

Contrôle N° 2 de Mécanique Analytique
Filière SMP - S5 Parcours Physique Moderne
Corrigé et barème

QUESTIONS DE COURS ¹ (6 points)

1.5pt

1. **Principe de Maupertuis** La trajectoire d'un système conservatif est déterminée par l'extrémisation de l'action réduite S_0 . **0.25pt**
Reprenons l'expression de la loi de Maupertuis et éliminons les moment conjugués. Sachant que pour un système conservatif, $V = V(q)$ et que l'énergie cinétique, est une fonction homogène d'ordre 2 de $\dot{q}_k$, $T = 1/2 \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$ alors

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} [\delta_{ik} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jk}] \\ &= \sum_i m_{ki} \dot{q}_i \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_i dq_i &= \sum_{i,j} \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij} \dot{q}_j dq_i = \frac{1}{dt} \sum_{i,j} \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} m_{ij} dq_j dq_i \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \frac{ds}{dt} ds \\ &= \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V)} ds \quad \textbf{0.5pt} \end{aligned}$$

L'action réduite d'un système conservatif peut être exprimée en fonction des coordonnées généralisées comme suit

$$S_0(q; P) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V(q))} ds \quad \textbf{0.25pt}$$

1.5pt

2. L'état mécanique de la particule est décrit par son action $S(q, t; P)$ qui s'exprime en fonction de l'action réduite, puisque le système est conservatif, par

$$S(q, t; P) = S_0(q; P) - Et.$$

Considérons les lieux de l'espace où l'action $S(q, t; P)$ à l'instant t est constante ; $S(q, t; P) = \text{Cte}$. Ainsi $S(q, t = 0; P) = S_0(q, P)$. Cherchons $S(q', t + dt; P)$:

$$\begin{aligned} S(q', t + dt; P) &= S_0(q'; P) - E(t + dt) \\ &= S_0(q + dq; P) - Et - Edt \\ &= S_0(q; P) + dS_0 - Et - Edt \\ &= S(q, t; P) + dS_0 - Edt \end{aligned} \quad (0.75\text{pt})$$

comme la surface considérée de l'action est constante et a la même valeur et $dS_0 = \sqrt{2(E - V)}ds = \sqrt{2(E - V)}\sqrt{m}dq$, alors

$$\sqrt{2m(E - V)}dq - Edt = 0 \implies v_\varphi = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}} \quad (0.75\text{pt})$$

La surface d'action se propage dans l'espace des configurations avec la vitesse $v_\varphi = \frac{E}{\sqrt{2m(E - V)}}$

L'action joue dans l'espace dual, l'espace des configurations, ce que joue la phase dans l'espace des positions,

1.5pt

3. Partant de la dualité entre la surface d'action dans l'espace des configurations et la phase de l'onde dans l'espace des positions, nous avons

$$\varphi(\vec{r}, t) = \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t \right) = 2\pi \left(\frac{L(r)}{\lambda_0} - \nu t \right) \iff S(q, t; P) = S_0(q; P) - Et \quad (0.5)$$

où $L(r) = nr$ est le chemin optique et n l'indice de réfraction du milieu, λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

En comparant terme à terme, on peut déduire que l'énergie mécanique est proportionnelle à la fréquence

$$E = h\nu \quad (0.5)$$

et le coefficient de proportionnalité h est la constante de Planck. Partant de cette relation, on peut déduire la relation entre l'impulsion de la particule au vecteur d'onde comme suit

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v_\varphi} \\ &= \frac{2\pi\nu m\nu}{E} = \frac{2\pi}{h}p \implies p = \hbar k \end{aligned} \quad (0.5\text{pt})$$

