

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{i'} \Omega_{i'}^2. \quad (6.26)$$

Pour alléger la notation il sera entendu dans ce qui suit que, lorsque les éléments du tenseur d'inertie apparaissent avec un seul indice,

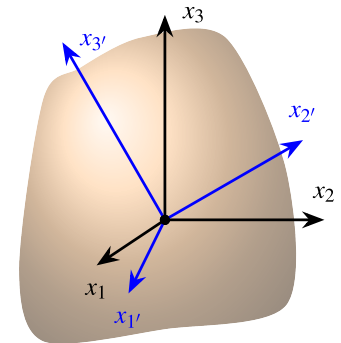


Figure 6.2 ▲

Le tenseur d'inertie est diagonal par un choix judicieux du repère $Ox_{1'} x_{2'} x_{3'}$.

c'est que nous aurons choisi de faire coïncider le référentiel fixé au corps et les axes principaux. Nous laisserons tomber les primes (') pour écrire simplement

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_i \Omega_i^2. \quad (6.27)$$

6.3 Axes principaux et tenseur d'inertie

Il n'est pas nécessaire de deviner à priori la direction des axes principaux. Lorsque le solide a certaines symétries la direction de ces axes est parfois évidente. Il est toujours possible de choisir arbitrairement un système $Ox_1x_2x_3$ et de déterminer par rapport à ce dernier la direction des axes principaux.

On calcule d'abord les éléments de I par rapport au système d'axes choisi, ce qui nous donne I_{ik} qu'on retrouve en (6.19), (6.23) ou (6.24). On remarque d'abord que la matrice (6.23) est symétrique c'est-à-dire

$$I_{ik} = I_{ki} ; \quad I_{ik} \text{ réel} \quad (6.28)$$

Après diagonalisation de la matrice I_{ik} , on obtient les valeurs propres de cette matrice qui seront tout simplement les éléments I_1, I_2 et I_3 de I sous sa forme diagonale, I_D .

De façon plus technique nous dirons qu'il existe une matrice U , ayant un élément inverse U^{-1} , telle que $U^{-1} = U^\dagger$: unitaire

$$UIU^{-1} = I_D : \text{ diagonale.} \quad (6.29)$$

On parle alors de la **diagonalisation de la matrice I** . Dans le cas des moments d'inertie, la matrice U est une matrice de rotation en 3D, c'est-à-dire une matrice réelle et orthogonale 3×3 donc U est un élément du groupe $O(3)$, $U \in O(3)$. Ici

$$U^{-1} = U^\dagger = U^T$$

Reprenant l'expression pour T_{rot}

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T I \mathbf{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{\Omega}^\dagger}_{\mathbf{\Omega}'^\dagger} \underbrace{U^{-1} U I U^{-1}}_{I_D} \underbrace{U \mathbf{\Omega}}_{\mathbf{\Omega}'} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}'^\dagger I_D \mathbf{\Omega}' \end{aligned} \quad (6.30)$$

où $\mathbf{\Omega}' = U \mathbf{\Omega}$, ce qui indique que $\mathbf{\Omega}'$ correspond à $\mathbf{\Omega}$ après une rotation U .

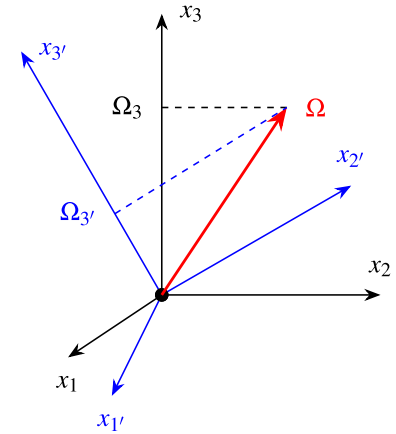


Figure 6.3 ▲

Le système prime qui définit les axes principaux du solide est obtenu par une rotation du système original dont l'origine O est le C.M. du solide.

Strictement ceci termine l'opération puisqu'en (6.30) nous avons T_{rot} écrit en utilisant I_D . Posons

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}.$$

On voit qu'ici

$$\mathbf{\Omega}' = U\mathbf{\Omega} \implies \begin{pmatrix} \Omega_{1'} \\ \Omega_{2'} \\ \Omega_{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Omega_{1'} &= u_{11}\Omega_1 + u_{12}\Omega_2 + u_{13}\Omega_3 \\ \Omega_{2'} &= u_{21}\Omega_1 + u_{22}\Omega_2 + u_{23}\Omega_3 \\ \Omega_{3'} &= u_{31}\Omega_1 + u_{32}\Omega_2 + u_{33}\Omega_3. \end{aligned}$$

Le système prime $Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$ qui définit les axes principaux du solide est obtenu du système original par une rotation du système original à condition que l'origine O ait été choisie comme le C.M. du solide (voir figure 6.3). Autrement il faudra effectuer d'abord une translation vers le C.M. Évidemment le vecteur $\mathbf{\Omega}$ ne bouge pas lors de cette rotation qui n'est en fait qu'un simple réalignement des axes du référentiel fixé dans le solide. Il n'a rien à voir avec le mouvement de rotation du solide.

Techniquement tout repose sur la matrice U , ce qui est relativement simple puisque les colonnes de U^{-1} sont tout simplement les vecteurs propres de I . Ceci se vérifie immédiatement en rappelant (6.29)

$$UIU^{-1} = I_D \quad (6.32)$$

qu'on multiplie par la gauche par U^{-1} ce qui donne

$$IU^{-1} = U^{-1}I_D. \quad (6.33)$$

Il s'agit d'une égalité entre 2 matrices 3×3 . Écrivant v_{ij} pour les éléments U^{-1}

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix}$$

nous explicitons (6.33) mais en ne spécifiant ici que la première colonne des deux matrices produites ce qui donne

$$\begin{pmatrix} I_{11}v_{11} + I_{12}v_{21} + I_{13}v_{31} & \cdots & \cdots \\ I_{21}v_{11} + I_{22}v_{21} + I_{23}v_{31} & \cdots & \cdots \\ I_{31}v_{11} + I_{32}v_{21} + I_{33}v_{31} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 v_{11} & \cdots & \cdots \\ I_1 v_{21} & \cdots & \cdots \\ I_1 v_{31} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

Si deux matrices sont égales c'est que tous leurs éléments sont égaux et par extension les éléments d'une colonne de l'une sont égaux aux éléments d'une colonne de l'autre. Considérons la première colonne de chacune des deux matrices ci-dessus et égalons

l'une à l'autre. On constate immédiatement qu'il est possible d'écrire l'égalité entre ces deux colonnes sous la forme

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = I_1 \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Si nous écrivons $\mathbf{V}_1$ pour la 1^{ière} colonne de U^{-1} c'est-à-dire (ne pas confondre $\mathbf{V}_1$ avec une composante du vecteur vitesse)

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

cette équation s'écrit

$$I\mathbf{V}_1 = I_1\mathbf{V}_1; \quad I_1 = \text{nombre} \quad (6.37)$$

où I_1 est la 1^{ière} valeur propre de la matrice I alors que $\mathbf{V}_1$ est un vecteur colonne. C'est l'équation type du problème aux valeurs propres. Pour résoudre on obtient d'abord les valeurs propres de I et ensuite on obtient les éléments (non normalisés) de $\mathbf{V}_1$ à l'aide de (6.35) ou (6.37). Nous aurons ici 3 équations de ce type à partir de (6.34), une pour chaque valeur propre I_i avec son vecteur propre $\mathbf{V}_i$ qui constitue la $i^{\text{ème}}$ colonne de U^{-1} .

La séquence d'opérations est donc la suivante :

1. Choisir un référentiel centré sur le C.M., $Ox_1x_2x_3$ par rapport auquel on calcule les I_{ij} ; $i, j = 1, 2, 3$, éléments de I .
2. Calculer les valeurs propres de cette matrice, ce qui nous donne I_D qui n'a que les éléments diagonaux I_1 , I_2 et I_3 .
3. Calculer les vecteurs propres $\mathbf{V}_k$ de I , chacun correspondant à une des 3 valeurs propres, I_1 , I_2 et I_3 en utilisant

$$I\mathbf{V}_i = I_i\mathbf{V}_i$$

Ceux-ci correspondent aux **axes principaux** dans le référentiel $Ox_1x_2x_3$.

4. Les $\mathbf{V}_k$ sont les colonnes de la matrice U^{-1} que nous pouvons inverser pour avoir la matrice U , une matrice qui représente une rotation.
5. Puisqu'une rotation représentée par U transforme les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{v}$ dans $Ox_1x_2x_3$ en coordonnées dans $Ox_1'x_2'x_3'$, soit $\mathbf{v}' = U\mathbf{v}$, il est facile d'obtenir le vecteur de base du référentiel $Ox_1x_2x_3$ dans le repère $Ox_1'x_2'x_3'$. Inversement, une rotation représentée par U^{-1} transforme les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{v}'$ dans $Ox_1'x_2'x_3'$ en coordonnées dans $Ox_1x_2x_3$, soit $\mathbf{v} = U^{-1}\mathbf{v}'$ et on peut obtenir le vecteur de base du référentiel $Ox_1'x_2'x_3'$ dans le repère $Ox_1x_2x_3$.

En effet, il est facile de démontrer que les vecteurs de base du référentiel $Ox_1'x_2'x_3'$ correspondent aux axes principaux. Par

exemple, pour le vecteur de base $\mathbf{V}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la direction de l'axe principal 1 dans le repère $Ox_1'x_2'x_3'$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U^{-1}\mathbf{v}' \\ U^{-1}\mathbf{V}'_1 &= U^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{pmatrix} = \mathbf{V}_1 \end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\mathbf{V}_2 = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_3 = U^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 6.1

i La rotation représentée par U est généralement par rapport à un axe qui n'est pas un des axes de $Ox_1x_2x_3$ ni de $Ox_1'x_2'x_3'$. Il est cependant toujours possible d'opérer cette rotation à l'aide de 3 rotations successives faites autour d'axes choisis. La façon la plus courante est celle des angles d'Euler. **i**

Laissant tomber les prime (') et supposant que les axes du système $Ox_1x_2x_3$ coïncident avec les axes principaux la définition

générale des éléments de I_{ij} en (6.19,6.23,6.24) est toujours valide sauf que seuls les termes $j = i$ ne seront pas nuls, nous les avons notés avec un seul indice

$$I_i = I_{ii} = \sum_{\text{part.}} m(x_l x_l - x_i^2) \quad (6.38)$$

où il y a une somme sur l mais non sur i . Ainsi trivialement

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{\text{part.}} m(x_2^2 + x_3^2) \\ I_2 &= \sum_{\text{part.}} m(x_1^2 + x_3^2) \\ I_3 &= \sum_{\text{part.}} m(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned} \quad (6.39)$$

et on note qu'aucun des ces I_i n'est plus grand que la somme des deux autres ; tout au plus est-il égal à cette somme. Lorsque $I_1 = I_2 = I_3$ on dit que nous avons une toupie sphérique. Si deux seulement des moments d'inertie sont égaux, on parle d'une toupie symétrique et si les trois sont différents, d'une toupie asymétrique.

Une remarque importante s'impose ici. Nous avons réussi en (6.15) et (6.18) à écrire

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \quad (6.40)$$

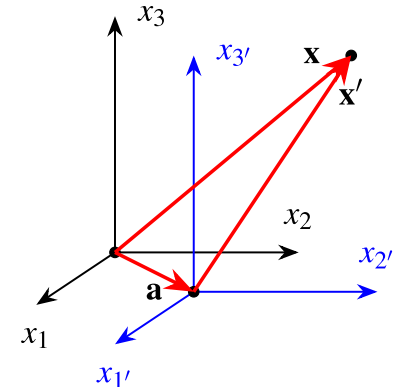


Figure 6.4 ▲
Translation du référentiel.

expression qui n'est valide que si le référentiel intrinsèque S est centré sur le centre de masse, O . Cependant, pour calculer les I_{ik} , il peut s'avérer utile d'utiliser d'abord un autre référentiel S' , également intrinsèque mais centré sur une autre origine O' et dont les axes sont parallèles au premier. Il s'agit donc ici d'une translation du référentiel et non d'une rotation (voir figure 6.4). Appelons $\mathbf{a}$ le déplacement OO' , de telle sorte que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{a} \implies x_i = x'_i + a_i. \quad (6.41)$$

On sait que

$$I_{ik} = \sum_{\text{part.}} m (x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k). \quad (6.42)$$

Par rapport au système prime nous aurons

$$\begin{aligned} I'_{ik} &= \sum_{\text{part.}} m (x'_l x'_l \delta_{ik} - x'_i x'_k) \\ &= \sum_{\text{part.}} m [(x_l - a_l)(x_l - a_l) \delta_{ik} - (x_i - a_i)(x_k - a_k)] \\ &= \sum_{\text{part.}} m [x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k] - 2a_l \delta_{ik} \sum_{\text{part.}} m x_l \\ &\quad - a_i \sum_{\text{part.}} m x_k - a_k \sum_{\text{part.}} m x_i + (a_l a_l \delta_{ik} - a_i a_k) \sum_{\text{part.}} m \\ &= \underbrace{I_{ik}}_{\text{CM}} + M(a_l a_l \delta_{ik} - a_i a_k) \end{aligned} \quad (6.43)$$

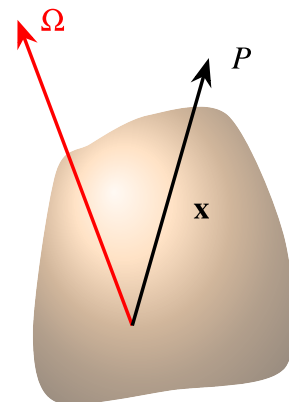


Figure 6.5 ▲

L'origine du référentiel intrinsèque coïncide avec le C.M. du solide.

où $\sum_{\text{part.}} mx_i = 0$ et $\sum_{\text{part.}} m = M$. C'est le fameux *théorème des axes parallèles*.

Théorème 6.1

Théorème des axes parallèles.

Si le repère S' est obtenu du repère du centre de masse S par une translation $\mathbf{a}$

$$I'_{ik} = I_{ik} + M(a_i a_l \delta_{ik} - a_i a_k) \quad (6.44)$$

où I_{ik} est le tenseur d'inertie dans le repère du centre de masse.

Nous savons donc écrire l'énergie cinétique du solide en (6.40). Si le référentiel intrinsèque correspond aux axes principaux alors cette expression se réduit à

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_i\Omega_i^2. \quad (6.45)$$

Deux types de forces peuvent être présentes dans le système ; des forces de cohésion particule-particule dans le solide dont le résultat global sur le solide est nul à cause du principe d'action-réaction comme nous l'avons vu au Chapitre I. Il reste les forces externes et si ces forces sont dérivables d'un potentiel U alors on peut écrire le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_i\Omega_i^2 - U. \quad (6.46)$$

Nous y reviendrons plus tard.

6.4 Moment cinétique d'un solide

Le moment cinétique dépend du point par rapport auquel il est défini. Dans l'étude du mouvement du solide il apparaît raisonnable de choisir ce point à l'origine du référentiel intrinsèque qu'en (6.46) nous avons choisi pour coïncider avec le C.M. du solide (voir figure 6.5). Nous avons noté $\mathbf{x}$ la position d'un point P mesurée à partir de O . Le moment cinétique du voisinage de ce point matériel est

$$\mathbf{L}_P = m\mathbf{x} \times \mathbf{v}. \quad (6.47)$$

Ici, la vitesse $\mathbf{v}$ est uniquement celle due à la rotation du solide, rotation que se fait à la vitesse de rotation instantanée et par conséquent $\mathbf{v}$ est ici $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$ qui ne permet pas de changer la longueur de $\mathbf{x}$ comme il se doit puisque nous avons un solide rigide et donc, sommant sur tous les points matériels nous aurons pour le moment cinétique

$$\mathbf{L} = \sum_{\text{part.}} m\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}). \quad (6.48)$$

Explicitant chaque composante du triple produit vectoriel nous

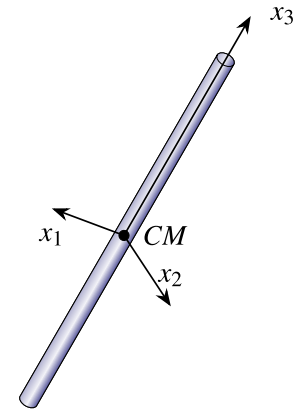


Figure 6.6 ▲

Cas simple: *rotateur* où la masse du solide est essentiellement répartie sur une droite.

avons

$$\begin{aligned}
 L_i &= \sum_{\text{part.}} m (x_l x_l \Omega_i - x_i x_k \Omega_k) \\
 &= \sum_{\text{part.}} m (x_l x_l \delta_{ik} \Omega_k - x_i x_k \Omega_k) \\
 &= \Omega_k \sum_{\text{part.}} m (x_l x_l \delta_{ik} - x_i x_k)
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

et donc

$$L_i = I_{ik} \Omega_k. \tag{6.50}$$

Évidemment si nous avons choisi de faire coïncider le référentiel intrinsèque avec les axes propres du solide nous aurions simplement

$$L_1 = I_1 \Omega_1, \quad L_2 = I_2 \Omega_2, \quad L_3 = I_3 \Omega_3. \tag{6.51}$$

On voit donc qu'en général (sauf pour une toupie sphérique) la direction de $\mathbf{L}$ ne correspond pas à celle de $\boldsymbol{\Omega}$. C'est là une différence *dramatique* avec le mouvement d'une particule et ce seul fait introduit déjà des différences notables entre le mouvement de la particule et celui du solide. Étudions brièvement la situation qui prévaut dans trois cas simples sans forces extérieures, c'est-à-dire le lagrangien se limite à l'énergie cinétique. Dans un tel cas on peut faire coïncider les origines des référentiels inertiel et intrinsèque puisque le C.M. ne sera soumis à aucune accélération : $\mathbf{V} = 0$.

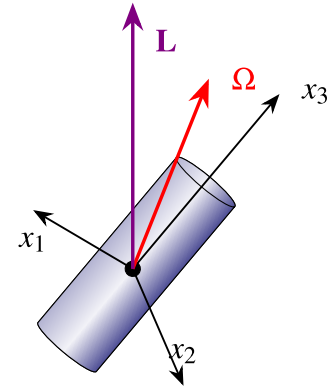


Figure 6.7 ▲
La toupie symétrique.

