

Contrôle 1 de Mécanique Analytique
Filière SMP - S5 Parcours Physique Moderne
Temps imparti : 1H30

Questions de cours (3 points)

1. Montrer que deux lagrangiens différant par une dérivée totale d'une fonction par rapport au temps,

$$\mathcal{L}'(q_k, \dot{q}_k, t) = \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) + \frac{df(q_k)}{dt}$$

décrivent la même dynamique.

2. Rappeler la démonstration du théorème de Noether

$$I(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0}$$

où chacune de ces grandeurs est définie dans le cours.

Exercice 1 (3 points)

Considérons une particule qui se déplace dans le plan (OXY).

Sachant que l'énergie cinétique $T = T(\dot{x}, \dot{y})$ et que $\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = T - V$, dire quelle est la loi de symétrie à laquelle obéit le lagrangien et quelle grandeur est conservée dans les cas suivants :

1. $V(x, y, t) = ax$;
2. $V(x, y) = at(x^2 + y^2)$;
3. $V(x, y) = a(x - y)$.

Exercice 2 (6 points)

Une particule de masse m et de charge q se déplace dans une région où règne un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. La position de la particule est repérée par les coordonnées $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et sa vitesse est donnée par $\vec{v} = (v_1 = \dot{x}_1, v_2 = \dot{x}_2, v_3 = \dot{x}_3)$. Les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées coïncident avec les coordonnées et les composantes de la vitesse de la particule. On rappelle que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi(x_i, t) - \frac{\partial \vec{A}(x_i, t)}{\partial t}$ et $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(x_i, t)$, $\varphi(x_i, t)$ et $\vec{A}(x_i, t)$ sont respectivement les potentiels scalaire et vectoriel. $\vec{\nabla}$ est l'opérateur différentiel nabla¹.

1. Calculer la dérivée totale par rapport au temps de $\vec{A}$, $\frac{d\vec{A}}{dt}$.
2. Montrer que les composantes² de la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, à laquelle la particule est soumise, peuvent se mettre sous la forme

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V(x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial v_i} - \frac{\partial V(x_i, \dot{x}_i, t)}{\partial x_i}$$

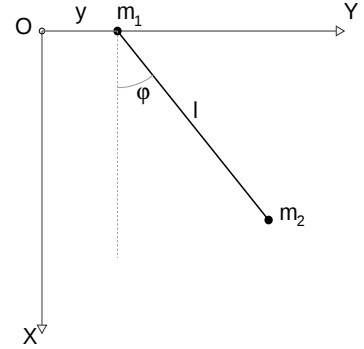
où $V(x_i, \dot{x}_i, t) = q(\varphi(x_i, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(x_i, t))$.

1. $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) = \vec{\nabla}(\varphi)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. On rappelle que $\vec{u} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{z})\vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{z}$.
 2. $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

3. En déduire le lagrangien de la particule $\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i, t)$. Ecrire les équations du mouvement de la particule.
4. Calculer les moments conjugués (p_x, p_y, p_z) .
5. En déduire le hamiltonien $\mathcal{H}(x_i, p_{ix}, t)$ de la particule. Que représente-t-il ? Commenter son expression.

Exercice 3 (8points)

Soit un pendule de longueur l inextensible et de masse m_2 soumis à l'action de son poids. Son point de suspension de masse m_1 est astreint à se déplacer sans frottement le long de l'axe horizontal OY . La position de m_1 est repérée par y . Le mouvement du système (S) ainsi formé par m_1 et m_2 a lieu dans le plan vertical (OXY) , voir figure ci-contre.



1. Montrer que (S) a deux degrés de liberté.
On utilise y et φ comme coordonnées généralisées.
2. Calculer les coordonnées des masses m_1 et de m_2 en fonction de y , φ et l . En déduire leurs vitesses et leurs énergies cinétiques. Calculer l'énergie cinétique de (S) .
3. Dénombrer les forces qui s'appliquent sur (S) en précisant celle(s) qui travaille(nt). En déduire l'énergie potentielle de (S) .
4. Montrer que le lagrangien de (S) est donné par

$$\mathcal{L}(y, \varphi, \dot{y}, \dot{\varphi}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{y}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 l \dot{y} \dot{\varphi} \cos \varphi + m_2 g l \cos \varphi$$

Calculer les moments conjugués p_y et p_φ .

5. Etablir les équations de Lagrange. Déterminer les intégrales premières du système et préciser leurs lois de symétrie.
6. En utilisant l'une des intégrales premières, exprimer $y = f(\varphi)$ et déduire l'équation de mouvement en φ . Les conditions initiales sont $y(t = 0) = 0$, $\dot{y}(t = 0) = v_0$, $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ et $\varphi(t = 0) = \varphi_0$.
7. En se plaçant dans le cadre de l'approximation des faibles oscillations, $\varphi \rightarrow 0$, et de celle des oscillations lentes,³ montrer que l'équation du mouvement en φ s'écrit comme suit

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \varphi = 0.$$

Déterminer la solution $\varphi = \varphi(t)$.

8. Déduire la solution $y = y(t)$.

3. on néglige le terme de l'équation différentielle en $\dot{\varphi}$.