1.5pt

4. En partant de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques,

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0$$

déduite des équations de Maxwell, et stipulant l'universalité de cette équation, trouvons l'équation décrivant l'évolution de la particule si elle est décrite par une onde Ψ . En effet, sachant que la dépendance temporelle de ϕ est toujours de la

forme $e^{-i\omega t}$, même dans le cas d'un espace inhomogène, l'équation précédente devient

$$\left(\Delta + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \Psi = 0. \quad (0.25\text{pt})$$

En utilisant les relations déduites de la dualité entre l'espace des configurations et l'espace des positions,

$$\frac{n^2 \omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v_\phi^2} = \frac{4\pi^2 v^2 m^2 v^2}{E^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} \quad (0.5\text{pt})$$

nous avons utilisé les relations démontrées dans le paragraphe précédent $v v_\phi = E/m$ et $E = \hbar v$. Aussi, nous obtenons,

$$\left(\Delta + \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0.$$

On peut déjà souligner qu'à partir de cette dernière relation, étant donné que l'équation est valable $\forall \Psi \Rightarrow p^2 = -\hbar^2 \Delta = -\hbar^2 \nabla^2 = (i\hbar \nabla)^2$ qui n'est d'autre que le principe de correspondance $\vec{p} \rightarrow i\hbar \vec{\nabla}$.

Continuons notre quête de l'équation de Ψ . Or nous avons

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V \Rightarrow p^2 = 2m(H - V) \quad (0.25\text{pt})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left[\Delta + \frac{1}{\hbar^2} (2m(H - V)) \right] \Psi &= 0 \\ \Rightarrow \left[\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + (H - V) \right] \Psi &= 0 \\ \Rightarrow H\Psi &= \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi \end{aligned}$$

qui n'est d'autre que l'équation de Schrodinger. Si le système est conservatif alors, $H = E$ et l'équation devient

$$H\Psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \Psi = E\Psi. \quad (0.5\text{pt})$$

EXERCICE 1 (4 points)

On considère la transformation

$$\begin{aligned} Q &= p^\alpha q^\beta \\ P &= p^\gamma q^\delta \end{aligned}$$

telles que $q > 0$ et $p > 0$.

2pt

1. Pour que la transformation soit canonique il suffit que les nouvelles variables vérifient les relations des crochets de Poisson **0.25pt**, $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$ et $\{Q, P\} = 1$. Aussi,

$$\begin{aligned}\{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= \beta p^\alpha p^{\beta-1} \gamma p^{\gamma-1} q^\delta - \alpha p^{\alpha-1} q^\beta \delta p^\gamma q^{\delta-1} \\ &= (\beta\gamma - \alpha\delta) p^{\alpha+\gamma-1} q^{\beta+\delta-1} \quad \text{0.5pt}\end{aligned}$$

et

$$\{Q, P\} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 - \alpha \\ \delta = 1 - \beta \\ \beta\gamma - \alpha\delta = 1 \end{cases} \quad \text{0.5pt}$$

et en substituant les deux premières équations dans la troisième équation, on obtient

$$\begin{aligned}\beta(1 - \alpha) - \alpha(1 - \beta) &= 1 \Rightarrow \beta - \alpha = 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 - \alpha \\ \delta = -\alpha \\ \beta = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{0.5pt}\end{aligned}$$

ce qui donne finalement comme transformation

$$\begin{aligned}Q &= p^\alpha q^{1+\alpha} \\ P &= p^{1-\alpha} q^{-\alpha}. \quad \text{0.25}\end{aligned}$$

2pt

2. On cherche la fonction génératrice de type deux associée à cette transformation. Aussi, on a

$$G_2 = G_2(q, P) \text{ et } p = \frac{\partial G_2(q, P)}{\partial P}, \quad Q = \frac{\partial G_2(q, P)}{\partial q} \quad \text{0.25pt}$$

or en utilisant les relations de la question précédente, on a

$$Q = p^\alpha q^{1+\alpha} = P^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} q^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\partial G_2(q, P)}{\partial P} \Rightarrow G_2(q, P) = (1 - \alpha)(Pq)^{\frac{1}{1-\alpha}} + f(q) \quad \text{0.75pt}$$

et

$$p = \frac{\partial G_2}{\partial q} = (Pq^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (Pq^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} + f'(q) \Rightarrow f'(q) = 0 \quad \text{0.75pt}$$

et donc

$$G_2(q, P) = (1 - \alpha)(Pq)^{\frac{1}{1-\alpha}} + C \quad \text{0.25pt}$$

EXERCICE 2 : POTENTIEL CONIQUE (10 points)

