Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia-Marrakech
Département de Physique

Année Universitaire 2012/2013

Contrôle 1 : Mécanique Analytique
Parcours Physique Moderne
Solution

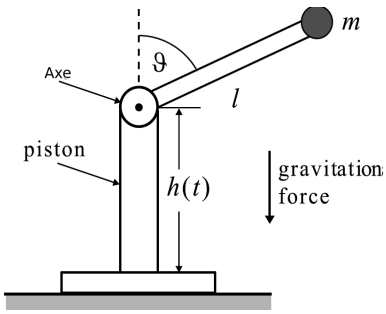
Questions de cours

Donnons les classifications des systèmes suivants :

1. Une sphère roulant sans frottement sur une autre sphère :
   — tant que les deux sphères restent en contact, la contrainte porte sur la position du centre de la sphère roulante telle que sa distance par rapport à l'origine du référentiel choisi pour l'étude du mouvement est constante. Ainsi la contrainte est scléronome puisqu'elle ne dépend pas explicitement du temps. La seule force qui travaille est le poids de la sphère roulante, puisque le roulement se fait sans frottement, et donc le système est conservatif puisque le poids dérive d'un potentiel et la réaction normale ne travaille pas.
   — lorsque la sphère roulante quitte la sphère fixe, la contrainte est non holonome, puisqu'elle ne relie pas les coordonnées généralisées du systèmes. La contrainte dans ce dernier cas est que la réaction normale soit nulle.
2. Une particule se déplaçant sans frottement le long d'une barre très longue, la barre tournant dans le plan vertical avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe horozontal : comme la contrainte est que la particule reste sur la barre qui est annimée d'un mouvement de rotation, alors la contrainte est que la trajectoire de la particule sur la barre est une droite qui dépend du temps et donc la contrainte est holonome et rhéonome. Comme il n'y a pas de frottement, le système est conservatif.

Exercice 1

La figure ci-dessous illustre le mouvement d'une boule de masse m



Considérons un référentiel $\mathcal{R}$ par rapport auquel on étudie le mouvement tel que la position de m est repérée par $(x, y, z = 0)$, Ox étant l'axe horizontal et Oy l'axe vertical, et l'angle de rotation est repéré par θ. $\mathcal{R}$ est considéré galiléen.

1. Le mouvement est plan alors la position de m est repérée par deux coordonnées (x, y). Comme la boule est fixée à l'une des extrémités à une distance fixe l, alors les deux coordonnées sont liées telles que la distance qui sépare la boule à l'axe est égale à l. Deux coordonnées et une contrainte, donc un seul degré de libérté. On peut choisir l'angle θ comme variable généralisée.
2. Exprimons les coordonnées de m dans $\mathcal{R}$ en fonction de l, h_0, θ, ω et t

$$\begin{cases} x &= l\sin\theta \\ y &= h(t) + l\cos\theta = h_0\cos\omega t + l\cos\theta. \end{cases}$$

3. Le module de la vitesse de m est $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Or

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= -h_0\omega\sin\omega t - l\dot{\theta}\sin\theta \\ \Longrightarrow\ V^2 &= l^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin\theta^2\right) + 2h_0\omega l\dot{\theta}\sin\omega t\sin\theta + h_0^2\omega^2\sin^2\omega t \\ \Longrightarrow\ V^2 &= l^2\dot{\theta}^2 + h_0\omega\sin\omega t\left(2l\dot{\theta}\sin\theta + h_0\omega\sin\omega t\right) \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2 + h_0\omega\sin\omega t\left(2l\dot{\theta}\sin\theta + h_0\omega\sin\omega t\right)\right)$$

4. La masse m est soumise à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{j}$. Le déplacement élémentaire est $\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$, ce qui donne pour le travail élémentaire du poids

$$\begin{aligned} \delta W = m\vec{g}\cdot\overrightarrow{dl} = -mgdy \Longrightarrow dV = -\delta W &= mgdy \\ \Longrightarrow V &= mgy + K \\ &= mg\left(h_0\cos\omega t + l\cos\theta\right) + K \end{aligned}$$

On prend à $\theta_0 = \theta(t = 0) = 0$ et $V(\theta_0) = 0$, ce qui fixe la constante à

$$K = -mg(h_0 + l) \Longrightarrow V(\theta, t) = mg\left[h_0(\cos\omega\mathrm{t} - 1) + \mathrm{l}(\cos\theta - 1)\right]$$

ce qui donne pour le lagrangien

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}^2 + h_0\omega\sin\omega t\left(2l\dot{\theta}\sin\theta + h_0\omega\sin\omega t\right)\right] - mg\left[h_0(\cos\omega t - 1) + l(\cos\theta - 1)\right] \end{aligned}$$

Notons que le lagrangien dépend explicitement du temps et donc le hamiltonien n'est pas conservé.