Exemple 6.1

◆ La toupie sphérique (essentiellement une sphère) a ses trois moments égaux $I_1 = I_2 = I_3 = I$ et par conséquent

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}. \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\Omega} \quad (6.52)$$

En l'absence de force/torque extérieur, $\mathbf{L}$ est une constante. Il en va de même de $\boldsymbol{\Omega}$. La toupie sphérique libre tourne tout simplement par rapport à un axe fixe défini par $\mathbf{L}$ ou $\boldsymbol{\Omega}$ (le même axe) à vitesse constante. ◆

Exemple 6.2

◆ Un autre cas simple est le *rotateur* où la masse du solide est essentiellement répartie sur une droite. Plaçant les axes principaux comme sur la figure 6.6 on voit que $I_3 = 0$, $I_1 = I_2 = I$. De plus $\Omega_3 = 0$ puisque la rotation d'une droite sur son axe est comme la rotation d'un point et n'a pas de sens (du moins classiquement). La vitesse de rotation n'a donc que des composantes Ω_1 et Ω_2 et $\boldsymbol{\Omega}$ se trouve dans le plan x_1Ox_2 comme d'ailleurs $\mathbf{L}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ sont

colinéaires comme dans le cas de la toupie sphérique :

$$\begin{aligned}\Omega &= (\Omega_1, \Omega_2, 0) &\implies &\Omega \parallel \text{plan } x_1 O x_2 \\ \mathbf{L} &= I \Omega &\implies &\mathbf{L} \parallel \Omega\end{aligned}$$



Exemple 6.3

La toupie symétrique (voir figure 6.7) est un véritable objet en trois dimensions (un beignet, un ballon de football sont des toupies symétriques) caractérisé par un axe de symétrie que nous choisissons comme Ox_3 . Ainsi $I_1 = I_2 \neq I_3$ avec I_1, I_2 et $I_3 \neq 0$. En l'absence de torque c'est-à-dire en rotation libre $\mathbf{L} = \text{constante}$. Pour décrire qualitativement le mouvement nous figeons le temps au moment où le plan $\mathbf{L}Ox_3$ est perpendiculaire à l'axe Ox_2

$$\text{plan } \mathbf{L}Ox_3 \perp Ox_2$$

c'est-à-dire correspond au plan $x_1 O x_3$

$$\text{plan } \mathbf{L}Ox_3 \perp \text{plan } x_1 O x_3.$$

À ce moment $L_2 = 0$ mais puisque $L_2 = I_2 \Omega_2$ nous avons $\Omega_2 = 0$.

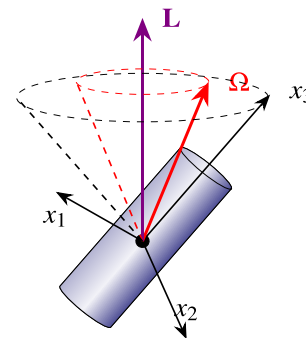


Figure 6.8 ▲

L'axe Ox_3 et le vecteur Ω balayent un cône autour de $\mathbf{L}$.

Donc le vecteur $\mathbf{\Omega}$ est alors également dans le plan $\mathbf{LOx}_3$. La propriété que $\mathbf{L}, \mathbf{\Omega}$ et Ox_3 sont dans le même plan a été obtenue facilement à la suite d'un choix particulier d'orientation de l'axe Ox_2 mais il s'agit d'une propriété indépendante de ce choix qui reste vraie pour tout le mouvement. Ainsi tout point sur l'axe de symétrie Ox_3 , identifié par $\mathbf{x}_a$ a une vitesse donnée par $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}_a$ qui sera nécessairement perpendiculaire au plan $\mathbf{L}\mathbf{\Omega}Ox_3$

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{x}_a \perp \text{plan } \mathbf{L}\mathbf{\Omega}Ox_3 = \text{plan } \mathbf{LOx}_3$$

et puisque $\mathbf{L}$ est constant, en longueur et en direction le mouvement sera forcément tel que l'axe de symétrie Ox_3 tournera autour de la direction donnée par $\mathbf{L}$, dessinant un cône autour de la direction constante, $\mathbf{L}$. Ce mouvement est appelé précession naturelle de la toupie symétrique. Le mouvement de la toupie se décompose donc en rotation de la toupie autour de son axe Ox_3 plus la précession autour de $\mathbf{L}$, on décompose $\mathbf{\Omega}$, qui est dans le plan $\mathbf{LOx}_3$, selon Ox_3 et selon $\mathbf{L}$ qui ne sont en général pas orthogonaux. Pour faire le calcul, on se replace au moment où Ox_1 est dans le plan $\mathbf{L}\mathbf{\Omega}$. Selon la figure 6.9, clairement

$$\cos \chi = \frac{\Omega_1}{\Omega_{\text{pr}}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \quad (6.53)$$

donc

$$\Omega_1 = \Omega_{\text{pr}} \sin \theta \implies \Omega_{\text{pr}} = \frac{\Omega_1}{\sin \theta} \quad (6.54)$$

Nous avons également (voir figure 6.10)

$$\sin \theta = \frac{L_1}{L} = \frac{I_1 \Omega_1}{L} \quad (6.55)$$

donc

$$\Omega_{\text{pr}} = \Omega_1 \frac{L}{I_1 \Omega_1} = \frac{L}{I_1} \quad (6.56)$$

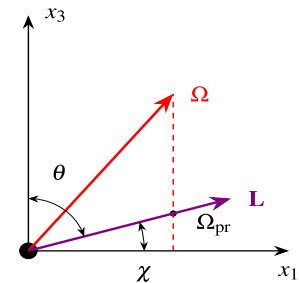


Figure 6.9 ▲

Vitesse angulaire de rotation et de précession.

6.5 Approche vectorielle et équations d'Euler

En pratique on cherche toujours l'approche la plus simple. Par exemple si le solide étudié n'est pas attaché en un point alors on utilisera comme point d'ancrage du système intrinsèque celui qui décompose l'énergie cinétique en un terme de translation plus un terme de rotation. Évidemment si le solide a un point fixé dans un référentiel inertiel, un tel point devient naturel pour définir une origine.

Il n'en demeure pas moins que pour établir des équations de mouvement nous devons nous référer à un référentiel inertiel,

quitte à traduire ensuite en termes de quantités mesurées dans un référentiel non inertiel si on choisit de le faire. Notre solide a 6 degrés de liberté que nous avons noté en page 395 par X, Y, Z, x_1, x_2, x_3 . Donc en principe 6 équations de mouvement. Nous les établirons ici vectoriellement, à la Newton en considérant $\dot{\mathbf{P}}$ et $\mathbf{i}$. Rappelons que $\mathbf{P}$ est le moment linéaire total

$$\mathbf{P} = \sum_{\text{part.}} \mathbf{p} = M\mathbf{V} = \mathbf{P}_{\text{CM}}. \quad (6.57)$$

Nous avons déjà vu au chapitre 1 que

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} : \text{ la force extérieure.} \quad (6.58)$$

On solutionne ce problème exactement comme dans la mécanique d'une particule. Il n'y a rien de neuf ici.

Nous aurons besoin ici de 3 référentiels que nous définissons comme suit :

1. Référentiel L : repère inertiel du *laboratoire*, défini par le système d'axe X, Y, Z .
2. Référentiel S : repère fixé au solide, en général non inertiel, défini par le système d'axe x_1, x_2, x_3 et dont l'origine O est la position du centre de masse.
3. Référentiel SF : repère inertiel défini par le système d'axe X_1, X_2, X_3 et dont l'origine O est la position du centre de masse.

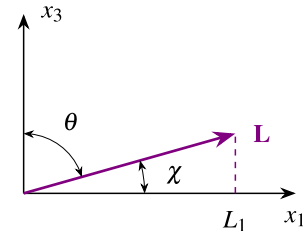


Figure 6.10 ▲
Moment cinétique dans le repère du corps.

Ce repère n'est pas en rotation et est fixe par rapport au référentiel L .

Considérons maintenant $\dot{\mathbf{L}}$, c'est-à-dire la variation dans le temps du moment cinétique/angularaire. Dans un référentiel inertiel ou du *laboratoire* que nous notons par l'indice L

$$\dot{\mathbf{L}}|_L = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_L = \boldsymbol{\tau} \quad (6.59)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le torque extérieur. Nous référant toujours à la figure 6.1 nous pouvons écrire

$$\mathbf{L}|_L = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{L}|_{SF} \quad (6.60)$$

où $\mathbf{L}|_{SF}$ est mesuré par rapport au point O du solide qui sert à y ancrer le référentiel intrinsèque mais le F de l'indice SF signifie que les composantes de $\mathbf{L}$ sont prises par rapport à un référentiel fixe (F), c'est-à-dire qui ne tourne pas avec le solide. À ce point-ci, cette nuance n'est pas significative puisque $\mathbf{L}$ a une existence physique indépendante du référentiel par rapport auquel nous en mesurons les composantes. Par contre, dans ce qui suit nous allons le dériver par rapport au temps et là ça deviendra significatif, parce que dans un premier temps nous voulons éviter les dépendances dans le

temps provenant de la rotation des axes. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}|_L &= \underbrace{\dot{\mathbf{R}} \times M\mathbf{V}}_{=0 \text{ pcq } \dot{\mathbf{R}}=\mathbf{V}} + \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{L}}|_{SF} = \tau \\ &= \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{L}}|_{SF} = \tau.\end{aligned}$$

Ici nous allons nous limiter aux cas où $\dot{\mathbf{V}} = 0$, ce qui veut dire que $\mathbf{V} = \text{constante}$ ou $\mathbf{V} = 0$, ce dernier cas étant utile lorsque le solide a un point fixe dans un référentiel inertiel. Nous gardons donc

$$\dot{\mathbf{L}}|_{SF} = \tau. \quad (6.61)$$

Nous avons cependant pris l'habitude de décomposer $\mathbf{L}_S$ selon un système d'axes qui tourne avec le solide avec la vitesse instantanée $\boldsymbol{\Omega}$. Il s'agit toujours du même vecteur, qui a toujours la même réalité physique mais tout simplement dans le calcul de la dérivée par rapport au temps de ses composantes, nous devons maintenant tenir compte du fait que ces axes tournent. Ils sont donc accélérés et de ce fait le référentiel n'est par inertiel. Ceci implique une contribution de type Coriolis² Nous avons alors

$$\dot{\mathbf{L}}|_{SF} = \dot{\mathbf{L}}|_S + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_S = \tau. \quad (6.62)$$

²voir notes de cours de Mécanique Classique I, Repères accélérés, chapitre 5

Gardant en mémoire que nous mesurerons toujours les composantes de $\mathbf{L}_S$ selon les axes du référentiel intrinsèque qui tourne avec le solide, nous laissons tomber l'indice S et nous écrivons simplement

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} = \boldsymbol{\tau}. \quad (6.63)$$

Si les axes du système intrinsèque coïncident avec les axes principaux nous avons

$$L_i = I_i \Omega_i \quad (\text{pas de somme sur } i). \quad (6.64)$$

Ceci permet d'écrire (6.63)

$$I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \varepsilon_{ijk} \Omega_j \Omega_k I_k = \tau_i \quad (\text{pas de somme sur } i) \quad (6.65)$$

où ε_{ijk} est le « tenseur antisymétrique ». En termes plus explicites nous avons ici 3 équations

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) &= \tau_1 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) &= \tau_2 \quad (1^{\text{ième}} \text{ ligne avec } (1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1)) \\ I_3 \dot{\Omega}_3 - \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) &= \tau_3 \quad (1^{\text{ième}} \text{ ligne avec } (1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2)) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Ce sont les équations d'Euler

Évidemment s'il n'y a aucun torque extérieur, c'est-à-dire $\tau = 0$ alors (6.65) se réduit à

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) &= 0 \\ I_2 \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) &= 0 \\ I_3 \dot{\Omega}_3 - \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

À l'aide de ces équations voyons si nous pouvons refaire le problème de la toupie symétrique. Rappelons que nous avons $I_1 = I_2 \neq I_3 \neq 0$. Avec $I_1 = I_2$, (6.67) nous donne

$$I_3 \dot{\Omega}_3 = 0 \implies \Omega_3 = \text{constante}. \quad (6.68)$$

De plus les deux premières équations de (6.67) deviennent

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{\Omega_3(I_3 - I_1)}{I_1} \Omega_2 \quad (6.69)$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{\Omega_3(I_3 - I_1)}{I_1} \Omega_1 \quad (6.70)$$

et on peut écrire

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega \Omega_2 \quad (6.71)$$

$$\dot{\Omega}_2 = \omega \Omega_1 \quad (6.72)$$

$$\Omega_3 = \text{constante}. \quad (6.73)$$

où $\omega = \Omega_3 \frac{(I_3 - I_1)}{I_1}$. Dérivant la première équation, on obtient

$$\ddot{\Omega}_1 = -\omega \dot{\Omega}_2 \quad (6.74)$$

$$= -\omega^2 \Omega_1 \quad (6.75)$$

et donc

$$\Omega_1(t) = A \cos(\omega t + \beta) \quad (6.76)$$

De plus sachant que $\dot{\Omega}_2 = \omega \Omega_1$, on obtient

$$\Omega_2(t) = A \sin(\omega t + \beta) \quad (6.77)$$

On note que pour tout t ,

$$\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A = \text{constante.}$$

une constante qui est la longueur de la projection de la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}$ dans le plan $x_1 O x_2$ (voir figure 6.11). D'autre part Ω_3 (projection de $\mathbf{\Omega}$ sur l'axe de la toupie) est aussi une constante donc, c'est l'ensemble de $\mathbf{\Omega}$ qui tourne autour de l'axe de la toupie à vitesse angulaire ω .

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= \text{constante} \\ |\mathbf{\Omega}_\perp| &= \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = \text{constante} \end{aligned}$$

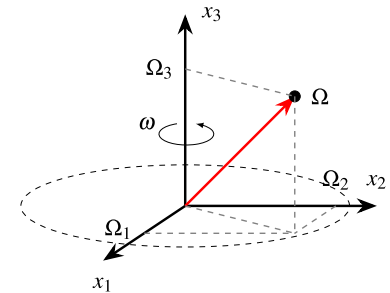


Figure 6.11 ▲

Projection de la vitesse angulaire dans le plan $x_1 O x_2$.

À première vue, ce résultat ne semble pas correspondre au résultat de la page 417 mais on s'intéressait alors à la vitesse de précession de l'axe Ox_3 par rapport à un axe fixe donné par la direction de $\mathbf{L}$. Ici, nous avons tout exprimé (tous les vecteurs dont $\boldsymbol{\Omega}$) selon leurs composantes mesurées p/r au repère du solide c'est-à-dire sur des axes tournants. Il faudrait savoir faire le lien entre les deux. C'est ce que la méthode des angles d'Euler va nous apprendre à faire.

Exemple 6.4

✦ Considérons le mouvement de rotation de la Terre en supposant que le torque dû à la force Soleil-Terre reste faible.

En première approximation, on peut appliquer ce même genre de raisonnement au mouvement de la Terre si on considère que (le torque dû à) la force Soleil-Terre reste faible, donc $\mathbf{V} \approx 0$ est une approximation raisonnable.

Aucun torque extérieur ne s'applique dans ce cas et on peut utiliser (6.67). C'est que la Terre n'est pas tout à fait sphérique (ni rigide) de telle sorte que

$$I_2 \approx I_1 < I_3 \quad (6.78)$$

du fait de l'aplatissement de la Terre si on prend l'axe Ox_3 comme

son axe de rotation. En fait

$$\frac{I_2 - I_3}{I_2} \approx -0.003 \quad (6.79)$$

et par conséquent, appliquant les résultats du problème précédent, nous avons une fréquence

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx -0.003 \Omega_3. \quad (6.80)$$

Or, la Terre tourne sur elle-même en un jour, donc la période est de $\frac{2\pi}{\Omega_3} \approx 1$ jour et par conséquent, on devrait avoir

$$T_{\text{pr}} = \frac{2\pi}{\omega} \approx 333 \text{ jours.} \quad (6.81)$$

De fait, un tel mouvement est observé mais son amplitude est très faible, l'amplitude du déplacement du pôle étant de l'ordre de 5m. D'autre part, la période est réellement

$$T_{\text{pr}} \sim 427 \text{ jours}$$

mais cette différence est imputable au fait que la Terre n'est ni rigide ni uniforme. 

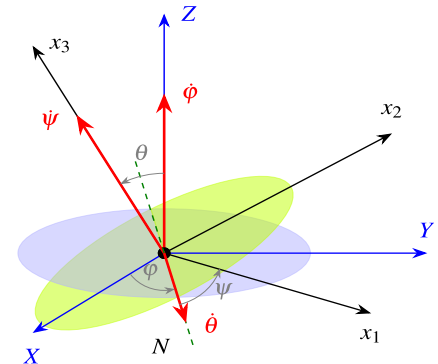


Figure 6.12 ▲

Repère fixe $OXYZ$, repère tournant $Ox_1x_2x_3$ et angles d'Euler.

6.6 Angles d'Euler et approche lagrangienne

Il nous manque encore un outil, celui qui nous permettrait de faire systématiquement le passage entre référentiels tournants et immobiles. Ce même outil faciliterait aussi l'écriture d'un lagrangien. Pourquoi ? Mais parce que les moments d'inertie d'un solide sont constants dans son repère intrinsèque.

Ici, nous ne nous intéressons qu'aux rotations. Nous faisons donc coïncider les origines de $OXYZ$ et de $Ox_1x_2x_3$. Ceci semble indiquer que $\mathbf{V} = 0$ mais en fait s'applique tant que O peut être l'origine d'un référentiel $Ox_1x_2x_3$ de $OXYZ$ c'est une rotation. Cette rotation s'effectue instantanément par rapport à un axe. Malheureusement cet axe peut varier en direction avec le temps. Les angles d'Euler permettent de représenter cette rotation (en fait toute rotation) comme une séquence de trois rotations successives mais par rapport à des axes dont il nous est possible de garder la trace.

Sur la figure 6.12 nous avons indiqué le repère fixe $OXYZ$ et le repère tournant $Ox_1x_2x_3$.

- On y remarque de plus l'axe ou la droite ON qui est la droite de contact entre les plans XOY et x_1Ox_2 . **On l'appelle la ligne nodale.**
- L'angle ϕ est l'**angle entre l'axe OX et cette ligne nodale** suite à une rotation dans le plan XOY , c'est-à-dire par rapport à l'axe OZ .

$$\phi \parallel OZ$$

- L'angle ψ est l'**angle entre cette même ligne nodale et l'axe Ox_1** , mesuré dans le plan x_1Ox_2 , c'est-à-dire par rapport à l'axe Ox_3 .

$$\dot{\psi} \parallel Ox_3$$

- Quant à l'angle θ , c'est simplement l'**angle entre l'axe OZ et l'axe Ox_3** , il correspond à une rotation par rapport à l'axe ON .

$$\dot{\theta} \parallel ON$$

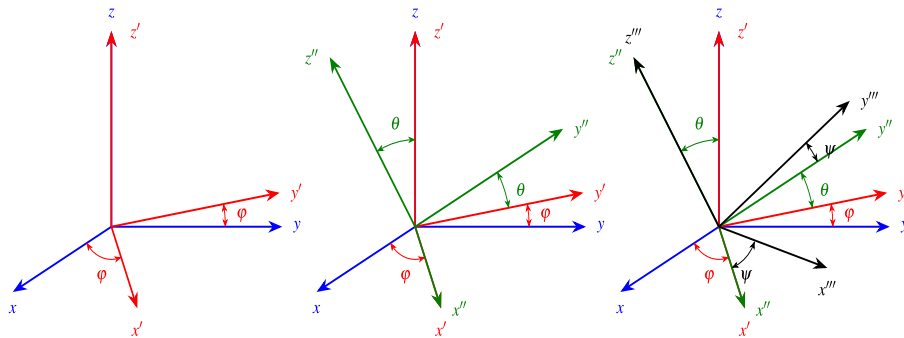


Figure 6.13 ◀▶

Rotations successives par les angles d'Euler autour de l'axe des z (en noir), puis autour du nouvel axe de x' (en bleu), et finalement autour de l'axe des z'' (en vert)

Sur la figure 6.13, les rotations successives menant au repère final S''' sont illustrées :

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{S : (x, y, z)}_{\text{bleu}} & \xrightarrow{R_z(\varphi)} & \underbrace{S' : (x', y', z')}_{\text{rouge}} \\
 & \xrightarrow{R_{x'}(\theta)} & \underbrace{S'' : (x'', y'', z'')}_{\text{vert}} \\
 & \xrightarrow{R_{z''}(\psi)} & \underbrace{S''' : (x''', y''', z''')}_{\text{noir}}
 \end{array}$$

où nous avons identifié le repère fixe $OXYZ$ à $\underbrace{S : (x, y, z)}$ et le repère tournant $Ox_1x_2x_3$ à $S''' : (x''', y''', z''')$.