Considérons une particule de masse m astreinte à se déplacer sur un plan. La position de la particule est repérée dans le référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$, considéré galiléen, par les coordonnées (x, y) . Le potentiel auquel la particule est soumise est de la forme $V(r) = ar$, avec $r^2 = x^2 + y^2$ et a une constante positive. On utilise les coordonnées polaires (r, θ) comme coordonnées généralisées.

1pt

1. Connaissant le potentiel $V(r)$ dont dérive la force et en écrivant le gradient en coordonnées cylindrique² $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$, on a

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(V(r)) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{e}_r = -a\vec{e}_r \quad (0.25\text{pt})$$

sachant que les autres termes sont nuls puisque le potentiel est radial. Or $\vec{r} = r\vec{e}_r \Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ ce qui implique

$$\vec{F} = -a\frac{\vec{r}}{r} \quad (0.25\text{pt})$$

ce qui veut dire que la direction de la force passe tout le temps par l'origine O et donc $\vec{F}$ est centrale.

Le théorème du moment cinétique nous donne

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge -a\frac{\vec{r}}{r} = \vec{0} \quad (0.25\text{pt})$$

ce qui implique que le moment cinétique est conservé. Or $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{r} \wedge m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$ et donc $\vec{L} = L_z\vec{k}$ est conservé (en module, en direction et en sens). (0.25pt)

2. L'énergie cinétique est donnée par $T = \frac{1}{2}mV^2(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ et l'énergie potentielle est $V(r)$, ce qui donne pour le lagrangien de la particule

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - ar.$$

Calculons les moments conjugués

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ et } p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}.$$

3. Le hamiltonien est donné par

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar.$$

On remarque que le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, ce qui implique que l'énergie mécanique est conservée et donc une intégrale première. De même, la coordonnée généralisée θ est cyclique ce qui implique que p_θ est conservé et donc une intégrale première aussi. On en conclue que $\mathcal{H}$ et p_θ sont des intégrales premières.

2. On peut utiliser aussi les coordonnées cartésiennes

4. De l'expression précédente on en déduit que

$$\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta) = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \tilde{V}(r) \text{ avec } \tilde{V}(r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar.$$

5. Pour démontrer qu'un mouvement circulaire stable est possible, il suffit de montrer que $r = r_0$ est une solution de l'équation du mouvement et que le potentiel effectif $\tilde{V}(r)$ est minimal en r_0 . En effet, L'équation du mouvement est

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} & \dot{p}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - a \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} & \dot{p}_\theta = 0 \end{cases}$$

ce qui donne pour l'équation du mouvement

$$\dot{p}_r = m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - a \implies \ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{m^2r^3} + \frac{a}{m} = 0$$

ainsi l'équation du mouvement circulaire $r = r_0$ est une solution avec

$$\frac{p_\theta^2}{mr_0^3} = a \implies r_0 = \left(\frac{p_\theta^2}{am} \right)^{1/3}.$$

Donc $r = r_0 = \left(\frac{p_\theta^2}{am} \right)^{1/3}$ est une solution de l'équation du mouvement. Vérifions sa stabilité. En effet,

$$\frac{d\tilde{V}(r)}{dr} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} + a = 0 \implies r = r_0$$

et comme

$$\frac{d^2\tilde{V}(r)}{dr^2} = 3\frac{p_\theta^2}{mr^4} > 0 \forall r \implies V(r_0) \text{ est minimum.}$$

Ce qui est le résultat recherché.