5. L'équation de Lagrange est donnée par

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0$$

or

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\theta} &= mh_0l\omega\dot{\theta}\sin\omega t\cos\theta + mgl\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} &= ml^2\dot{\theta} + mh_0\omega l\sin\omega t\sin\theta \end{aligned}$$

ainsi l'équation devient

$$\begin{aligned} mh_0 l\omega\dot{\theta}\sin\omega t\cos\theta + mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} - mh_0\omega l\left(\omega\cos\omega t\sin\theta + \dot{\theta}\sin\omega t\cos\theta\right) &= 0 \\ \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{1}{l}\left(h_0\omega^2\cos\omega t - g\right)\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

6. En faisant le changement de variable $\theta' = \pi - \theta$, alors $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}'$ et $\sin\theta' = -\sin\theta$, ce qui donne

$$\ddot{\theta}' + \frac{1}{l}(g - h_0\omega^2\cos\omega t)\sin\theta' = 0$$

ce qui donne pour les faibles déplacements $\theta' \simeq 0$

$$\ddot{\theta}' + \frac{1}{l}(g - h_0\omega^2\cos\omega t)\theta' = 0$$

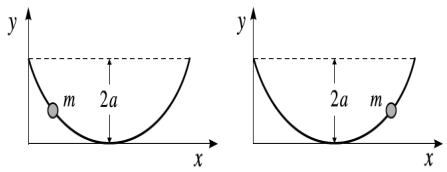
7. Si l'on fixe la position du piston à $h(t) = h_0 = 0$, alors on obtient

$$\ddot{\theta}' + \frac{g}{l}\theta' = 0$$

qui n'est d'autre que l'équation d'un pendule simple.

Exercice 2

Une masse ponctuelle m glisse sans frottement sur un cycloide défini par $x = a(\theta - \sin\theta)$ et $y = a(1 + \cos\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$, voir figure ci-dessous



1. Le système possède un seul degré de liberté. On utilise θ comme coordonnée généralisée.
D'après l'énnoncé, nous avons $\dot{x} = a\dot{\theta}(1 - \cos\theta)$ et $\dot{y} = -a\dot{\theta}\sin\theta$, ce qui donne pour le module de la la vitesse

$$\begin{aligned} V^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \\ &= a^2\dot{\theta}^2\left[(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right] \\ &= 2a^2\dot{\theta}^2\left(1 - \cos\theta\right) \\ &= 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne pour l'énergie cinétique

$$T = 2ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Pour l'énergie potentielle, seul le poids travaille. En effet, il n y a pas de frottement ainsi la réaction est normale au déplacement de m et donc ne travaille pas. Le travail élémentaire du poids est

$$\begin{aligned} \delta W = -mgdy &\Longrightarrow dV = mgdy \\ &\Longrightarrow v = mgy + K = mga(1+\cos\theta) \end{aligned}$$

en prenant $V(y=0) = 0 = K$. Aussi, le lagrangien est donné par

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= 2ma^2\dot{\theta}^2\sin^2\frac{\theta}{2} - mga(1+\cos\theta). \end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta + mga\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= 4ma^2\dot{\theta}\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne pour les équations de Lagrange

$$\begin{aligned} ma(a\dot{\theta}^2 + g)\sin\theta - 4ma^2\ddot{\theta}\sin^2\frac{\theta}{2} - 2ma^2\dot{\theta}^2\sin\theta &= 0 \\ \Longrightarrow 4a\ddot{\theta}\sin^2\frac{\theta}{2} + (a\dot{\theta}^2 - g)\sin\theta &= 0 \\ \Longrightarrow \ddot{\theta}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 - \frac{g}{a})\cos\frac{\theta}{2} &= 0 \end{aligned}$$

3. Posons $u = \cos\theta/2 \Longrightarrow \dot{u} = -1/2\dot{\theta}\sin\theta/2$ et $\ddot{u} = -1/2\ddot{\theta}\sin\theta/2 - 1/4\dot{\theta}^2\cos\theta/2$, ce qui donne

$$-2\ddot{u} - \frac{1}{2a}gu = 0 \Longrightarrow \ddot{u} + \frac{g}{4a}u = 0$$

qui n'est d'autre que l'équation recherchée avec $u = \cos\theta/2$.

4. L'équation du mouvement $\ddot{u} + \frac{g}{4a}u = 0$ est une équation différentielle de second ordre à coefficients constant sans second membre dont l'équation caractéristique est $r^2 + \frac{g}{4a} = r^2 + \omega_0^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm i\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{g/4l}$ et dont la solution est

$$u = Ae^{-i\omega_0 t} + Be^{+i\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

où A et θ_0 sont déterminés à partir des conditions initiales $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$.