La transformation correspond à

$R_A(\alpha)$ = rotation autour de l'axe A d'un angle α .

Donc nous avons ici des rotations successives par les angles d'Euler autour de l'axe des z (en bleu), puis autour du nouvel axe de x' (en rouge), et finalement autour de l'axe des z'' (en vert).

Tout vecteur $\mathbf{v}$ dans S peut alors être représenté dans le système S''' en utilisant la matrice de rotation suivante

$$\mathbf{v}''' = \mathbf{R}\mathbf{v}$$

avec

$$R_{z''}(\psi) = \begin{pmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_{x'}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & s_\theta \\ 0 & -s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \quad R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} c_\varphi & s_\varphi & 0 \\ -s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R_{z''}(\psi)R_{x'}(\theta)R_z(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} c_\psi c_\varphi - c_\theta s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\varphi + c_\theta c_\psi s_\psi & s_\theta s_\psi \\ -c_\varphi s_\psi - c_\theta c_\psi s_\varphi & c_\theta c_\psi c_\varphi - s_\psi s_\varphi & c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\varphi & -c_\varphi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où nous avons simplifié les éléments de matrice en écrivant

$$c_\alpha = \cos \alpha \quad s_\alpha = \sin \alpha$$

avec les trois angles d'Euler $\alpha = \varphi, \theta, \psi$.

Sur la figure 6.12 nous avons indiqué le repère fixe $OXYZ$ et le repère tournant $Ox_1x_2x_3$. On y remarque de plus l'axe ou la droite ON qui est la droite de contact entre les plans XOY et x_1Ox_2 . On l'appelle la ligne nodale. L'angle φ est l'angle entre l'axe OX et cette ligne nodale suite à une rotation dans le plan XOY , c'est-à-dire par rapport à l'axe OZ . L'angle ψ est l'angle entre cette même ligne nodale et l'axe Ox_1 , mesuré dans le plan x_1Ox_2 , c'est-à-dire par rapport à l'axe Ox_3 . Quant à l'angle θ , c'est simplement l'angle entre l'axe OZ et l'axe Ox_3 , il correspond à une rotation par rapport

à l'axe ON . Ce sont ces axes par rapport auxquels sont effectuées les rotations que nous avons représentés par $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$. Décomposant ces trois vecteurs de vitesse selon les axes mobiles de $Ox_1x_2x_3$ nous avons

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \psi ; \quad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi ; \quad \dot{\theta}_3 = 0 \quad (6.82)$$

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi ; \quad \dot{\phi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi ; \quad \dot{\phi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta \quad (6.83)$$

$$\dot{\psi}_1 = 0 ; \quad \dot{\psi}_2 = 0 ; \quad \dot{\psi}_3 = \dot{\psi} \quad (6.84)$$

Les composantes Ω_1 , Ω_2 , et Ω_3 de Ω sont simplement les sommes des composantes respectives. Par exemple

$$\Omega_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad (6.85)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Nous avons maintenant complété l'élaboration des outils qui sont nécessaires pour attaquer plusieurs problèmes impliquant le mouvement du solide. En choisissant les axes $Ox_1x_2x_3$ comme les axes

principaux du solide, nous pouvons spécialiser ces expressions pour écrire T_{rot} en fonction des angles d'Euler. Dans ce cas nous avons

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2. \quad (6.87)$$

Par exemple, pour la toupie sphérique où $I_1 = I_2 = I_3 = I$ nous avons

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta \right). \quad (6.88)$$

Pour la toupie symétrique où $I_1 = I_2 \neq I_3$ nous avons

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (6.89)$$

Le cas général de la toupie asymétrique où $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$ prend la forme

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} = & \frac{1}{2}I_1 (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi)^2 \\ & + \frac{1}{2}I_2 (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi)^2 \\ & + \frac{1}{2}I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

6.7 Toupie symétrique libre

Exemple 6.5

Comme exemple d'application, retournons au cas de la toupie symétrique ($I_1 = I_2 \neq I_3$) libre dont le centre de masse est au repos. Choisissons l'axe OZ du référentiel pour qu'il coïncide avec la direction du moment cinétique $\mathbf{L}$ donc

$$\mathbf{L} = L\mathbf{e}_Z : \quad \text{une constante.} \quad (6.90)$$



Se référant à la figure 6.12, on trouve trivialement

$$L_3 = L \cos \theta = I_3 \Omega_3. \quad (6.91)$$

Le rôle du lagrangien sera joué par T_{rot} de la toupie symétrique ci-dessus

$$L = T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (6.92)$$

(aucune énergie cinétique de translation et aucun potentiel).

On constate que ψ et ϕ sont cycliques et par conséquent p_ψ et p_ϕ sont des constantes

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \underbrace{(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)}_{\Omega_3} = I_3 \Omega_3 = \text{constante} \quad (6.93)$$

puisque pour des variables cycliques

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{dp_{\psi}}{dt} = 0.$$

Par conséquent

$$L \cos \theta = I_3 \Omega_3$$

est une constante, donc $\cos \theta$ est une constante, donc θ est constant. De la même façon, calculant

$$\begin{aligned} p_{\varphi} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \cos \theta \\ &= I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \Omega_3 \cos \theta = \text{constante} \end{aligned} \quad (6.94)$$

où I_1, θ et $I_3 \Omega_3$ sont des constantes donc $\dot{\varphi} = \text{constante}$. L'angle φ indique une rotation du référentiel intrinsèque, donc du solide, par rapport à un axe OZ fixe choisi dans la direction de $\mathbf{L}$. C'est donc une précession du solide ou si on préfère de l'axe de symétrie Ox_3 du solide par rapport à cet axe fixe. De toute évidence il s'agit de la même précession que celle étudiée en page 417. Elle est toutefois différente de celle étudiée en page 424 où on étudiait une précession de l'axe de rotation instantanée par rapport à l'axe Ox_3 c'est-à-dire l'axe de $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport à l'axe de symétrie du solide. Dans ce dernier cas nous avons vu que l'axe de rotation de la Terre, qui ne correspond pas à l'axe de symétrie de la Terre (axe des pôles),

tourne autour de cet axe de symétrie avec une période de rotation de 1 an. Ceci n'interdit pas à l'axe de symétrie de la Terre d'effectuer une précession par rapport à un axe approximativement fixe qui serait celui du moment angulaire. Une précession libre de ce type se ferait avec une vitesse angulaire $\dot{\phi}$.

Il convient donc d'étudier celle-ci d'un peu plus près. En fait, nous connaissons la réponse

$$\dot{\phi} = \frac{L}{I_1} ; \quad L \text{ et } I_1 = \text{constantes.} \quad (6.95)$$

Le vecteur $\mathbf{L}$ est constant et on peut le décomposer selon le système d'axes que l'on veut. Choissant le référentiel intrinsèque nous savons que

$$\mathbf{L} = I_1 \boldsymbol{\Omega}_1 + I_2 \boldsymbol{\Omega}_2 + I_3 \boldsymbol{\Omega}_3 \quad (6.96)$$

où $\boldsymbol{\Omega}_i = \Omega_i \mathbf{e}_{x_i}$. Or, ces trois axes sont orthogonaux et ici $I_2 = I_1$, donc

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = I_1^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3^2 \Omega_3^2 = \text{constante} \quad (6.97)$$

que l'on peut récrire en fonction des angles d'Euler

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = I_1^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + I_3^2 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 = \text{constante} \quad (6.98)$$

où $\dot{\theta} = 0$ ($\theta = \text{constante}$) et nous savons déjà par la définition de p_ψ

$$p_\psi = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \Omega_3 = \text{constante}$$

que le deuxième terme est simplement égal à $I_3^2 \Omega_3^2 = L_3^2$, donc

$$\mathbf{L}^2 = I_1^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + L_3^2. \quad (6.99)$$

Sachant que $L_3 = L \cos \theta$ et isolant $\dot{\phi}^2$, nous obtenons

$$\dot{\phi}^2 = \frac{L^2(1 - \cos^2 \theta)}{I_1^2 \sin^2 \theta} = \frac{L^2}{I_1^2} \quad (6.100)$$

c'est-à-dire

$$\dot{\phi} = \frac{L}{I_1} = \frac{L_3}{I_1 \cos \theta} = \frac{I_3}{I_1} \frac{\Omega_3}{\cos \theta}. \quad (6.101)$$

Par exemple, lorsque $I_1 \approx I_3$ et que la vitesse de rotation est essentiellement $\omega \approx \Omega_3$ (le cas de la Terre) alors

$$\dot{\phi} \approx \frac{I_3}{I_1} \omega \approx \omega. \quad (6.102)$$

Pour la Terre, $\omega \approx \frac{2\pi}{\text{jour}}$. Ainsi dans le cas libre il y a une précession de l'axe de symétrie par rapport à un axe dont la direction est donnée par le vecteur moment angulaire constant $\mathbf{L}$, et cette précession a une vitesse angulaire donnée par $\dot{\phi}$. Dans le cas de la Terre, cette précession fait que l'axe de symétrie de la Terre tourne autour de $\mathbf{L}$ approximativement une fois par jour. Toujours dans le cas de la Terre, il y a une autre précession causée par un torque cette fois, résultant de l'action de la lune et du soleil sur une terre

non sphérique. Cette précession, dite des équinoxes est de plus grande amplitude mais a une période d'environ 26,000 ans. Elle est donc faible et il était raisonnable en première approximation de la négliger et de parler de « toupie libre ».

La situation n'est pas encore lumineuse. En effet en page 424 nous avons étudié la précession libre à l'aide des équations d'Euler et obtenu une période de précession de l'ordre d'une année pour la Terre. C'est suffisamment différent de la période d'environ une journée obtenue ci-dessus, apparemment dans les mêmes conditions, pour se poser la question de la cohérence entre ces deux résultats. Physiquement, la situation est effectivement différente. La période d'environ 1 journée ci-dessus est celle de la précession de l'axe de symétrie de la Terre par rapport à l'axe défini par la direction de $\mathbf{L}$. En page 424 nous avons étudié la précession du vecteur $\mathbf{\Omega}_\perp$, tel que

$$\mathbf{\Omega}_\perp = \mathbf{\Omega}_1 + \mathbf{\Omega}_2 \quad \text{ou} \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_\perp + \mathbf{\Omega}_3 \quad (6.103)$$

par rapport à l'axe Ox_3 , lui-même mobile. Cette précession apparaît dans la dépendance dans le temps de $\mathbf{\Omega}_1$ et $\mathbf{\Omega}_2$

$$\mathbf{\Omega}_1 = A \sin(\Omega_{\text{pr}} t + \delta) \quad (6.104)$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = A \cos(\Omega_{\text{pr}} t + \delta). \quad (6.105)$$

Étudions donc ici ce que nous obtenons pour $\mathbf{\Omega}_1(t)$. De (6.86)

$$\mathbf{\Omega}_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi. \quad (6.106)$$

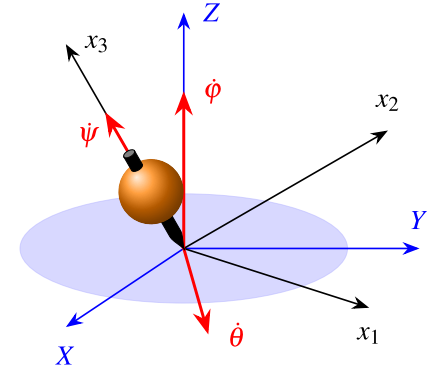


Figure 6.14 ▲

Toupie symétrique: repère fixe $OXYZ$, repère tournant $Ox_1x_2x_3$ et angles d'Euler.

Ici $\theta = \text{constante} = \theta_0$, donc $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\phi} = \frac{L}{I_1}$ et donc

$$\Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi = \frac{L}{I_1} \sin \theta_0 \sin \psi. \quad (6.107)$$

À partir de (6.104), on peut alors identifier

$$A = \left| \frac{L \sin \theta_0}{I_1} \right|$$

et en principe l'évolution de ψ qui devrait s'écrire

$$\psi(t) = \Omega_{\text{pr}} t + \delta.$$

Il nous reste à vérifier cette dernière relation.

Recherche de $\psi(t)$:

Rappelant la définition de p_ψ déjà obtenue (6.93) nous avons

$$\begin{aligned} p_\psi &= I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ &= I_3 \Omega_3 = L_3 = L \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.108)$$

On peut y isoler $\dot{\psi}$ en remplaçant $\dot{\phi} = \frac{L}{I_1}$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta \quad (6.109)$$

$$= \frac{1}{I_3} \left(L \cos \theta - I_3 \cos \theta \frac{L}{I_1} \right) \quad (6.110)$$

$$= \frac{L \cos \theta}{I_3} \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} = \frac{L_3}{I_3} \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \quad (6.111)$$

avec $L_3 = I_3\Omega_3 = L\cos\theta$, nous avons

$$\psi = \Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \Rightarrow \psi = \Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} t + \psi_0 \quad (6.112)$$

où $\Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} = \text{constante}$. Nous avons donc pour $\Omega_1(t)$

$$\Omega_1(t) = \frac{L}{I_1} \sin\theta_0 \sin \left[\Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} t + \psi_0 \right]. \quad (6.113)$$

Nous identifions donc, comparant (6.113) à (6.104) et (6.105)

$$|A| = \left| \frac{L \sin\theta_0}{I_1} \right| ; \quad \delta = \psi_0 ; \quad |\Omega_{\text{pr}}| = \left| \Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \right|. \quad (6.114)$$

Nous avons donc le même résultat pour Ω_2 . Ainsi, la composante transverse à de l'axe de symétrie de la Terre Ox_3 , c'est-à-dire $\Omega_{\perp}$, tourne autour de ce axe avec la fréquence angulaire

$$|\Omega_{\text{pr}}| = \left| \Omega_3 \frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \right|$$

dont la période est de l'ordre d'un an.

6.8 Toupie symétrique pesante

C'est l'exemple typique de tout manuel de mécanique. Ayant complété l'étude du mouvement du solide libre, nous nous attaquons

au mouvement du solide soumis à un torque. Pour ce faire nous choisissons l'exemple le plus simple d'une toupie symétrique dont la pointe est fixe et placée dans un champ gravitationnel uniforme. Comme la pointe est fixe, nous allons l'utiliser comme l'origine à la fois pour le système inertiel $OXYZ$ et pour le système intrinsèque $Ox_1x_2x_3$ qui lui, tourne avec la toupie (voir la figure 6.14). À priori ceci semble poser un problème puis que nous avons réussi en (6.40) à séparer T à condition que l'origine du référentiel intrinsèque coïncide avec le C.M. du solide, ce qui n'est pas le cas ici. Par contre ici, les deux origines coïncident et donc $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \mathbf{0}$ et il ne reste que la contribution à l'énergie cinétique venant de T_{rot} . De plus, le corps étant symétrique, l'énergie cinétique de rotation peut s'écrire

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\Omega_3^2 \quad (6.115)$$

avec $I_1 = I_2$ mais ici I_1 n'est pas égal au moment d'inertie calculé par rapport à l'axe principal 1 : $I_{1\text{princ}}$ qui lui, passe par le C.M. Cependant, par le théorème des axes parallèles on calcule trivialement que le I_1 qui apparaît ici est simplement

$$I_1 = I_{1\text{princ}} + Mh^2 \quad (6.116)$$

où M est la masse de la toupie et h la distance séparant la pointe du C.M. Auparavant nous n'avions pas l'habitude de spécifier « princ » pour alléger l'écriture. Ici, nous retenons le symbole pour mettre en

évidence la relation entre le moment d'inertie requis et *le moment d'inertie p/r un axe principal*.

En terme des angles d'Euler,

$$\Omega_i = \dot{\theta}_i + \dot{\phi}_i + \dot{\psi}_i, \quad (6.117)$$

où

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \\ \Omega_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \\ \Omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 + \Omega_2^2 &= \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \\ \Omega_3^2 &= (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

et l'équation (6.115) est identique à (6.89) puisque $I_2 = I_1$

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (6.118)$$

tenant compte que I_1 est défini en (6.116). Comme le champ gravitationnel est constant on peut représenter son effet comme une force Mg appliquée au C.M. Puisque la pointe est fixe, cette force génère

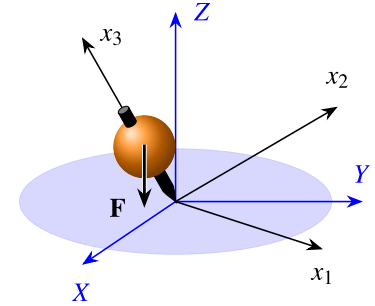


Figure 6.15 ▲
Toupie symétrique pesante.

un torque ainsi $\mathbf{L}$ n'est plus une constante du mouvement. Pour écrire le lagrangien nous n'avons besoin que de l'énergie potentielle résultant de la présence de ce champ de force, c'est simplement

$$V = Mgh \cos \theta \quad (6.119)$$

et alors

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta. \quad (6.120)$$

Ici, comme d'ailleurs dans le cas libre, ϕ et ψ sont cycliques et par conséquent p_ϕ et p_ψ sont des constantes du mouvement. D'autre part de façon générale $\dot{\mathbf{L}} = \boldsymbol{\tau}$ (le torque) où $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (voir figure 6.15). Or ici la force $\mathbf{F}$ est parallèle à OZ , donc $\mathbf{r} \times \mathbf{F} \perp OZ$ et

$$\tau_Z = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_Z = 0$$

c'est-à-dire

$$L_Z = \text{constante.}$$

De plus cette force est attachée à un point se trouvant sur l'axe Ox_3

$$\tau_3 = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_3 = 0.$$

et donc

$$L_3 = \text{constante.}$$

aussi. Nous avons déjà remarqué (dans le cas libre) en (6.93) que

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ &= I_3 \Omega_3 = L_3 = \text{constante} \end{aligned} \quad (6.121)$$

identifiant p_ψ à L_3 . D'autre part, il est également évident que

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta \\ &= L_Z = \text{constante.} \end{aligned} \quad (6.122)$$

Combinant ces deux expressions

$$\begin{aligned} p_\phi - p_\psi \cos \theta &= L_Z - L_3 \cos \theta \\ &= I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (6.123)$$

Combinant (6.122) et (6.123)

$$\begin{aligned} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) &= L_3 \\ I_3 \left(\dot{\psi} + \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \right) &= \end{aligned}$$

nous isolons $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \frac{\cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} (L_Z - L_3 \cos \theta). \quad (6.124)$$

Si on connaît $\theta(t)$, on peut en principe intégrer (6.123) et (6.124) pour obtenir $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, ce qui donnerait la solution complète du problème.