6. Reprenons l'équation du mouvement avec $r = r_0 + \delta r \implies \dot{r} = \delta \dot{r}$ et $\ddot{r} = \delta \ddot{r}$. Nous avons aussi $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = L_z$ ce qui donne

$$m\delta\ddot{r} - \frac{L_z^2}{m} \frac{1}{r_0^3 \left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^3} + a = 0$$

en utilisant le fait que $\frac{\delta r}{r_0} \rightarrow 0$ alors $\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta r}{r_0}\right)^3} \simeq 1 - 3\frac{\delta r}{r_0}$, on obtient

$$m\delta\ddot{r} - \frac{L_z^2}{mr_0^3} + 3\frac{L_z^2}{mr_0^4}\delta r + a = 0$$

or $\frac{L_z^2}{mr_0^3} = a$ ce qui donne finalement l'équation

$$m\delta\ddot{r} + 3a \left(\frac{ma}{L_z^2} \right)^{1/3} \delta r = 0$$

qui est une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre à coefficients constants dont le discriminant de l'équation caractéristique est négatif. La solution donc sont des oscillations autour de r_0 avec une pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{3a \left(\frac{ma}{L_z^2} \right)^{1/3}} \text{ et donc de fréquence}$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{L_z^2}{27ma^4} \right)^{1/6}$$

7. Soit $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta)$ l'action hamiltonienne. Par séparation des variables, on a $\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \mathcal{S}_\theta(\theta; P_\theta) + \mathcal{S}_r(r; P_r) - Et$.

— On sait que l'action hamiltonienne vérifie

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{S}_\theta}{\partial \theta} = C \implies \mathcal{S}_\theta = C\theta.$$

— On rappelle que l'équation de Hamilton-jacobi est

$$\mathcal{H}(r, \theta, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}) + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \right)^2 + ar = E$$

et en séparant les variables sachant que $\mathcal{S}_\theta = C\theta$, on obtient

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{C^2}{2mr^2} + ar = E \implies \frac{\partial \mathcal{S}_r}{\partial r} = \pm \left(2m(E - ar) - \frac{C^2}{r^2} \right)^{1/2}.$$

— On intègre d'abord l'équation précédente et on obtient

$$\mathcal{S}_r(r; P_r) = \pm \int \left(2m(E - ar) - \frac{C^2}{r^2} \right)^{1/2} dr$$

ce qui donne pour l'action hamiltonienne

$$\mathcal{S}(r, \theta, t; P_r, P_\theta) = \pm \int \left(2m(E - ar) - \frac{C^2}{r^2} \right)^{1/2} dr + C\theta - Et.$$

8. Le mouvement circulaire de la question 5 a pour équations $r = r_0$ et $p_\theta = L_z = \text{Constante}$, ce qui donne respectivement comme portrait de phase :

— dans le plan (r, p_r) , comme $\dot{r} = 0 = p_r$, alors le portrait de phase est un point de coordonnées $(r_0, 0)$.

— dans le plan (θ, p_θ) l'équation est $p_\theta = C$ et donc le portrait est une droite horizontale, parallèle à l'axe des θ , qui passe par $p_\theta = C$.

Si Les petites oscillations radiales sont permises, alors $r = r_0 + a \cos(\omega t - \varphi)$ ce qui donne $\dot{r} = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) = p_r/m$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{p_r^2}{m^2} &= a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi) \\ &= a^2 \omega^2 (1 - \cos^2(\omega t - \varphi)) \\ &= a^2 \omega^2 \left(1 - \frac{(r - r_0)^2}{a^2} \right) \implies \frac{p_r^2}{\frac{a^2 \omega^2}{m^2}} + \frac{(r - r_0)^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une ellipse de centre $(r_0, 0)$ et de demi axes respectivement selon les directions de r et de p_r sont a et $a\omega/m$.