Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2011/2012

Contrôle première partie : Mécanique Analytique
Parcours Physique Moderne
Solution et barême

Questions de cours : 2points

Exercice 1 : 10 points

1. Le nombre de dégré de libértés de m est 2 puisqu'il faut deux coordonnées pour décrire le mouvement de m **(0.5point)**. Les coordonnées généralisées à utiliser sont r et θ, les coordonnées polaires de m **(0.5point)**. Considérons la base polaire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,
2. **(1point)**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= r\overrightarrow{u} \\ \Rightarrow \overrightarrow{v} &= \dot{r}\overrightarrow{u} + r\dot{\theta}\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique **(1point)**

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) \end{aligned}$$

3. **(1.5 point)** Le ressort exerce sur m une force de rappel $\overrightarrow{F} = -k(r - l_0)\overrightarrow{u}$. Le potentiel est donnée par

$$\begin{aligned} dV &= -\overrightarrow{F}\overrightarrow{dl} \\ &= k(r - l_0)\overrightarrow{u}(dr\overrightarrow{u} + rd\theta\overrightarrow{v}) \\ &= k(r - l_0)dr \\ \Rightarrow V(r) &= k\left(\frac{1}{2}\left(r^2 - l_0^2\right) - l_0(r - l_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}k\left(r - l_0\right)^2. \end{aligned}$$

Le lagrangien de m est égale à

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{1}{2}k\left(r - l_0\right)^2.$$

4. **(2 points)** En appliquant les équations de Lagrange, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r - l_0) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \end{aligned}$$

la deuxième équation du mouvement donne $mr^2\dot{\theta} = const = L_Z$, qui n'est d'autre que la conservation de la composante du moment cinétique selon OZ. On peut obtenir ce résultat en constatant que θ est une variable cyclique.
5. **(1 point)**$\omega = \dot{\theta} = const$ implique que $r = const \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. Soit $r = r_0$ alors

$$\begin{aligned} k(r_0 - l_0) &= mr_0\omega^2 \\ (r_0 - l_0)(k - m\omega^2) &= kl_0\omega^2 \\ \Rightarrow (r_0 - l_0) &= \frac{ml_0\omega^2}{k - m\omega^2} \end{aligned}$$

6. **(3 points)** Si le ressort est perturbé par des petites oscillations paramétrisées par $\epsilon(t)$ alors en reprenant l'équation du mouvement avec $r = r_0 + \epsilon(t)$

$$\begin{aligned} m\ddot{\epsilon}(t) - m(r_0 + \epsilon(t))\omega^2 + k(r_0 + \epsilon(t) - l_0) &= 0 \\ \Rightarrow m\ddot{\epsilon}(t) + \epsilon(t)\left(k - m\omega^2\right) &= mr_0\omega^2 - k(r_0 - l_0) = 0 \\ \Rightarrow \ddot{\epsilon}(t) + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\epsilon(t) &= 0 \end{aligned}$$

On pose $\omega_0^2 = k/m$ ce qui donne pour la pulsation des petites oscillations

$$\begin{aligned} \omega_{os} &= \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \Rightarrow \nu_{os} &= \sqrt{\nu_0^2 - \nu^2} \end{aligned}$$

avec $\nu = \omega/2\pi$. Si la fréquence de rotation de la masse m devient grande, ν_{os} devient imaginaire et la solution n'est plus physique ce qui veut dire que le ressort ne sera plus fixé à l'origine.

Exercice 2 : (8 points)

1. **(1 point)** Le principe de Hamilton stipule que l'action définie pour la quantité à minimiser est extremale, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int_A^B dt \\ &= \int_A^B \frac{ds}{v(y)} \\ &= \int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)} dx \end{aligned}$$

d'où la quantité à minimiser ou bien le Lagrangien associé à la trajectoire est

$$\mathcal{L}(y, y', x) = \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y}$$

Le Lagrangien ne dépend pas explicitement de la variable x, qui joue le rôle du temps. Le Hamiltonien est donc conservé.

2. **(1.5 point)**

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \\ &= \frac{y'\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+y'^2}} \end{aligned}$$

comme $\mathcal{H} = p_y y' - \mathcal{L}$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(y, p_y) &= \sqrt{1+y}\left(\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+y'^2}} \end{aligned}$$

Comme le Hamiltonien ne dépend pas de x, il est conservé.

3. **(4.5 point)** $\mathcal{H} = K$ alors

$$\begin{aligned} \frac{1+y}{1+y'^2} &= k^2 \\ \Rightarrow y'^2 &= \frac{1+y-k^2}{k^2} \\ \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y-k^2}} &= \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

En intégrant on obtient

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+y-k^2} &= \frac{1}{k}x + C \\ \Rightarrow y &= \left(\frac{1}{2k}x + \frac{C}{2}\right)^2 + k^2 - 1. \end{aligned}$$

Explicitant $y(x)$ pour les coordonnées des points A et B on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \left(\frac{-1}{2k} + \frac{C}{2}\right)^2 + k^2 - 1 \\ \frac{1}{4} &= \left(\frac{1}{2k} + \frac{C}{2}\right)^2 + k^2 - 1 \end{aligned}$$

En sommant les deux équations obtient $C/k = 0 \Rightarrow C = 0$ ce qui donne pour l'équation

$$y = \frac{1}{4k^2}x^2 + k^2 - 1.$$

Pour déterminer k, il suffit de prendre cette équation au point A ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{4k^2} + k^2 - 1 \\ \Rightarrow k^4 - \frac{5}{4}k^2 + \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

et les solutions sont

$$k \in \{\pm 1, \pm\frac{1}{2}\}$$

ce qui donne les équations du mouvement suivantes

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x^2 \quad \text{pour} \quad k = \pm 1 \\ y &= x^2 - \frac{3}{4} \quad \text{pour} \quad k = \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi le temps nécessaire pour parcourir les trajectoires dans les deux cas sont

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y}dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{13}{6} \\ t_2 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y}dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} + 2x^2\right) dx = \frac{14}{6} \end{aligned}$$

les deux temps sont légèrement différents.