Pour obtenir $\theta(t)$ on peut solutionner l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (6.125)$$

avec

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - Mgh \cos \theta.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= I_1 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 (2 \sin \theta \cos \theta) + \frac{1}{2} I_3 (2 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) (-\dot{\varphi} \sin \theta)) + Mgh \sin \theta \\ &= I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) (-\dot{\varphi} \sin \theta) + Mgh \sin \theta \\ &= \frac{(L_3 - L_Z \cos \theta) (L_Z - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} + Mgh \sin \theta \end{aligned}$$

qui, après substitution de (6.123) et (6.124) donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= I_1 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{(L_3 - L_Z \cos \theta)(L_Z - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} + Mgh \sin \theta.\end{aligned}$$

Notons, qu'ici, il est possible de procéder autrement, c'est-à-dire en éliminant $\dot{\phi}$ et $\dot{\psi}$ du lagrangien à l'aide de (6.123) et (6.124) pour obtenir une équation différentielle uniquement en θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$. Alors

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2 I_3} - Mgh \cos \theta \quad (6.126)$$

et on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= I_1 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{(L_3 - L_Z \cos \theta)(L_Z - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} + Mgh \sin \theta\end{aligned}$$

Dans les deux cas, isolant $\ddot{\theta}$ de l'équation d'Euler-Lagrange, on

obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (6.127)$$

$$I_1 \ddot{\theta} = \frac{(L_3 - L_Z \cos \theta)(L_Z - L_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} + Mgh \sin \theta \quad (6.128)$$

$$\equiv - \frac{\partial}{\partial \theta} V_{\text{eff}}(\theta) \quad (6.129)$$

ce qui nous permettrait d'identifier (par définition) un potentiel efficace $V_{\text{eff}}(\theta)$ pour le mouvement en θ . Est-il besoin de dire qu'intégrer une telle équation différentielle est techniquement assez difficile ? Il existe cependant une autre approche qui nous donne V_{eff} plus facilement. Rappelons qu'en présence d'un torque, $\mathbf{L}$ n'est plus une constante de mouvement mais que l'énergie E continue d'être une constante du mouvement là où

$$E = T + V. \quad (6.130)$$

Utilisant (6.118), (6.119) et (6.121), nous avons

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \underbrace{\frac{L_3^2}{2I_3}}_{\text{const.}} + Mgh \cos \theta. \quad (6.131)$$

Puisque l'énergie est définie à une constante près, on peut travailler avec

$$E' = E - \frac{L_3^2}{2I_3} - Mgh$$

et à l'aide de (6.123) nous avons

$$E' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - Mgh(1 - \cos \theta) = T_\theta + V_\theta \quad (6.132)$$

définissant ainsi

$$T_\theta = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2$$

$$V_\theta = \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - Mgh(1 - \cos \theta),$$

un potentiel efficace V_θ pour l'étude du mouvement en θ . Isolant $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_1} (E' - V_\theta)}$$

et en principe, on peut intégrer

$$\theta = \int \sqrt{\frac{2}{I_1} (E' - V_\theta)} dt$$

Ici aussi l'intégration mène à des intégrales elliptiques et on perd les propriétés du mouvement dans les méandres techniques.

Heureusement il est possible de déterminer qualitativement les propriétés intéressantes de ce mouvement. Avant de procéder cependant remarquons que si $\theta = 0$, V_θ semble exploser à cause

du facteur $\sin^2 \theta$ au dénominateur. En fait, à $\theta = 0$, les axes Ox_3 et OZ coïncident, et $L_Z - L_3 \cos \theta = 0$. C'est donc une indétermination. On peut vérifier, par la règle de l'Hôpital que le terme litigieux de $V_\theta \rightarrow 0$ lorsque $\theta \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} V_\theta &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{d(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{d\theta}}{\frac{d(2I_1 \sin^2 \theta)}{d\theta}} - \lim_{\theta \rightarrow 0} Mgh(1 - \cos \theta) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2(L_Z - L_3 \cos \theta) L_3 \sin \theta}{4I_1 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta) L_3}{2I_1 \cos \theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Considérons maintenant le changement de variable suivant

$$u = \cos \theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{u} = -\dot{\theta} \sin \theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}} \quad (6.133)$$

dans (6.132)

$$\begin{aligned} E' &= \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - Mgh(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{I_1}{2} \frac{\dot{u}^2}{(1-u^2)} + \frac{(L_Z - L_3 u)^2}{2I_1 (1-u^2)} - Mgh(1-u), \end{aligned}$$

puis isolons $\dot{u}^2$ pour obtenir

$$\dot{u}^2 = \frac{2(1-u^2)}{I_1} \left(E' - \frac{(L_Z - L_3 u)^2}{2I_1(1-u^2)} + Mgh(1-u) \right) \quad (6.134)$$

$$= \frac{2(1-u^2)}{I_1} (E' + Mgh(1-u)) - \frac{(L_Z - L_3 u)^2}{I_1^2} \quad (6.135)$$

Nous obtenons une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre 2 qui prend la forme

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b - au)^2 \equiv f(u). \quad (6.136)$$

avec

$$\alpha = \frac{2(1-u^2)}{I_1} (E' + Mgh) \quad (6.137)$$

$$\beta = \frac{2(1-u^2)}{I_1} Mgh \quad (6.138)$$

$$b = \frac{L_Z}{I_1} \quad (6.139)$$

$$a = \frac{L_3}{I_1} \quad (6.140)$$

Le terme de droite de (6.136) est une fonction $f(u)$ c'est-à-dire un polynôme cubique en u dont le coefficient de u^3 , $\beta > 0$. Donc

$f(-\infty) \rightarrow -\infty$ et $f(+\infty) \rightarrow +\infty$ avec soit deux extrema en général entre ces deux limites, soit aucun extremum.

Puisque $u = \cos \theta$, seul le problème de u compris $u = -1$ et $u = +1$ nous intéresse. D'autre part en (6.136)

$$f(u) = \dot{u}^2 > 0 \quad \text{i.e. } f(u) \geq 0 \quad (6.141)$$

et nous sommes donc limités au domaine où $f(u) > 0$ entre u_1 et u_2 . Pour qu'une situation physique existe, il faut que ces deux conditions soient remplies

$$\begin{aligned} -1 &\leq u \leq 1 \\ f(u) &\geq 0. \end{aligned}$$

Si tel est le cas et puisque θ marque l'angle entre la verticale et l'axe de symétrie de la toupie, cet axe de symétrie aura, par rapport à la verticale, un angle qui oscillera entre les angles θ_1 et θ_2 où

$$\cos \theta_1 = u_1, \quad \cos \theta_2 = u_2. \quad (6.142)$$

C'est ce qu'on appelle une *nutation* (voir figure 6.16). Rappelons qu'en (6.123) nous avons obtenu pour $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (6.143)$$

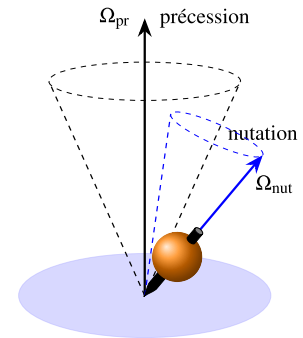


Figure 6.16 ▲
Précession et nutation.

Selon les conditions initiales qui déterminent L_Z et L_3 et selon le domaine de variation permis pour θ , donc pour $\cos \theta$ on peut identifier trois scénarios différents pour

1. $L_Z - L_3 \cos \theta > 0$ pour tout le domaine de variation de θ . Alors $\dot{\phi}$ ne change pas de signe et la précession est continue bien que de vitesse variable. (La même chose est valide si $L_Z - L_3 \cos \theta < 0$ dans tout le domaine, on change simplement le signe de $\dot{\phi}$).
2. $L_Z - L_3 \cos \theta$ change de signe entre θ_1 et θ_2 . Parce que la fonction $\cos \theta$ est monotone croissante entre -1 et $+1$, alors $\dot{\phi}(\theta_2)$ aura le signe inverse de $\dot{\phi}(\theta_1)$. La précession continuera de se produire mais avec des mouvements de va-et-vient.
3. $L_Z - L_3 \cos \theta$ ne change pas de signe dans le domaine $\theta_1 < \theta < \theta_2$ mais s'annule soit à θ_1 soit à θ_2 . Dans ce cas la précession est toujours dans la même direction mais marque un temps d'arrêt lorsque la nutation atteint une de ses valeurs limites (soit θ_1 soit θ_2) là où $\dot{\phi}$ s'annule.

Il est habituel de représenter ces trois situations à l'aide de figures simples. On dessine une sphère qui est celle que l'extrémité libre de la toupie peut générer (puisque'elle a une pointe fixe) et sur la surface de cette sphère on trace la trajectoire que la pointe libre y dessinerait. On a alors les trois sphères de la figure 6.17 respectivement.

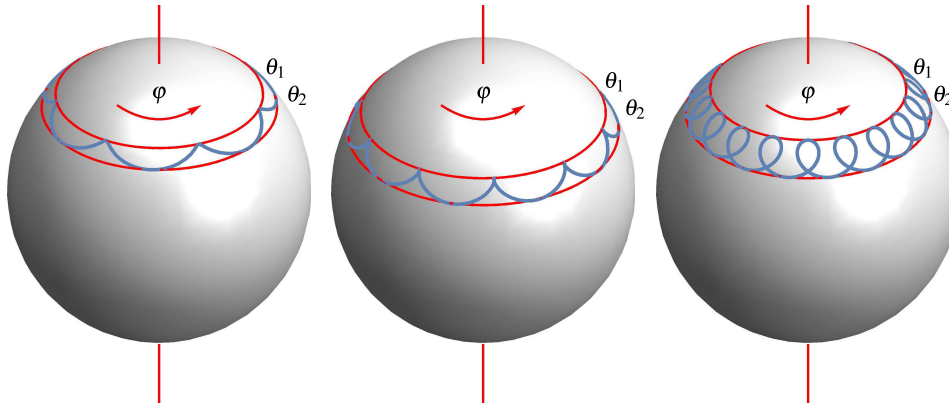


Figure 6.17 ◀▶
Précession et nutation.

Tous ceux qui se sont amusés avec une toupie ont pu constater la chose suivante. Si on démarre la toupie avec une vitesse élevée et une faible inclinaison par rapport à la verticale, alors elle *dort*, son axe demeurant pratiquement vertical. La friction aidant sa vitesse diminue jusqu'au point où la toupie devient presque brutalement instable. Pour étudier ce phénomène rappelons la définition de V_θ en (6.132)

$$V_\theta = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} - Mgh(1 - \cos \theta). \quad (6.144)$$

On constate d'abord que $V_\theta(\theta = 0) = Mgh$ et que le deuxième terme de V_θ est répulsif parce que $\cos \theta$ est maximum à $\theta = 0$. Si la position de la toupie est stable à $\theta \approx 0$, c'est que V_θ doit avoir un minimum

à $\theta \approx 0$. Pour étudier ce phénomène faisons un développement en série de V_θ valable aux petits angles (série de Taylor)

$$V_\theta = V_\theta(0) + \theta \left. \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2} \left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} + \dots \quad (6.145)$$

Se rappelant qu'à $\theta = 0$, OZ et Ox_3 coïncident, donc $L_3 = L_Z$

$$V_\theta(0) = 0 = \text{constante sans intérêt} \quad (6.146)$$

$$\left. \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_Z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \right|_{\theta=0} - Mgh \sin \theta|_{\theta=0}. \quad (6.147)$$

Alors utilisant la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 - 0 = 0 : \text{extremum à } \theta = 0. \quad (6.148)$$

Par ailleurs

$$\left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{L_3^2 (1 - \cos \theta)}{I_1 \sin^4 \theta} (2 + \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) \right|_{\theta=0} - Mgh \cos \theta|_{\theta=0} \quad (6.149)$$

Même utilisant une fois la règle de l'Hôpital, le premier terme mène à une indétermination,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{L_3^2 (1 - \cos \theta)}{I_1 \sin^4 \theta} (2 + \cos^2 \theta - 3 \cos \theta) = \frac{0}{0} \quad (6.150)$$

Une double application de la règle de l'Hôpital donne cependant

$$\left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{L_3^2}{I_1} \frac{1}{4} - Mgh. \quad (6.151)$$

Au total donc

$$V_\theta = \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{L_3^2}{4I_1} - Mgh \right) + \dots \quad (6.152)$$

L'extremum à $\theta = 0$ sera un minimum si

$$\left. \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{L_3^2}{4I_1} - Mgh > 0$$

donc si

$$L_3^2 = I_3^2 \Omega_3^2 > 4I_1 Mgh$$

ou encore

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1 Mgh}{I_3^2} \quad (6.153)$$

On en conclut que :

1. tant que la vitesse de rotation de la toupie *qui dort*, essentiellement Ω_3 , satisfait cette condition,

$$\Omega_3 > \sqrt{\frac{4I_1 Mgh}{I_3^2}}$$

la position verticale de la toupie est stable.

2. lorsque la friction fait tomber la vitesse sous cette limite, l'extremum de V_θ à $\theta \approx 0$ devient instable et le mouvement devient rapidement désordonné.

Le tout est en fait le résultat d'une compétition entre le termes de V_θ , le terme dû à la gravité $Mgh\cos\theta$, qui tend à faire tomber la toupie, et un terme qui provient de la rotation de la toupie et tend à la garder verticale. Plus la vitesse de rotation augmente Ω_3 , plus la stabilité est grande et moins l'effet de $Mgh\cos\theta$ (donc du torque extérieur) est important. En fait, on peut dire qu'à grande vitesse Ω_3 , le terme dû à la gravité $Mgh\cos\theta$ devient négligeable par rapport au terme dû à la rotation et la situation ressemble au cas libre.

Références 6.1

 Le gyroscope en action :

Roue de bicyclette :

<http://www.youtube.com/watch?v=8H98BgRzpOM&feature=related>

Gyroscope :

http://www.youtube.com/watch?v=cquvA_IpEsA&feature=related

Le Cubli :

https://www.youtube.com/watch?v=n_6p-1J551Y



6.9 Toupie asymétrique libre et stabilité

Nous avons ici $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Posons ici $I_1 < I_2 < I_3$. Dans la cas libre, nous avons essentiellement conservation de $\mathbf{L}$ donc de L^2 et de E . Développant selon les axes principaux nous aurons

$$L^2 = L^2 = I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 = \text{constante} \quad (6.154)$$

$$E = \frac{1}{2} I_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2 = \text{constante.} \quad (6.155)$$

On peut aussi écrire

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \quad (6.156)$$

$$E = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3} \quad (6.157)$$

Traçant les trois axes orthogonaux de coordonnées, L_1 , L_2 et L_3 , on constate que la première équation définit la surface d'une sphère de rayon L alors que la deuxième définit la surface d'une ellipsoïde de demi-axes de longueurs $\sqrt{2EI_1}$, $\sqrt{2EI_2}$ et $\sqrt{2EI_3}$. Les deux équations doivent être satisfaites simultanément. Ainsi l'extrémité du vecteur $\mathbf{L}$ ne pourra suivre que les courbes d'intersection de ces deux surfaces. Il est également clair que

$$2I_1 E = L_1^2 + \frac{I_1}{I_2} L_2^2 + \frac{I_1}{I_3} L_3^2 \leq L^2$$

puisque $I_1 < I_2 < I_3$. De la même façon,

$$2I_3E = \frac{I_3}{I_1}L_1^2 + \frac{I_3}{I_2}L_2^2 + L_3^2 \geq L^2$$

Donc

$$2EI_1 \leq L^2 \leq 2EI_3 \quad (6.158)$$

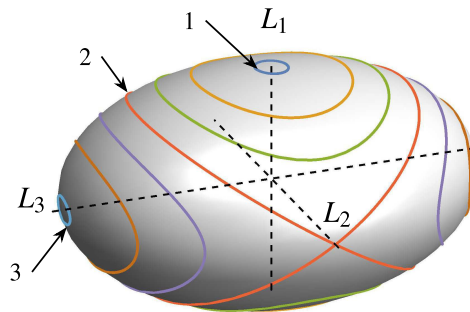


Figure 6.18 ◀▶

La toupie asymétrique libre: série de trajectoires tracées par la pointe de $\mathbf{L}$ pour différentes valeurs de L .

On note alors que :

1. Si $L^2 = 2EI_1$, c'est que $L_2 = L_3 = 0$ ou L est minimum et $\mathbf{L}$ est selon l'axe 1.
2. Si $L^2 = 2EI_3$, c'est que $L_1 = L_2 = 0$ ou L est maximum et $\mathbf{L}$ est selon l'axe 3.
3. Toutes les valeurs intermédiaires sont permises.

On voit sur la figure 6.18 une série de trajectoires tracées par la pointe de **L** pour différentes valeurs de L croissant allant de la trajectoire 1 où L est près de la valeur minimum jusqu'à la trajectoire 3 où L est près de sa valeur maximale.

1. Courbe 1 : Dans le cas de la courbe 1, L est près de la valeur minimale donc et **L** est surtout selon l'axe 1 ce qui indique une rotation autour de l'axe 1. On voit que la trajectoire est fermée et que **L** dérive peu de la direction 1. La rotation autour, ou presque, de l'axe 1 est stable.
2. Courbe 3 : La même chose s'applique lorsque L est près de la valeur maximale alors que **L** est près de la direction de l'axe 3, indiquant une rotation autour de l'axe 3. Ici encore **L** trace une trajectoire fermée autour de l'axe 3.
3. Courbe 2 : Mais tel n'est pas le cas lorsque la rotation se fait autour de l'axe 2 parce que les trajectoires tracées par **L** et qui passent près de ou par la direction de l'axe 2 (rotation autour de cet axe) ne sont pas fermées autour de l'axe 2 mais se promènent tout autour de l'ellipsoïde, passant même par les parties négatives de L_2 . Nous en concluons qu'une trajectoire initiée autour de l'axe 2, celui dont le moment d'inertie a la valeur intermédiaire, entre I_1 et I_3 , sera instable. C'est ce qu'on constate expérimentalement lorsqu'on fait tourner une raquette ou un livre (gardé fermé par un élastique) par exemple.

Cette explication est clairement plus qualitative que quantitative mais elle nous donne néanmoins une image raisonnable du phénomène.

6.10 Exercices

6.1 Triangle mince

Soit le triangle mince de densité surfacique $\sigma(x,y) = x$ illustrée à la figure 6.19.

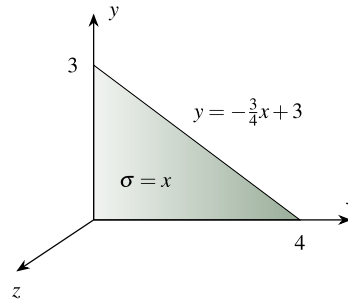


Figure 6.19 ◀▶
Problème 6.1

- Déterminez la position du centre de masse.
- Déterminez le tenseur d'inertie par rapport au centre de masse. (Indice : trouvez d'abord le tenseur par rapport à l'origine du système (x,y,z) et appliquez le théorème des axes parallèles)
- Déterminez les axes principaux et les valeurs d'inertie qui y sont associées.
- Considérez maintenant que le triangle a une épaisseur $\Delta z = \varepsilon \ll 1$ et donc, ayant la même masse, sa densité volumique est $\rho(x,y,z) = x/\varepsilon$. Montrez qu'au premier or-

dre en ε , le moment d'inertie I_{xx} autour de l'axe x est le même que celui trouvé en (b).

6.2 Cylindre creux

Considérez le système constitué d'un cylindre creux de rayon R roulant sur un plan horizontal dont le centre de masse est déplacé par rapport à son axe de symétrie naturel d'une valeur a (voir figure 6.20). L'un des axes principaux demeure parallèle à l'axe de symétrie du cylindre. Il n'y a qu'un degré de liberté qu'on associe à l'angle ϕ . La masse totale du cylindre est M . Trouvez l'énergie cinétique totale $T(\dot{\phi}, \phi)$.

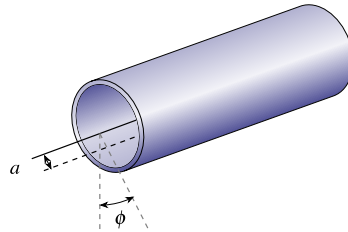


Figure 6.20 ◀▶
Problème 6.2

6.3 Masse-ressort revisité

On considère le système suivant en 2-D (voir figure 6.21). Une particule ponctuelle de masse m glisse sur un axe et est attachée, par un ressort de constante k , à l'origine. Attaché à ce corps, il y a un pendule rigide : tige de longueur L et de masse M distribuée de façon homogène avec une densité

linéaire constante

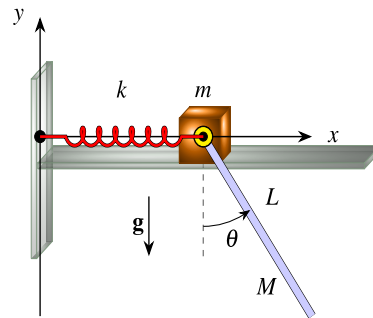


Figure 6.21 ◀▶
Problème 6.3

- Calculez le moment d'inertie de la tige.
- Calculez l'énergie de rotation de la tige quand la particule m est supposée fixe.
- Déterminez le lagrangien (tenir compte de la gravitation).
- Y a-t-il des variables cycliques ? Si oui, lesquelles ?

6.4 Deux disques minces

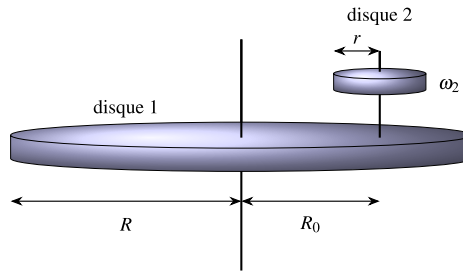


Figure 6.22 ◀▶
Problème 6.4

On considère un système composé de deux disques minces, 1 et 2, dans l'espace (sans gravitation) (voir figure 6.22). Ils sont de rayons R et r , respectivement et de densité de surface σ_0 . Le disque 1 est initialement au repos. Le disque 2 tourne librement à la vitesse angulaire ω_2 autour d'un axe situé à la position R_0 sur le disque 1. Au moment $t = T$, le disque 2 est brusquement freiné par un mécanisme interne ($\omega_2 = 0$). Décrivez le mouvement du système des disques 1 et 2 pour $t > T$. La tige reliant les deux disques est de masse négligeable.

6.5 Appareil de Atwood

Soit la figure 6.23

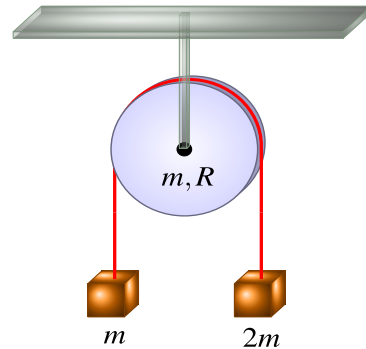


Figure 6.23 ◀▶
Problème 6.5.

- Déterminez l'énergie cinétique du système en considérant la condition de roulement sans glissement, $v = R\omega$.
- Déterminez la vitesse des masses en fonction des paramètres du système.
- Déterminez l'accélération des masses en fonction des paramètres du système.

6.6 Un bâton massif

Soit la figure 6.24. Un bâton de masse M et de longueur L tourne de façon circulaire de sorte que son centre de masse est immobile. Le bâton fait un angle θ avec la verticale.

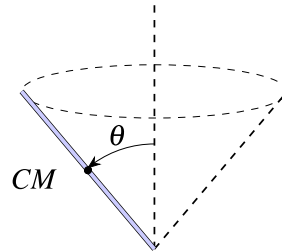


Figure 6.24 ◀▶
Problème 6.6.

- (a) Quel est le moment angulaire autour du centre de masse ?
- (b) Quelle est le moment de force appliqué sur le centre de masse ?
- (c) Quelle est la fréquence de mouvement du bâton ?

6.7 Deux masses reliées par une tige

Soit la figure 6.25. Deux masses ($m < M$), que l'on peut considérer comme étant ponctuelles, sont reliées par une tige de masse négligeable de longueur L et se déplacent dans un plan (xy). Démontrez que le moment d'inertie du système par rapport à un axe perpendiculaire au plan (axe z) et passant par le centre de masse du système est μL^2 , où $\mu = mM / (m + M)$ est la masse réduite du système.

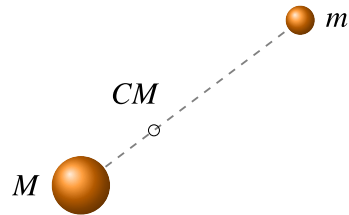


Figure 6.25 ◀▶
Problème 6.7.

MÉCANIQUE LAGRANGIENNE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre 7

- 7.1 Le passage à la limite continue ★ 470
- 7.2 Formulation lagrangienne ★★ 475
- 7.3 Théorie classique des champs ★★ 484
- 7.4 Densité hamiltonienne ★★ 499

NOUS AVONS VU dans le chapitre précédent un exemple particulier de milieu continu, le solide indéformable. Dans ce cas, la condition de rigidité (c'est-à-dire que la position relative de deux parties quelconques du solide ne change pas) réduit considérablement le nombre de degré de liberté

et chaque solide est décrit par au plus six degrés de liberté, trois de translation et trois de rotation. Un milieu continu n'étant pas toujours rigide, on se doit de décrire la dynamique de chaque élément infinitésimal de masse. Le système implique donc une infinité de degré de liberté.

7.1 Le passage à la limite continue ★

7.1.1 Cas simple : corde élastique en 1D

Pour nous aider à comprendre le passage à la limite continue, commençons par un cas plus simple : une corde continue de longueur l tendue à ses deux extrémités le long de l'axe des x .

Supposons que nous discrétisions cette corde en la représentant comme une suite de N masses m . Les interactions sont ici présumées de type harmoniques (ce qui est souvent vrai au voisinage de la position d'équilibre) et nous les modéliserons en imaginant les masses reliées entre elles par des ressorts de constante k . Les ressorts sont de masse négligeable.

À chaque masse, on définit une coordonnée généralisée, $q_i(t)$, qui décrit le déplacement de la masse i par rapport à sa position d'équilibre. Par extension, on assigne les indices $i = 0$ et $i = N + 1$ aux deux extrémités de la corde. À l'équilibre, la distance entre deux masses est simplement $a = l/(N + 1)$.

Le lagrangien cette corde « discrétisée » s'écrit alors

$$L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 \right)$$

où on reconnaît l'énergie cinétique et le potentiel harmonique dans le premier et deuxième terme de droite respectivement.

On en déduit N équations d'Euler-Lagrange avec

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= m \ddot{q}_i \\ \frac{\partial L}{\partial q_i} &= -k (q_i - q_{i-1} - q_{i+1} + q_i) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ \ddot{q}_i &= \frac{k}{m} (q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i) \end{aligned}$$

La limite continue consiste à faire tendre N vers l'infini. Or, dans cette limite, la distance entre deux masses $a \rightarrow 0$ et $m/a \rightarrow \mu$, μ étant la masse linéique de la corde et la séparation entre les masses se confondant, celles-ci semblent se toucher. De plus l'indice

i , qui indique la position de la masse, doit être remplacé par un paramètre continu soit la position x de la masse m . Ainsi, on a $q_i(t) = \phi(x_i, t) \rightarrow \phi(x, t)$ lorsque $a \rightarrow 0$. Par ailleurs,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{q_{i+1} - q_i}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\phi(x_{i+1}, t) - \phi(x_i, t)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

En reprenant l'équation de Lagrange pour la masse i et en faisant $a \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial t^2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \ddot{q}_i = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{k}{m} (q_{i+1} + q_{i-1} - 2q_i) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 k}{m} \frac{(\phi(x_{i+1}, t) + \phi(x_{i-1}, t) - 2\phi(x_i, t))}{a^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 k}{m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ak}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} . \end{aligned}$$

Reste à savoir à quoi correspond cette limite. Physiquement, la loi expérimentale de Hooke établit un lien entre la force exercée et l'allongement relatif d'un objet

$$F = \left(\frac{EA_0}{L_0} \right) \Delta L = k \Delta L$$

où E est le module de Young (unité de pression), A_0 est la section efficace de l'objet, ΔL le changement de longueur et L_0 sa longueur originale. Identifiant $a = L_0$

$$\lim_{a \rightarrow 0} ak = \lim_{a \rightarrow 0} (EA_0) = EA_0$$

et la section efficace de la corde étant constante on obtient, l'équation suivante pour la corde 1D,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{EA_0}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0 \quad (7.1)$$

On reconnaît l'équation d'onde qui décrit les déplacements longitudinaux oscillants de la corde. Il est facile d'identifier la vitesse de phase de l'onde $c = \sqrt{EA_0/\mu}$. Plus la corde est rigide (EA_0 élevé) et plus elle est légère (μ faible) et plus c sera élevée.

Le passage à la limite continue s'est effectué en prenant la limite $N \rightarrow \infty$ et

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \infty && \text{nombre de coordonnées généralisées} \\ i &\rightarrow x && \text{paramètres désignant la position} \\ q_i(t) &\rightarrow \phi(x, t) && \text{coordonnées généralisées} \\ a &\rightarrow 0 && \text{distance entre deux masses} \end{aligned}$$

De plus, au lieu de N élevé (en fait $N \rightarrow \infty$) équations aux dérivées ordinaires nous obtenons une seule équation aux dérivées partielles.

Malgré tout, cette seule équation contient la même information que l'infinité d'équations aux dérivées ordinaires du cas discret. En fait, $\phi(x, t)$ définit le déplacement en tout x , c'est-à-dire pour une infinité de valeur de x puisque x est une variable continue. Il s'agit de la vraie coordonnée généralisée. Par définition, on appelle “champ” toute grandeur définie sur l'espace-temps. Ainsi, $\phi(x, t)$ est le champ (scalaire) de déplacement de la corde 1D.

Le passage à la limite continue pour le lagrangien requiert le changement vers une coordonnées généralisée continue $q_i(t) \rightarrow \phi(x, t)$ et donc il est plus approprié de définir une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial x)$ telle que

$$L = \int dx \mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial x) \quad (7.2)$$

Pour la corde, cela suggère la forme

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} k (q_{i+1} - q_i)^2 \right) \\ &\Downarrow \\ L &= \int dx \mathcal{L} = \int dx \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{EA_0}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Un problème se pose cependant : la forme des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

ne s'appliquent qu'à des systèmes discrets. Il faut donc trouver une forme équivalente pour des systèmes continus. Ces équations d'Euler-Lagrange continues seront appelées les équations du champ. Il va sans dire que le lagrangien peut dépendre de plusieurs champs chacun représentant une infinité de degrés de liberté.

7.2 Formulation lagrangienne ★★

7.2.1 Densité lagrangienne et localité des interactions

Considérons un système continu décrit par une infinité de degrés de liberté. Nous supposons qu'on peut y associer un lagrangien prenant la forme

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} dx dy dz = \int_V \mathcal{L} d^3 r \quad (7.3)$$

où $\mathcal{L}$ est la densité lagrangienne. Le volume d'intégration V est arbitraire dans la mesure où doit contenir le système étudié. Ceci dit, on peut toujours l'étendre à l'infini en posant $\mathcal{L}$ comme nul en dehors du volume physiquement occupé par le système original. Les variables x , y et z sont des paramètres qui servent à identifier la région de l'espace qu'occupe le système (ex : coordonnées cartésiennes ou autres). En ce sens, elles sont tout à fait similaire au paramètre du temps t et se distingue des coordonnées généralisées q_i qui décrivent l'évolution du système.

Posons un système physique entièrement décrit par un nombre fini n de champs $\phi_i(x_\mu)$ où $i = 1, \dots, n$ (coordonnées généralisées) et $x_\mu = (t, \mathbf{r})$ une coordonnée quelconque de l'espace-temps. On suppose alors que la densité lagrangienne peut s'écrire comme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu}, x_\mu) \quad (7.4)$$

c'est-à-dire que la densité lagrangienne ne dépend pas des dérivées d'ordre supérieur de ϕ . Cette hypothèse semble une généralisation naturelle du lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ mais il n'en n'est rien. En effet, en mécanique classique toute dépendance à des dérivées temporelle d'ordre supérieur de q_i est inutile puisque les équations de Newton détermine $\ddot{q}_i$. Mais pour les champs, la forme (7.4) a de profondes conséquences. Notamment, elle implique que ceux-ci interagissent seulement localement. La présence de dérivées d'ordre supérieur d'un champ ϕ_i nécessite en général de chercher plusieurs points de part et d'autre du point où l'on veut calculer ces dérivées. Notons que la localité des interactions est souvent recherchée puisqu'elle assure trivialement que le principe de causalité est respecté. Le principe de causalité lorsqu'appliqué aux interactions à distance requiert de vérifier que celles-ci ne puissent se produire à une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière. Il reste que cette hypothèse n'est justifiée que dans la mesure où les équations obtenues apportent une description correcte des phénomènes physiques.

Rappelons que x, y, z et t (ou en bref x_μ) sont des paramètres dont le rôle est d'indexer l'espace-temps. Il est alors important de noter qu'il y a une distinction entre la dérivée totale et la dérivée partielle, par exemple si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, x_\mu)$, on a

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (7.5)$$

Il en découle que si on veut évaluer la variation de $\mathcal{L}$ entre deux positions d'espace-temps x_μ et $x_\mu + dx_\mu$, on doit considérer à la fois la variation de la densité lagrangienne liée uniquement au changement de position (terme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}$) et celle introduite par la dépendance du champ ϕ (terme $\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}$).

7.2.2 Equations d'Euler-Lagrange du champ

Les équations du champ découlent, comme dans le cas discret, du principe de moindre action (ou pour être plus précis le principe d'action extrémale). Il sert alors à déterminer les trajectoires (cas discret) ou configurations de champs (milieu continu) qui sont réalisées dans la nature. Définissant l'action comme

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} dx dy dz dt \quad (7.6)$$

nous devons examiner les variations de l'action telles que

$$\delta S = 0.$$

Tout comme pour le cas discret, δS est la variation fonctionnelle de l'action laissant intacte les frontières $x_{1\mu}$ et $x_{2\mu}$ et les valeurs des champs aux frontières $\phi_i(x_{1\mu})$ et $\phi_i(x_{2\mu})$. Elle est obtenue en faisant une variation $\delta\phi_i$ de tous les champs indépendants ϕ_i telle que $\delta\phi_i(x_{1\mu}) = 0$ et $\delta\phi_i(x_{2\mu}) = 0$ aux bornes d'intégration.

La variation fonctionnelle de S s'écrit donc

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} dx dy dz dt = \int \cdots \int \delta \mathcal{L} dt d^3 r$$

où l'on a $\int dt \int d^3 r \delta \mathcal{L} = \int d^3 r \int dt \delta \mathcal{L}$ puisque les coordonnées d'espace-temps x, y, z et t sont indépendantes. Par ailleurs, on a

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi_i / \partial x_\mu)} \delta \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_\mu} \right)$$

avec $x_0 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

La variation de l'action due au terme en $x_0 = t$ s'écrit

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int dt \int d^3r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial t)} \delta \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t} \right) \\
 &= \int d^3r \int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial t)} \delta \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial t} \right) \\
 &= \int d^3r \int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial t)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\phi_i) \\
 &= \int d^3r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial t)} \delta\phi_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int d^3r \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial t)} \right) \delta\phi_i \\
 &= - \int d^3r \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial t)} \right) \delta\phi_i
 \end{aligned}$$

où l'on a intégré par parties à la dernière ligne. Le premier terme de droite est nul car $\delta\phi_i = 0$ aux frontières t_1 et t_2 .

Répétant ce raisonnement à la variable $x_1 = x$, la variation de

l'action est donné par

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int dt \int d^3r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial x)} \delta \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x} \right) \\
 &= \int dt \int dy \int dz \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial x)} \delta\phi_i \Big|_{x_1}^{x_2} \\
 &\quad - \int dt \int dy \int dz \int dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial x)} \right) \delta\phi_i \\
 &= - \int dt \int d^3r \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial x)} \right) \delta\phi_i
 \end{aligned}$$

où le premier terme du membre de droite de la première ligne est encore une fois nul pour les mêmes raisons que précédemment.

Le résultat est similaire pour les variables y et z ce qui fait qu'en regroupant toutes les contributions à δS ,

$$\delta S = \int dt \int d^3r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial x_\mu)} \right) \right) \delta\phi_i = 0$$

Comme $\delta\phi_i$ est arbitraire, $\delta S = 0$ est respecté si

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi_i/\partial x_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} = 0$$

c'est-à-dire l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ ϕ_i . Rappelons que dans le cas discret, toutes les trajectoires étaient supposées stationnaires aux frontières t_1 et t_2 , en $\delta\phi_i = 0$. Dans le cas continu, on parle de configurations champs se comportant de la même manière aux frontières $\delta\phi_i(x_{1\mu}) = 0$ et $\delta\phi_i(x_{2\mu}) = 0$, la configuration physique étant

Notons que le temps et les composantes spatiales apparaissent exactement sous la même forme. La raison profonde réside encore une fois dans le fait que le temps et les coordonnées spatiales jouent le même rôle, celui de décrire le continuum espace-temps sur lequel évolue le système physique. On peut donc écrire cette équation sous forme plus compacte en le formalisme quadrivectoriel où $x_\mu = (t, x, y, z)$

$$\frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (7.7)$$

où on utilise la notation $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ et la répétition de l'indice μ sous-entend une somme sur $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Reprenant l'exemple de la corde élastique en 1D et supposons qu'elle soit décrite par la densité lagrangienne suivante (les variables y et z sont inutiles)

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{EA_0}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

on calcule les diverses dérivées

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial t)} &= \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial x)} &= \frac{d}{dx} \left(-EA_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -EA_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\end{aligned}$$

On obtient alors l'équation pour le champ ϕ

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{EA_0}{\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

qui est bien identique à l'équation (7.1). Cette équivalence (ainsi que pour bien d'autres exemples) justifie, d'une part, nos conjectures initiales et, d'autre part, notre confiance dans l'utilisation de la densité lagrangienne choisie pour décrire la corde.

7.2.3 Transformations de jauge

Nous avons vu que dans le cas discret deux lagrangiens L et L' décrivent le même système s'ils ne diffèrent que par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction F dépendant des coordonnées généralisées q_i et du temps.

$$L = L' + \frac{dF}{dt} \quad (7.8)$$

La généralisation au milieu continu requiert que deux densités lagrangiennes $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ sont équivalentes si

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} f_{\mu}(\phi_i, x_v) \quad (7.9)$$

où f_{μ} pour $\mu = 0, \dots, 3$ sont quatre fonctions scalaires qui dépendent des variables d'espace-temps x_v et des champs ϕ_i (mais pas de leurs dérivées). Le terme supplémentaire est en fait la 4-divergence d'un quadrivecteur, que l'on peut écrire de façon équivalente sous la forme

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} f_{\mu}(\phi_i, x_{\mu}) = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} \quad (7.10)$$

où $\mathbf{f}$ est un vecteur dont les composantes sont

$$\mathbf{f}(\phi_i, x_v) = (f_1(\phi_i, x_v), f_2(\phi_i, x_v), f_3(\phi_i, x_v)).$$

Il est facile alors de démontrer que $\delta S' = \delta S = 0$. Posant

$$\begin{aligned} \delta S' &= \delta \left(\int \cdots \int \mathcal{L}' dt d^3 r \right) \\ &= \delta S + \delta \int \cdots \int d^3 r dt \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right) + \delta \int \cdots \int dt d^3 r (\nabla \cdot \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$= 0 + \int d^3 r [\delta f_0]_{t_1}^{t_2} + \int dt \delta \left(\int d^3 r (\nabla \cdot \mathbf{f}) \right) \quad (7.12)$$

Utilisant le théorème de Gauss, la dernière intégrale est équivalente au flux de $\mathbf{f}$ à travers la surface A englobant le volume d'intégration. On a donc

$$\delta S' = \int d^3r \left[\frac{\partial f_0}{\partial \phi_i} \delta \phi_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int dt \oint_A \delta \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A}$$

où $d\mathbf{A}$ est l'élément de surface qui pointe dans la direction normale à la surface. Le premier terme est nul puisque $\delta \phi_i = 0$ aux frontières. Par ailleurs, le second terme est nul si la transformation laisse les conditions aux frontières intactes, c'est-à-dire $\delta \mathbf{f} = 0$ sur la surface A (ou plus généralement que la variation du flux de $\mathbf{f}$ à travers la surface A est nulle).

7.3 Théorie classique des champs ★★

7.3.1 Cadre général

Bien que le propos de ce chapitre soit la mécanique classique des milieux continus, il est intéressant de considérer un cadre plus général dans lequel le même formalisme peut servir. C'est le cas de tout système physique pouvant être décrit en termes d'un ou plusieurs champs.

Nous avons vu qu'en mécanique non-relativiste, on pouvait écrire le lagrangien en termes des énergies cinétique et potentielle,

$L = T - V$. Dans le cas d'un système continu on aurait donc

$$L = \int \mathcal{L} d^3r = \int (\mathcal{T} - \mathcal{V}) d^3r$$

où $\mathcal{T}$ et $\mathcal{V}$ sont respectivement la densité d'énergie cinétique et potentielle. Si le système physique n'est pas mécanique, cette identification n'est pas nécessaire puisque les termes du lagrangien ne sont pas nécessairement des énergies et $L \neq T - V$ en général. Levant cette contrainte, il est toutefois généralement possible de construire une expression pour L conduisant aux équations recherchées. Des exemples notoires de telles densités lagrangiennes $\mathcal{L}$ mènent à l'équation d'Euler en hydrodynamique, à l'équation d'Einstein en relativité générale, à l'équation de Schrödinger en mécanique quantique ou même aux l'équation de Klein-Gordon et de Dirac en mécanique quantique relativiste....

Le passage à la théorie des champs requiert toutefois des précautions particulières :

En mécanique classique non-relativiste, il y existe une correspondance entre les concepts de force et de potentiel. Le potentiel est en fait un champ et son utilisation est donc plus pratique que celui de la force.

En relativité, la vitesse maximale de tout objet est la vitesse de la lumière. Le lien de causalité entre deux événements séparés est donc soumis à un délai de propagation pendant lequel il y a déformation du champ d'interaction. Ce champ d'interaction est

alors plus qu'un simple mathématique puisqu'il représente un objet réel pouvant se propager dans le contexte de la relativité et c'est pourquoi la théorie classique des champs a une si grande importance dans la description des interactions fondamentales. De plus, pour maintenir le lien de causalité entre tout objet dans un système physique, il est souvent préférable de construire une théorie des champs avec des interactions locales. Des interactions non locales entraînent nécessairement des délais de propagation de l'information et il est particulièrement difficile de formuler une théorie des champs qui vérifie que toutes les interactions respecteront le lien de cause à effet. Par surcroît, une interaction locale sur une particule ayant une étendue spatiale implique qu'une partie de la particule acquiert une impulsion avant même que d'autres parties de la particule ne puisse le détecter. Si c'est le cas, la particule se déforme d'abord avant d'être capable de se déplacer de façon rigide. Une telle déformation suggère que la particule possède une structure. On peut se demander alors si on bel et bien affaire à une particule fondamentale. En fait, le plus simple est de considérer toute particule fondamentale comme ponctuelle (il y a des exceptions à cette règle : par exemple, la théorie des cordes propose que les particules soient des cordes, c'est-à-dire des objets ayant une étendue spatiale linéaire fini et dont les extrémités transportent des charges ponctuelles soumises à des interactions locales).

Quatre types d'interactions fondamentales sont présentement

reconnus :

- Deux d'entre-elles peuvent être décrites par la théorie classique des champs : l'électrodynamique et la gravitation (relativité générale).
- Deux autres, les interactions faible et forte, nécessitent requiert un traitement quantique. Le cadre théorique qui permet ce traitement est la « théorie quantique des champs » et il est possible de construire une description quantique des interactions électromagnétique, forte et faible. La quantification de la gravitation posent encore problème bien que certains modèles semble apporter des réponses à ces questions (ex : théorie des cordes).

Il est toutefois important de mentionné que la formulation lagrangienne a plusieurs avantages :

- La construction de nouveaux modèles requiert simplement un nouveau $\mathcal{L}$ invariant de Lorentz (avec de nouveaux types de champs si nécessaire).
- On peut imposer directement les symétries d'un système en construisant un $\mathcal{L}$ qui les respectent ou inversement identifier les symétries d'un $\mathcal{L}$ déjà existant. Suivant le théorème de Noether, il est possible alors d'identifier les quantités qui feront l'objet d'une loi de conservation, les invariants. C'est une procédure est devenu un outil courant en physique théorique, où on tente, autant que faire se peut, de décrire les

phénomènes en termes de symétrie d'espace, de charges, de temps et autres.

- La formulation lagrangienne est le passage obligé vers la quantification. La simple utilisation des équations d'onde de Schrödinger (mécanique quantique) ou de Klein-Gordon et de Dirac (mécanique quantique relativiste) pose problème dans certains cas. La théorie quantique des champs s'avère une

7.3.2 Exemple : électrodynamique classique

La formulation lagrangienne de l'électrodynamique, proposée par Schwarzschild en 1903, code toute l'information contenue dans les quatre équations de Maxwell dans un seul objet mathématique, la densité lagrangienne $\mathcal{L}$.

Les équations de Maxwell s'écrivent (dans le vide) :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.16)$$

où $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$. Les deux premières équations sont automatiquement satisfaites si l'on pose

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.17)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.18)$$

où ϕ et $\mathbf{A}$ sont respectivement les potentiels scalaire et vecteur. On utilise souvent le quadrivecteur $A_\mu = (\frac{\phi}{c}, \mathbf{A})$ pour désigner les quatre champs indépendants nécessaires pour décrire complètement $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$. De la même façon, il est possible de définir un quadrivecteur de courant $j_\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ formé des densités locales de charges ρ et courants $\mathbf{j}$. Ce sont les deux dernières équations (7.15) et (7.16) doivent correspondre aux équations d'Euler-Lagrange des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ respectivement.

La densité lagrangienne permettant d'obtenir retrouver les équations de Maxwell est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) - \rho\phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad (7.19)$$

Sous forme tensorielle, (7.17) et (7.18) s'écrivent

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ E_i &= -\partial_i \phi - \partial_0 A_i \end{aligned}$$

où $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ avec $i = 1, 2, 3$ où ϵ_{ijk} est le tenseur de Levi-

Civita. Alors

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{i=1}^3 \left((-\partial_i \phi - \partial_0 A_i)^2 - c^2 (\epsilon_{ijk} \partial_j A_k)^2 \right) - \rho \phi + \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad (7.20)$$

L'équation d'Euler-Lagrange du champ ϕ

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi_i / \partial x_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

est obtenue en calculant les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -\rho \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial (\partial_i \phi)} (-\partial_i \phi - \partial_0 A_i)^2 = \epsilon_0 (\partial_i \phi + \partial_0 A_i) = -\epsilon_0 E_i \end{aligned}$$

On retrouve donc l'équation (7.15) puisque

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} (\epsilon_0 E_i) + \rho = 0. \quad (7.21)$$

On procède de façon similaire pour le champ A_i ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} &= j_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i)} &= -\epsilon_0 (-\partial_i \phi - \partial_0 A_i) = -\epsilon_0 E_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_i)} &= -\epsilon_0 c^2 (\epsilon_{lmn} \partial_m A_n) \epsilon_{lpq} \delta_{jp} \delta_{iq} = -\epsilon_0 c^2 \epsilon_{lji} B_l \\ &= \epsilon_0 c^2 \epsilon_{ijk} B_k\end{aligned}$$

Partant de l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ A_i

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = 0$$

et substituant les dérivées, on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 E_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} B_k = j_i$$

ou sous une forme plus compacte

$$\epsilon_{ijk} \partial_j B_k = \mu_0 j_i + \epsilon_0 \mu_0 \partial_0 E_i$$

qui n'est autre que l'équation (7.16).

Donc toute l'information contenue dans les équations de Maxwell est codée dans l'expression de $\mathcal{L}$ (7.19). On note qu'en absence de toute source ($\rho = 0$ et $\mathbf{j} = 0$),

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2}(\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2)$$

ne contient que le terme formé du champ A_μ (ou $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$). Le reste de l'expression met en jeu ρ et $\mathbf{j}$ en plus du champ A_μ et décrit donc l'interaction du champ A_μ avec la matière chargée.

Supposons maintenant un ensemble de particules chargées différentes (indexées par α) ayant des densités de charge ρ_α et vitesses $\mathbf{v}_\alpha = \dot{\mathbf{r}}_\alpha$, au total

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \quad \mathbf{j} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$$

En absence d'interaction électromagnétique ou de toute autre interaction, ces particules se comportent comme des particules libres et on peut écrire un lagrangien

$$L_{\text{mat.}} = T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 \quad (7.22)$$

Le lagrangien décrivant le champ A_μ s'écrit

$$L_{\text{champ}} = \int \mathcal{L} d^3r = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) \right) d^3r \quad (7.23)$$

alors que l'interaction matière-champ est donnée par

$$L_{\text{int.}} = \int \mathcal{L} d^3r = \int \left(- \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} (\phi - \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}) \right) d^3r \quad (7.24)$$

Comparons ces expressions au lagrangien d'un système de particules ponctuelles de charges q_{α} soumises à un champ électromagnétique extérieur

$$L_{\text{mat.+int.}} = T - V = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 - q_{\alpha} (\phi - \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}) \right)$$

Clairement, le deuxième terme décrit l'interaction des champs ϕ et $\mathbf{A}$ sur la matière et donc doit être équivalent à la densité lagrangienne (7.24). En fait, les deux expressions coïncident si on définit la densité de charge associée à une particule ponctuelle α située en $\mathbf{r}_{\alpha}$

$$\rho_{\alpha} = q_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (7.25)$$

où $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha})$ est la fonction de Dirac soumise à la condition de normalisation

$$\int \rho_{\alpha} d^3r = q_{\alpha}.$$

La somme des lagrangiens (7.22), (7.23) et (7.24) décrit le comportement complet de particules chargées et du champ électro-

magnétique avec leurs interactions

$$\begin{aligned} L_{\text{em}} &= L_{\text{mat.}} + L_{\text{champ}} + L_{\text{int.}} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 + \int \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) d^3r - \int \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) (\phi - \mathbf{v}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}) d^3r \end{aligned} \quad (7.26)$$

Ce lagrangien est une fonction $L = L(\phi, A_i, \partial_{\mu} \phi, \partial_{\mu} A_i, \mathbf{r}_{\alpha}, \mathbf{v}_{\alpha}, x, y, z, t)$, la dépendance explicite dans les coordonnées x, y, z, t ici est seulement liée au volume d'intégration. Pour être entièrement correct, l'expression pour les particules L_{mat} devrait être relativiste. Dans ce cas l'énergie cinétique relativiste totale s'écrirait

$$T = \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\alpha}^2}{c^2}}} - 1 \right) m_{\alpha} c^2$$

mais comme nous avons vu au Chapitre 2, $L_{\text{mat. rel.}} \neq T$ et le lagrangien relativiste décrivant des particules libres s'écrit plutôt

$$L_{\text{mat.}} \rightarrow L_{\text{mat. rel.}} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{\alpha}^2}{c^2}}.$$

7.3.3 Tenseur énergie-impulsion

Un système physique continu peut donc être décrit par une densité lagrangienne $\mathcal{L}$ appropriée et la « dynamique » d'un tel

système s'obtient par la résolution des n équations du champ associées

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (7.28)$$

Vu la similarité entre les traitements des cas discret et continu, on est en droit de se demander si certains résultats et conclusions du Chapitre 2 s'appliquent également.

Considérons d'abord les cas où un champ ϕ_k est cyclique, c'est-à-dire si $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement de ϕ_k , alors

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_k)} + \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)} = 0 \quad (7.29)$$

On conclut que la quadri-divergence de la quantité

$$Q_{k\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_k)}$$

est nulle. Il y aura donc conservation d'un quadrivecteur (évidemment associé au champ ϕ_k).

On peut également rechercher l'analogue de l'hamiltonien H qui serait associée à un système continu. Rappelons que pour un

système discret avec un lagrangien L on a

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) &= -\frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}\quad (7.30)$$

où

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

Pour un système continu $\mathcal{L}$, l'espace et le temps jouent un rôle similaire et on dit construire une quantité invariante dans tous les directions d'espace-temps x_μ . Simplifions le problème en nous limitons ici à un seul champ et considérons

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dx_\mu} + \sum_{v=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_v \phi)} \frac{d(\partial_v \phi)}{dx_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}$$

Utilisant l'équation du champ

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \left(\sum_{v=0}^3 \frac{d}{dx_v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_v \phi)} \right) \frac{d\phi}{dx_\mu} + \sum_{v=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_v \phi)} \left(\frac{d^2 \phi}{dx_\mu dx_v} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}$$

on peut aussi s'écrire

$$\sum_{v=0}^3 \frac{d}{dx_v} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_v \phi)} \frac{d\phi}{dx_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu v} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (7.31)$$

où $\delta_{\mu\nu}$ est le symbole de Kronecker. Alors si $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement de la coordonnée x_μ , la quantité

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \frac{d\phi}{dx_\mu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \quad (7.32)$$

est conservée, dans le sens où

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0. \quad (7.33)$$

On voit que $T_{\mu\nu}$ est un tenseur d'ordre deux défini dans l'espace-temps et possède donc 16 composantes.

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{0j} \\ T_{i0} & T_{ij} \end{pmatrix}$$

où $i, j = 1, 2, 3$. Il est appelé « tenseur énergie-impulsion ». Dans le cas général, c'est un tenseur non symétrique $T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$. Les composantes du tenseur énergie-impulsion du système décrivent la densité d'énergie et d'impulsion transportées par celui-ci (ex : champ électromagnétique). On peut démontrer que ce tenseur peut toujours se décomposer de la façon suivante :

$$T_{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \quad \text{densité d'énergie (densité hamiltonienne)}$$

$$T_{i0} = \text{vecteur de la densité d'impulsion}$$

$$T_{0j} = \text{vecteur du flux d'énergie}$$

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{tenseur des contraintes ou flux de moments}$$

En mécanique des fluides, la diagonale de T_{ij} correspond à la pression, et les autres composantes correspondent aux efforts tangentiels dus à la viscosité.

7.3.4 Formulation relativiste de la théorie des champs

La théorie classique des champs peut très facilement s'exprimer de façon manifestement covariante, satisfaisant ainsi au principe de relativité d'Einstein. On note que déjà l'élément infinitésimal de volume de l'espace-temps ($dt dx dy dz$) dans l'action

$$S = \int \cdots \int \mathcal{L} dt dx dy dz \quad (7.34)$$

est en soi un invariant de Lorentz. Une forme covariante de l'action est donc garantie si la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ est invariante par rapport à une transformation de Lorentz. Il en sera de même pour que toute équation du champ obtenue en utilisant le principe de

moindre action. Ce résultat est tout à fait remarquable puisque tout $\mathcal{L}$ étant un scalaire de Lorentz (c'est-à-dire un invariant de Lorentz) satisfait automatiquement au principe de la relativité (à condition que les bornes d'intégration soit appropriées).

7.4 Densité hamiltonienne ★★

Le passage à la limite continu s'applique tout aussi bien à la mécanique hamiltonienne qu'à la mécanique lagrangienne. En pratique, la mécanique hamiltonienne dans la limite continue revêt un intérêt que dans le contexte de la quantification des champs. Quoi qu'il en soit, le concept de hamiltonien dans le cas d'un système ayant une infinité de degrés de liberté reste intéressant.

L'approche hamiltonienne, dans le cas discret, introduit le moment conjugué à partir du lagrangien. Par exemple, pour la corde 1D, le moment conjugué de la coordonnée généralisée ϕ_i est

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\phi}_i}$$

puisque l'on peut écrire $L = \sum_{i=1}^N aL_i$. L'hamiltonien discret est alors

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{\phi}_i - L = \sum_i \left(a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\phi}_i} \dot{\phi}_i - aL_i \right) \\ &= \sum_i a \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{\phi}_i} \dot{\phi}_i - L_i \right) \\ &= \sum_i aH_i \end{aligned}$$

Le passage à la limite continue, c'est-à-dire lorsque $a \rightarrow 0$ (donc $N \rightarrow \infty$), pour le lagrangien mène à l'hamiltonien

$$H = \lim_{a \rightarrow 0} \sum_i aH_i = \int dx \mathcal{H}$$

où

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \partial_t \phi - \mathcal{L}$$

On définit ainsi $\mathcal{H}$ comme étant la densité hamiltonienne et π , la densité de moment

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)}$$

qui est présumée ne dépendre que de l'espace-temps, $\pi = \pi(x_\mu)$, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de ϕ et de ses dérivées.

Dans le cas général d'un système continu décrit par n champs $\phi_i(t, \mathbf{r})$ indépendants, on passe donc de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ à la densité hamiltonienne $\mathcal{H}$ en faisant la transformation

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \partial_t \phi_i - \mathcal{L} \quad (7.35)$$

les $\pi_i(t, \mathbf{r})$ étant les densités de moments conjugués des champs $\phi_i(t, \mathbf{r})$. Le hamiltonien complet du système est calculé de la même manière, à savoir

$$H = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{H} dx dy dz \quad (7.36)$$

où le volume d'intégration est le même que pour $\mathcal{L}$. La transformation (7.35) correspond à une transformation de Legendre qui, à partir d'une fonction $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, \partial_t \phi, x, y, z, t)$ construit une fonction

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi, \pi, x, y, z, t) \quad (7.37)$$

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la différentielle totale de $\mathcal{H}$ et de voir qu'effectivement elle ne met plus en jeu $\partial_t \phi$. Pour

un système décrit par un seul champ ϕ (commodité) on a ainsi

$$\begin{aligned} d(\pi \partial_t \phi - \mathcal{L}) &= \partial_t \phi d\pi + \pi d(\partial_t \phi) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi + \sum_{v=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_v \phi)} d(\partial_v \phi) + \sum_{v=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} dx_\mu \right) \\ &= \partial_t \phi d\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi - \sum_{v=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_v \phi)} d(\partial_v \phi) - \sum_{v=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} dx_\mu \end{aligned}$$

où les x_μ correspondent aux coordonnées x, y, z, t . Or, d'après la définition de la densité hamiltonienne, cette différentielle est égale à

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} d\phi + \sum_{v=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_v \phi)} d(\partial_v \phi) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} d\pi + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\mu} dx_\mu$$

Ces deux expressions ne peuvent être égales que si l'on a $\partial_t \phi$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (7.39)$$

1. La première de ces équations est l'analogue de l'une des équations canoniques de Hamilton

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}$$

2. La dernière indique que la dépendance explicite de $\mathcal{H}$ en fonction des coordonnées de l'espace-temps est l'opposée de celle de $\mathcal{L}$ (généralisation du cas discret où l'on avait

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

3. La seconde équation ci-dessus va nous fournir une généralisation de la seconde équation canonique de Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)}$$

En effet, d'après l'équation d'Euler-Lagrange des champs, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} + \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Après substitution de $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}$ et de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \\ \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \end{aligned} \quad (7.40)$$

En résumé, les équations canoniques pour les champs s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \end{aligned}$$

Elles sont un peu moins symétriques que dans le cas discret. Malgré tout, ces équations conservent le même genre de propriétés. En particulier, on peut les dériver directement du principe de moindre action, comme pour le cas discret.



Notations, unités et constantes de physique,...

Annexe A

A.1	Notations	505
A.2	Unités SI	507
A.3	Facteurs de conversion	510
A.4	Unités naturelles	513
A.5	Constantes fondamentales de physique	514
A.6	Systèmes de coordonnées	519

A.1 Notations

Dans cet ouvrage, un certain nombre de conventions ont été adoptées pour faciliter la lecture. Les vecteurs à trois dimensions

sont notés par des caractères gras

$$\mathbf{x}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{F}, \dots$$

La dérivée totale d'une quantité A par rapport au temps est aussi souvent représentée par

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A}, \quad \frac{d^2A}{dt^2} = \ddot{A}, \dots$$

En relativité restreinte, par exemple, on utilise la notation quadriverctorielle où les quadrivercteurs sont dénotés par

$$x, p, \dots$$

dont les composantes contravariantes sont

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \\ p^\mu &= (p^0, p^1, p^2, p^3) = (p^0, \mathbf{p}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

alors que les composantes contravariantes s'écrivent

$$\begin{aligned} x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -\mathbf{x}) \\ p_\mu &= (p_0, p_1, p_2, p_3) = (p^0, -\mathbf{p}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'alphabet grec est utilisé fréquemment:

Alphabet Grec					
Majuscule	Minuscule	Prononciation	Majuscule	Minuscule	Prononciation
<i>A</i>	α	alpha	<i>N</i>	ν	nu
<i>B</i>	β	bêta	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	<i>O</i>	o	omicron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
<i>E</i>	ε, ϵ	epsilon	<i>P</i>	ρ	rho
<i>Z</i>	ζ	zêta	Σ	σ	sigma
<i>H</i>	η	êta	<i>T</i>	τ	tau
Θ	θ, ϑ	thêta	Υ	υ	upsilon
<i>I</i>	ι	iota	Φ	ϕ, φ	phi
<i>K</i>	κ	kappa	Ψ	ψ	psi
Λ	λ	lambda	<i>X</i>	χ	khi
<i>M</i>	μ	mu	Ω	ω, ϖ	oméga

A.2 Unités SI

Les lettres SI désignent le Système International d'unités. Il s'agit d'un système d'unités cohérentes approuvé internationalement qui est en usage dans plusieurs pays et utilisé de façon systématique pour les ouvrages scientifiques et techniques. Le système

SI, basé sur les unités MKS, remplace les systèmes CGS et f.p.s. (Système Impérial). On peut diviser les unités SI en trois groupes: le unités de base, supplémentaires et dérivées. Il y a sept unités de base qui sont dimensionnellement indépendantes.

Unités de base SI		
Quantité Physique	Nom	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Température	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

Unités supplémentaires SI		
Quantité Physique	Nom	Symbole
Angle plan	radian	rad
Angle solide	stéradian	sr

Unités dérivées SI			
Quantité Physique	Nom	Symbole	Unités SI
Fréquence	hertz	Hz	s^{-1}
Énergie	joule	J	$N \cdot m$
Force	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Puissance	watt	W	$J \cdot s^{-1}$
Pression	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
Charge électrique	coulomb	C	$A \cdot s$
Différence de potentiel électrique	volt	V	$W \cdot A^{-1}$
Résistance électrique	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$
Conductance électrique	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$
Capacité électrique	farad	F	$C \cdot V^{-1}$
Flux magnétique	weber	Wb	$V \cdot s$
Inductance	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$
Induction magnétique	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$
Flux lumineux	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Illumination	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$
Activité	becquerel	Bq	s^{-1}
Dose absorbée	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$
Dose équivalente	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$

Les unités SI sont étendues grâce à des préfixes qui désignent les multiples ou fractions décimales des unités.

Préfixes utilisés avec unités SI					
Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10	déca-	da	10^{-1}	déci-	d
10^2	hecto-	h	10^{-2}	centi-	c
10^3	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^6	méga-	M	10^{-6}	micro-	μ
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	pico-	p
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{18}	exa-	E	10^{-18}	atto-	a

A.3 Facteurs de conversion

	<i>Pour convertir de</i>	<i>en</i>	<i>Multiplier par</i>
Activité	curie	becquerel	3.7×10^{10}
Aire	acre	m ²	4046.873
Énergie	B.T.U.	joule	1055.056
	kilocalorie	joule	4186
	erg	joule	1.0×10^{-7}
	électron volt	joule	1.60219×10^{-19}
Force	dyne	newton	.00001
	livre	newton	4.44822
Luminosité	pied chandelle	lux	10.76391
	phot	lux	10000.0
Longueur	ångström	mètre	1.0×10^{-10}
	pied	mètre	.3048
	pouce	mètre	.0254
	mile	mètre	1609.344
Flux magnétique	maxwell	weber	1.0×10^{-8}
Champ magnétique	gauss	tesla	1.0×10^{-4}

:

	<i>Pour convertir de</i>	<i>en</i>	<i>Multiplier par</i>
Masse	u.m.a.	kilogramme	1.66054×10^{-27}
	u.m.a.	MeV	931.4868
Angle plan	degré	radian	1.745329×10^{-2}
	minute	radian	2.908882×10^{-4}
	seconde	radian	4.848137×10^{-6}
Puissance	horsepower	watt	745.69987
Pression	atmosphère	pascal	101 325
	bar	pascal	1.0×10^5
	torr	pascal	133.322
Température	Celsius	kelvin	$T_K = T_C + 273.15$
	Fahrenheit	Celsius	$T_F = (T_C - 32) / 1.8$
	Fahrenheit	kelvin	$T_K = (T_F + 459.67) / 1.8$
Temps	an	seconde	3.153600×10^7
	jour	seconde	86400
	heure	seconde	3600
	minute	seconde	60
Volume	gallon	m ³	3.785412×10^{-3}
	litre	m ³	1.0×10^{-3}
	pinte	m ³	9.463529×10^{-4}

A.4 Unités naturelles

Les unités naturelles (UN) sont définies de façon à ce que les constantes fondamentales que sont la constante de Planck et la vitesse de la lumière soient

$$\begin{aligned}\hbar &= 1 \\ c &= 1.\end{aligned}$$

Elles sont utiles dans les systèmes physiques relativistes et/ou qui impliquent des effets quantiques mesurables.

Une quantité dans les unités SI (système international) qui possède des dimensions

$$E^p L^q T^r$$

où x est un nombre pur devant E , L et T qui représentent les unités d'énergie (en Joules), longueur (en mètres) et temps (en secondes) respectivement, aura des unités d'énergie à la puissance $p - q - r$, soit E^{p-q-r} dans le SUN. La conversion du SI au SUN procède comme suit. Si dans le SI E , L et T représentent les unités de masse, longueur et temps

$$\begin{aligned}[E^p L^q T^r]_{\text{SUN}} &= \left[E^p \left(\frac{L}{\hbar c} \right)^q \left(\frac{T}{\hbar} \right)^r \right]_{\text{SI}} = \left[\frac{E^p L^q T^r}{c^q \hbar^{q+r}} \right]_{\text{SI}} \\ &= [E^p L^q T^r]_{\text{SI}} \cdot \left(6.24 \times 10^{-12} \text{ MeV}^{-1} \text{ J}^{-1} \right)^p \\ &\quad \cdot \left(5.1 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \text{ m}^{-1} \right)^q \cdot \left(1.52 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \text{ s}^{-1} \right)^r\end{aligned}$$

où les quantités dans les crochets $[A]_{\text{SUN}}$ et $[A]_{\text{SI}}$ sont respectivement en unités SUN et SI.

Quantité	SI			SUN
	p	q	r	$n = p - q - r$
Action	1	2	-1	0
Vitesse	0	1	-1	0
Masse	1	0	0	1
Longueur	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Impulsion	1	1	-1	1
Énergie	1	2	-2	1
Const. structure fine α_{em}	0	0	0	0
Const. de Fermi	1	5	-2	-2

A.5 Constantes fondamentales de physique

A.5.1 Constantes universelles

Quantité	Symbole	Valeur
Vitesse de la lumière (vide)	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$1.25664 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
Permittivité du vide ($1/\mu_0 c^2$)	ϵ_0	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
Constante gravitationnelle	G, κ	$6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J s}$
en électron volts		$4.135669 \times 10^{-15} \text{ eV s}$
$h/2\pi$	$\hbar$	$1.05457266 \times 10^{-34} \text{ J s}$
en électron volts		$6.58211928 \times 10^{-16} \text{ eV s}$
Masse de Planck ($(\hbar c/G)^{\frac{1}{2}}$)	m_P	$2.17671 \times 10^{-8} \text{ kg}$
Longueur de Planck ($(\hbar G/c^3)^{\frac{1}{2}}$)	l_P	$1.61605 \times 10^{-35} \text{ m}$
Temps de Planck ($(\hbar G/c^5)^{\frac{1}{2}}$)	t_P	$5.39056 \times 10^{-44} \text{ s}$

A.5.2 Constantes électromagnétiques

Quantité	Symbole	Valeur
Charge de l'électron	e	$1.602176565 \times 10^{-19} \text{ C}$
Rapport e sur h	e/h	$2.41798836 \times 10^{14} \text{ A J}^{-1}$
Quantum de flux magnétique ($h/2e$)	Φ_0	$2.06783461 \times 10^{-15} \text{ Wb}$
Ratio fréquence-voltage Josephson	$2e/h$	$4.8359767 \times 10^{14} \text{ Hz V}^{-1}$
Conductance Hall quantique	e^2/h	$3.87404614 \times 10^{-5} \text{ S}$
Résistance Hall quantique ($\mu_0 c/2\alpha_{em}$)	R_H	25812.8056Ω
Magnéton de Bohr	μ_B	$9.2740154 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$
en électron volts		$5.78838263 \times 10^{-5} \text{ eV T}^{-1}$
Magnéton nucléaire (1 nm)	μ_N	$5.0507866 \times 10^{-27} \text{ J T}^{-1}$
en électron volts		$3.15245166 \times 10^{-8} \text{ eV T}^{-1}$

A.5.3 Constantes astronomiques

Quantité	Symbole	Valeur
Masse du Soleil	$M_{\odot}$	$1.98843 \times 10^{30} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	$R_{\odot}$	$6.9599 \times 10^8 \text{ m}$
Masse de la Terre	$M_{\oplus}$	$5.97223 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre (équateur)	$R_{\oplus}$	$6.378164 \times 10^6 \text{ m}$
Rayon de la Terre (pôle)		$6.356 \times 10^6 \text{ m}$
Masse de la Lune		$7.349 \times 10^{22} \text{ kg}$
Rayon de l'orbite lunaire		$3.844 \times 10^8 \text{ m}$
Pression atmosphérique standard		$101325 \text{ Pa (N m}^{-2}\text{)}$

A.5.4 Constantes atomiques

Quantité	Symbole	Valeur
Structure fine ($\mu_0 c e^2 / 2h$)	α_{em}	$7.29735308 \times 10^{-3}$
	α_{em}^{-1}	137.0359895
Constante de Rydberg	R_∞	$1.0973731534 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
en hertz		$3.2898419499 \times 10^{15} \text{ Hz}$
en joules		$2.1798741 \times 10^{-18} \text{ J}$
en électron volts		13.6056981 eV
Rayon de Bohr ($\alpha_{em} / 4\pi R_\infty$)	a_0	$0.529177249 \times 10^{-10} \text{ m}$
Énergie de Hartree	E_h	$4.3597482 \times 10^{-18} \text{ J}$
en électron volts		27.2113961 eV
Quantum de circulation	$h/2m_e$	$3.63694807 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
	h/m_e	$7.27389614 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

A.5.5 Constantes physico-chimiques

Quantité	Symbole	Valeur
Nombre d'Avogadro	N_A	$6.0221367 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro		10^{23} mol^{-1}
Unité de masse atomique ($\frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$)	m_u	$1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$
en électron volts ($m_u c^2 / \{e\}$)		931.49432 MeV
Constante de Faraday	F	$96485.309 \text{ C mol}^{-1}$
Constante de Planck molaire	$N_A h$	$3.99031323 \times 10^{-10} \text{ J s mol}^{-1}$
	$N_A h c$	$0.11962658 \text{ J m mol}^{-1}$
Constant des gaz	R	$8.314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k	$1.380658 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
en électron volts		$8.617385 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$
en hertz		$2.083674 \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}$
Volume molaire (gaz parfait) ^a	V_m	$22.41410 \text{ L mol}^{-1}$
Constante de Loschmidt ^b	n_0	$2.686763 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$
Constante de Loschmidt ^c	V_m	$22.71108 \text{ L mol}^{-1}$
Constante de Sackur-Tetrode ^d	S_0/R	-1.151693
Constante de Sackur-Tetrode ^e		-1.164856
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67051 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Constante de radiation primaire	c_1	$3.7417749 \times 10^{-16} \text{ W m}^2$
Constante de radiation secondaire	c_2	0.01438769 m K
Constante de Wien	b	$2.897756 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Constante de Coulomb	k_0	$8.98755 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$
Constante de perméabilité	$\mu_0/4\pi$	$10^{-7} \text{ T m A}^{-1}$

^a $T = 273.15\text{K}$, $p = 101325\text{Pa}$ ^b $T = 273.15\text{K}$, $p = 101325\text{Pa}$ ^c $T = 273.15\text{K}$, $p = 100\text{kPa}$ ^d $p_0 = 100\text{kPa}$ ^e $p_0 = 101325\text{Pa}$

A.6 Systèmes de coordonnées

A.6.1 Coordonnées cartésiennes

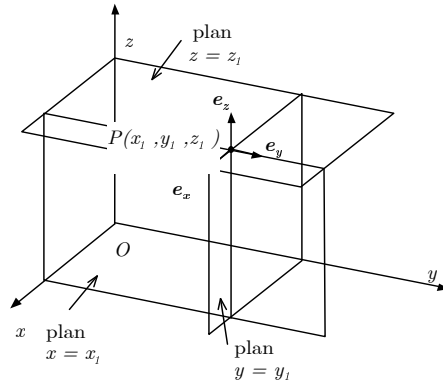


Figure A.1 ◀▶
Système de coordonnées cartésiennes.

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cartésiennes $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Un vecteur $\mathbf{A}$ dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ce qui représente

la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z. \quad (\text{A.2})$$

La métrique g_{ij} détermine comment les éléments de distance sont calculés dans cette base

$$d\mathbf{l}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (\text{A.3})$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$, de surface, (ds_x, ds_y, ds_z) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} ds_x &= dydz \\ ds_y &= dx dz \\ ds_z &= dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$dv = dx dy dz. \quad (\text{A.7})$$

Remarque A.1

i Dans la littérature, les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ s'écrivent aussi souvent sous les formes variées

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \quad \text{ou} \quad \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad \text{ou} \quad \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z.$$

**Opérateurs différentiels:**

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$U \equiv U(x, y, z)$$

$$\mathbf{A} \equiv A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

$$A_x \equiv A_x(x, y, z)$$

$$A_y \equiv A_y(x, y, z)$$

$$A_z \equiv A_z(x, y, z)$$

Gradient:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Laplacien:

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z.$$

A.6.2 Coordonnées cylindriques

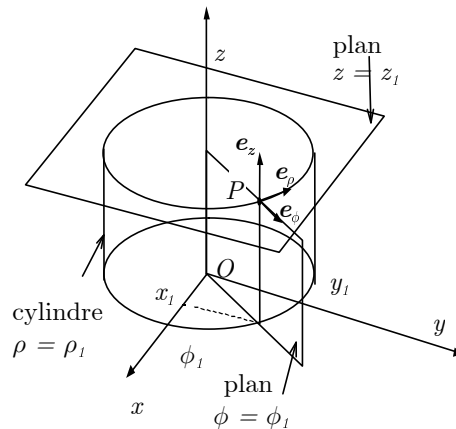


Figure A.2 ◀▶
Système de coordonnées cylindriques

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cylindriques $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_\phi.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Un vecteur $\mathbf{A}$ dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z.\tag{A.9}$$

La métrique g_{ij} détermine comment les éléments de distance sont calculés dans cette base

$$d\mathbf{l}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2\tag{A.10}$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{A.11}$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (d\rho, \rho d\phi, dz)$, de surface, (ds_ρ, ds_ϕ, ds_z) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz\tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
 ds_\rho &= \rho d\phi dz \\
 ds_\phi &= d\rho dz \\
 ds_z &= \rho d\rho d\phi
 \end{aligned}
 \tag{A.13}$$

$$dv = \rho d\rho d\phi dz. \tag{A.14}$$

Les relations de transformations de coordonnées cylindriques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \phi \\
 y &= \rho \sin \phi \\
 z &= z
 \end{aligned}
 \tag{A.15}$$

et inversement

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 \phi &= \arctan \frac{y}{x} \\
 z &= z.
 \end{aligned}
 \tag{A.16}$$

Opérateurs différentiels:

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$U \equiv U(\rho, \phi, z)$$

$$\mathbf{A} \equiv A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z$$

$$A_\rho \equiv A_x \cos \phi + A_y \sin \phi$$

$$A_\phi \equiv -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi$$

Gradient:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Laplacien:

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z.$$

A.6.3 Coordonnées sphériques

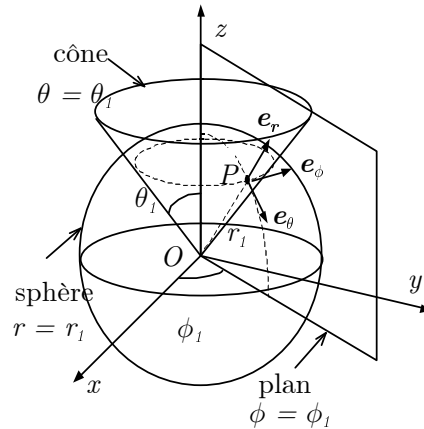


Figure A.3 ◀▶
Système de coordonnées sphériques

Les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées sphériques $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ont les propriétés suivantes

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}\tag{A.17}$$

Un vecteur $\mathbf{A}$ dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ ce qui représente

la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r A_r + \mathbf{e}_\theta A_\theta + \mathbf{e}_\phi A_\phi. \quad (\text{A.18})$$

La métrique g_{ij} détermine comment les éléments de distance sont calculés dans cette base

$$d\mathbf{l}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (\text{A.19})$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (dr, r d\theta, r \sin \theta d\phi)$, de surface, $(ds_r, ds_\theta, ds_\phi)$, et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned} ds_r &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ ds_\theta &= r \sin \theta dr d\phi \\ ds_\phi &= r dr d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Les relations de transformations de coordonnées sphériques à coordonnées cartésiennes sont les suivantes:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{A.23}$$

et inversement

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x}.\end{aligned}\tag{A.24}$$

Opérateurs différentiels:

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$\begin{aligned}U &\equiv U(r, \theta, \phi) \\ \mathbf{A} &\equiv A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\phi \mathbf{e}_\phi \\ A_r &\equiv A_\rho \sin \theta + A_z \cos \theta \\ A_\theta &\equiv A_\rho \cos \theta - A_z \sin \theta \\ A_\phi &\equiv -A_x \sin \phi + A_y \cos \phi\end{aligned}$$

Gradient:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{(r \sin \theta)} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

Laplacien:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 U) + \frac{1}{(r^2 \sin \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{(r^2 \sin^2 \theta)} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 A_r) + \frac{1}{(r \sin \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{(r \sin \theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

Rotationnel:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{(r \sin \theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{(r \sin \theta)} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi. \end{aligned}$$

A.6.4 Coordonnées curvilignes (cas général)

Considérons des coordonnées curvilignes. Un vecteur de position $\mathbf{r}$ dans ce système de coordonnées s'exprime sous la forme de ses composantes $\mathbf{r} = (u_1, u_2, u_3)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{r} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.25})$$

où les composantes sont

$$u_1 = u_1(x, y, z) \quad u_2 = u_2(x, y, z) \quad u_3 = u_3(x, y, z)$$

et les vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ d'un système de coordonnées orthogonal sont définis comme

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad \text{avec } h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \text{ et } i = 1, 2, 3$$

tel que

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad \text{avec } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\} \text{ ou } \{3, 1, 2\}$$

Un vecteur $\mathbf{A}$ dans ce système de coordonnées s'exprime souvent sous la forme de ses composantes $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ce qui représente la somme vectorielle

$$\mathbf{A} = \sum_i A_i \mathbf{e}_i = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.26})$$

L'élément infinitésimal de déplacement s'écrit

$$d\mathbf{r} = \sum_i h_i du_i \mathbf{e}_i = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$$

Alors, la métrique g_{ij} dans cette base est donnée par

$$d\mathbf{l}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.27})$$

$$= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \quad (\text{A.28})$$

$$= \sum_i (h_i du_i)^2 \quad (\text{A.29})$$

où

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Les éléments de longueur, $d\mathbf{l} = (h_1 du_1, h_2 du_2, h_3 du_3)$, de surface, (ds_1, ds_2, ds_3) , et de volume, dv , sont respectivement

$$d\mathbf{l} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} ds_1 &= |(h_2 du_2 \mathbf{e}_2) \times (h_3 du_3 \mathbf{e}_3)| = h_2 h_3 du_2 du_3 \\ ds_2 &= |(h_3 du_3 \mathbf{e}_3) \times (h_1 du_1 \mathbf{e}_1)| = h_3 h_1 du_3 du_1 \\ ds_3 &= |(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \times (h_2 du_2 \mathbf{e}_2)| = h_1 h_2 du_1 du_2 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned}
 dv &= |(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \cdot ((h_2 du_2 \mathbf{e}_2) \times (h_3 du_3 \mathbf{e}_3))| \\
 &= h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3
 \end{aligned}$$

Opérateurs différentiels:

Posons des fonctions scalaires et vectorielles

$$\begin{aligned}
 U &\equiv U(u_1, u_2, u_3) \\
 \mathbf{A} &\equiv A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

Gradient:

$$\begin{aligned}
 \nabla U &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 \\
 &= \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial U}{\partial u_i} \mathbf{e}_i
 \end{aligned}$$

Laplacien:

$$\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right]$$

Divergence:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

Rotationnel:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1 \quad h_3 = 1$$

Coordonnées cylindriques:

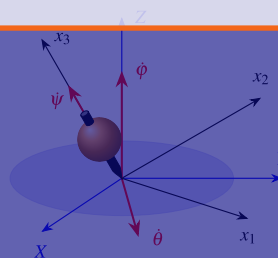
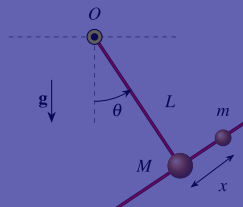
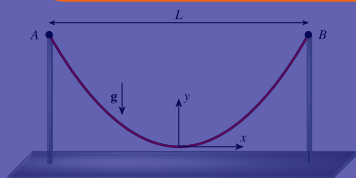
$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho \quad h_3 = 1$$

Coordonnées sphériques:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

B

Aide-mémoire



Annexe B

B.0.1 Métriques :

En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :

$$ds^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + (dz)^2$$

En général :

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dq_i dq_j.$$

B.0.2 Mécanique lagrangienne :

Le lagrangien

$$L = T - V \quad (\text{B.1})$$

Énergie cinétique :

$$T = \sum_{i,j} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Équation d'Euler-Lagrange pour un lagrangien $L(q_i, \dot{q}_i, t)$:

forces conservatrices ($F(r) = -\nabla V(r)$) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

forces non conservatrices ($F(r) \neq -\nabla V(r)$) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

où Q_i = composantes de la force généralisée.
Identité de Beltrami (pour L indépendant de t) :

$$L - \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = C = \text{constante}$$

Potentiel efficace :

$$V_{\text{eff.}} = V_{\text{eff.}}(r_0) + \left. \frac{\partial V_{\text{eff.}}}{\partial r} \right|_{r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff.}}}{\partial r^2} \right|_{r_0} (r - r_0)^2 + O(r^3)$$

Variables cycliques (lagrangien indépendant de $\dot{q}_i$) :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{constante.}$$

Potentiers :

Gravitationnel : $V_{grav} = mgh$ ou $-GM/r$

Harmonique : $V_H(x) = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 =$

$$\frac{1}{2}m\omega^2(x-x_0)^2$$

Électromagnétique : $V_{em} = q_e(\phi + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})$

avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

B.0.3 Mécanique hamiltonienne

Le hamiltonien :

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad \text{avec} \quad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Énergie cinétique :

$$T = \sum_{i,j} \frac{1}{2m} g_{i,j}^{-1} p_i p_j$$

Équations canoniques du mouvement :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Le crochet de Poisson :

$$\{A, B\}_{q,p} \equiv \sum_i^n \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

Identité de Jacobi :

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = 0$$

Pour une fonction quelconque :

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. (= 0 \text{ pour } F = \text{constante du mouvement})$$

Variables canoniques q_i, p_i :

$$\{q_k, q_j\} = 0, \quad \{p_k, p_j\} = 0, \quad \{q_k, p_j\} = \delta_{kj}$$

B.0.4 Transformations canoniques

Transformations canoniques (TC) :

$$q_i, p_i, L(q_i, \dot{q}_i, t), H(q_i, p_i) \xrightarrow{\text{TC}} Q_i, P_i, L'(Q_i, \dot{Q}_i, t), H'(Q_i, P_i)$$

avec

$$L = L' + \frac{dF}{dt}$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

et générateurs

Var. ind.	Générateurs	Transformation			Éqs. de la TC
q_i, Q_i	$F_1(q_i, Q_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$
q_i, P_i	$F_2(q_i, P_i, t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$	$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$
p_i, Q_i	$F_3(p_i, Q_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$	$\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_j}$
p_i, P_i	$F_4(p_i, P_i, t)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$	$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$	$\frac{\partial P_j}{\partial p_i} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$

B.0.5 Méthode Hamilton-Jacobi

Équation de Hamilton-Jacobi :

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Pour $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$:

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - \alpha_1 t$$

Variables cycliques :

$$W(q_i, \alpha_i) = \sum_k^{\text{cycliques}} \alpha_k q_k + W'(q_j, \alpha_j)$$

B.0.6 Théorie des perturbations

Hamiltonien :

$$H(q_i, p_i) = H_0(q_i, p_i) + H_1(q_i, p_i) \quad \text{ou} \quad H_1 < H_0$$

Avec les solutions connues de H_0 :

$$\begin{aligned} \dot{a}_i^{(0)} &= \{a_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} a_i^{(0)} \equiv 0 \\ \dot{b}_i^{(0)} &= \{b_i^{(0)}, H_0\} + \frac{\partial}{\partial t} b_i^{(0)} \equiv 0. \end{aligned}$$

on solutionne

$$\begin{aligned}\dot{a}_i &= \{a_i, H_1\} \\ \dot{b}_i &= \{b_i, H_1\}.\end{aligned}$$

Méthode par série : développement de puissances λ en utilisant

$$\begin{aligned}H_1 &= \lambda h(q_i, p_i) \\ a_i &= a_i^{(0)} + \lambda a_i^{(1)} + \lambda^2 a_i^{(2)} + \dots \\ b_i &= b_i^{(0)} + \lambda b_i^{(1)} + \lambda^2 b_i^{(2)} + \dots\end{aligned}$$

Méthode itérative : itération avec solutions de départ $a_j^{(0)}, b_j^{(0)}$

$$\begin{aligned}\dot{a}_i^{(n+1)} &= \{a_i, H_1\}|_{a_j^{(n)}, b_j^{(n)}} \\ \dot{b}_i^{(n+1)} &= \{b_i, H_1\}|_{a_j^{(n)}, b_j^{(n)}}\end{aligned}$$

Méthode de la moyenne (orbite cyclique de période τ) :

$$\begin{aligned}\bar{a}_i &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{a_i, H_1\} dt \\ \bar{b}_i &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \{b_i, H_1\} dt\end{aligned}$$

B.0.7 Corps rigides

Tenseur d'inertie :

$$I_{ik} = \sum_{\text{part.}} m [\delta_{ik} x_l x_l - x_i x_k]$$

Dynamique de rotation :

torque	$\tau_i = \frac{dL_i}{dt} = I_{ik} \alpha_k$	ou	$\tau = \dot{\mathbf{L}} = I \alpha$
moment cinétique	$L_i = I_{ik} \omega_k$	ou	$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$
énergie cinétique	$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega_i I_{ik} \omega_k$	ou	$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Moments d'inertie principaux (diagonalisation) :

$$U I U^{-1} = I_D \quad \text{où} \quad I_D = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Équations d'Euler :

$$I_1 \dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3 (I_2 - I_3) = \tau_1$$

$$I_2 \dot{\Omega}_2 - \Omega_3 \Omega_1 (I_3 - I_1) = \tau_2$$

$$I_3 \dot{\Omega}_3 - \Omega_1 \Omega_2 (I_1 - I_2) = \tau_3$$

ou

$$I_i \frac{d\Omega_i}{dt} + \varepsilon_{ijk} \Omega_j \Omega_k I_k = \tau_i \quad (\text{pas de somme sur } i)$$

Toupie sphérique : $I_1 = I_2 = I_3 = I$ Toupie symétrique : $I_1 = I_2 \neq I_3$ Toupie asymétrique : I_1, I_2, I_3 différentsMoments d'inertie I par rapport à l'axe de symétrie :

Masse ponctuelle p/r à axe	MR^2	Disque ou cylindre plein :	$\frac{1}{2}MR^2$
Tige mince p/r centre :	$\frac{1}{12}MR^2$	Tige mince p/r extrémité :	$\frac{1}{3}MR^2$
Cylindre creux/anneau mince :	MR^2	Anneau épais :	$\frac{1}{2}M(R_{\text{int}}^2 + R_{\text{ext}}^2)$
Sphère pleine :	$\frac{2}{5}MR^2$	Sphère creuse :	$\frac{2}{3}MR^2$

Condition de roulement sans glissement : $v = \omega R$ Théorème des axes parallèles : $I = I_{CM} + M \cdot d^2$ Théorème des plaques minces : $I_z = I_x + I_y$

Constantes usuelles :

Accélération gravitationnelle : $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ Rayon terrestre : $R = 6378 \text{ km}$ Vitesse angulaire terrestre : $\omega = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Références

Annexe C

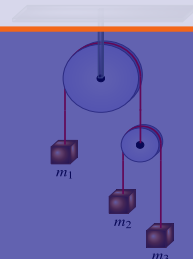
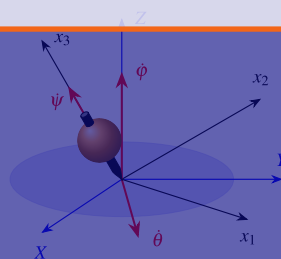
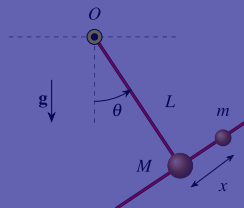
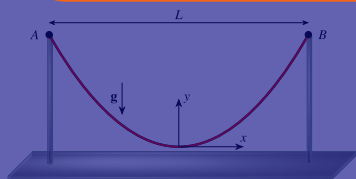
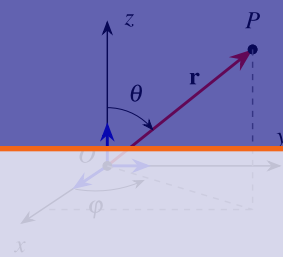
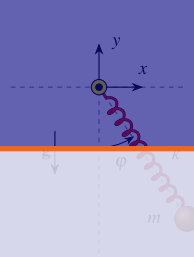
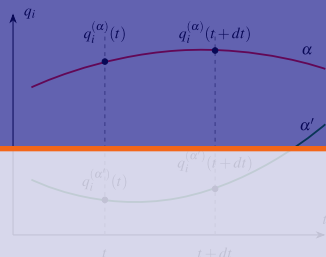
Les notes couvrent une partie de ce qui est traité dans les volumes suivants et ceux-ci peuvent être utilisés à titre complémentaire.

1. *Classical Mechanics*, H. Goldstein, 2^e édition, Addison-Wesley (1980) ou édition plus récente..

2. *Mécanique.*, L. Landau et E. Lifchitz, 4e édition, Éditions MIR.
3. *Theoretical Mechanics*, E.J. Saletan et A.H. Cromer, John Wiley & Sons.
4. *Classical description of motion*, E.J. Konopinski, W.H. Freeman & Co.
5. *Intermediate Classical Mechanics*, J. Norwood, Prentice Hall.



Index



Angles d'Euler428

A

Abc (cet index)547

Action et phase ★★298 Axes principaux.....404

B

Beltrami, Identité de 49

C

Constantes du mouvement... 76

Contraintes holonomes 69

Contraintes non-holonomes.. 69

Coordonnées

cartésiennes 519

cylindriques 522

sphériques 526, 530

Coordonnées curvilignes 58

Coordonnées généralisées.... 36

Corde élastique en 1D 470

Crochets de Poisson 212

Crochets de Poisson, Interprétation géométrique ★★ 251

D

Degrés de liberté 24

Degrés de liberté du solide.. 394

Densité d'états 314

Densité hamiltonienne ★★ 499

Densité lagrangienne 475

Développement en série 376

E

Électrodynamique classique 488

Éléments de dynamique..... 6

Énergie 14

Énergie cinétique 398

Énergie cinétique $T(q_i, p_i)$ en coordonnées généralisées 290

Équation d'onde ★★ 303

Équations d'Euler 419

Equations d'Euler-Lagrange du champ 477

Espace des phases ★ .. 197, 307

Exemples non mécaniques..157

Exercices.....29

H

Hamilton-Jacobi, Méthode de 262

Hamiltonien 193

F

Fermat Principe de 157

Flot hamiltonien ★ 308

Flot hamiltonien, Conservation
du volume ★ 310

Flot hamiltonien, Incompressibil-
ité ★ 310

Fonction génératrice ★ 324

Fonctions génératrices.....229

Forces conservatrices 52

Forces extérieures 17

Forces non conservatrices....57

Formulation lagrangienne ★★
475

Formulation relativiste de la théorie
des champs.....498

Fréquence d'une particule ★★
302

I

Identité de Beltrami 49

Interprétation de la fonction S
293

Invariance de jauge 96

Invariants intégraux de Poincaré
312

L

Lagrangien indépendant du temps
82

Lagrangien, fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ 51

Legendre, Transformation de 191

Localité des interactions....475

Lois de conservation 76

Longueur d'onde d'une particule
★★ 302

M

Mécanique non relativiste .. 109
Mécanique ondulatoire ★★ 295
Mécanique relativiste.....115
Mécanique, Cas simples ... 139
Méthode canonique de perturbation.....370
Méthode de Hamilton-Jacobi 262
Méthode de la moyenne 365, 386
Méthode itérative.....363
Méthode par série 362
Moment cinétique d'un solide 414
Moments généralisés 220
Multiplicateurs de Lagrange. 73

P

Particule dans un champ central
205

Particule dans un champ gravitationnel 139

Particule soumise à une force en
trois dimensions 203

Particule soumise à une force en
une dimension 202

Particule suspendue à un ressort
141

Particule suspendue au bout d'une
tige rigide 146

Particule(s) ponctuelle(s) ... 2, 6

Passage à la limite continue ★
470

Pendule plan suspendu par un
ressort de masse nulle 152

Poincaré, Invariants intégraux
de ★★★ 312

Poisson, Crochets de 212

Potentiel central 164

Potentiel en r^{-1} 168

Potentiel en r^{-n} 177

Principe de Fermat 157

Problème à deux corps 161

R

Relation avec les invariants d'un système 257

S

Solution itérative. 382

Symétrie de l'espace-temps ★★ 108

Système mécanique et optique géométrique ★★ 295

Systèmes à N particules 17

Systèmes intégrables ★★ ★ 327

T

Tenseur d'inertie 404

Tenseur énergie-impulsion . 494

Théorème d'Arnold-Liouville ★★ ★ 327

Théorème de Liouville ★★ . 314

Théorème de Noether 91

Théorie classique des champs ★★ 484

Toupie asymétrique libre et stabilité 457

Toupie symétrique pesante . 440

Transformation de Legendre 191

Transformations canoniques 225

Transformations canoniques particulières 238

Transformations de jauge .. 482

Travail 14

V

Variables angles-actions ★ . 316

Variables angles-actions ★★ ★ 330

Variables canoniques 218

Variables cycliques 76

Variables d'actions ★ 320

Variables d'angles ★ 319

Variation fonctionnelle 41

Vitesse de phase ★★298

Cet ouvrage contient l'essentiel du matériel couvert dans le cours de Mécanique analytique (PHY-2000) du Département de physique, de génie physique et d'optique de l'Université Laval dans le cadre de son programme de physique du 1^{er} cycle (B.Sc.). Il présente les principales notions de la mécanique classique avancée, soit le formalisme de Lagrange, le formalisme canonique, la théorie des perturbations et le mouvement d'un solide rigide et la mécanique des milieux continus.

Département de physique, de génie physique et d'optique ★ Université Laval Québec ★ Canada

