Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Année Universitaire 2013/2014
Marrakech le 29 Janvier 2014

**Corrigé et barême du contrôle de rattrapage de Mécanique Analytique**
**Filière SMP - S5 Parcours Physique Moderne**
**Temps imparti : 1H30**

## Exercice 1

Un explorateur apperçoit dans le desert une oasis à un angle arctg($\frac{5}{12}$) au dessus de l'horizontale. On se propose de déterminer la distance qui le sépare de l'oasis.

1. Explicitons l'expression de la fonctionnelle

$$\mathcal{S} = \int n_0(s)(1-\lambda z)\sqrt{dx^2+dz^2} = \int n_0(s)(1-\lambda z)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}dx$$

ce qui donne pour le lagrangien associé, étant donné que $\mathcal{S} = \int \mathcal{L}dx$, l'expression

$$\mathcal{L}(z, z' = \frac{dz}{dx}; x) = n_0(s)(1-\lambda z)\sqrt{1+(z')^2}$$

où $x$ joue le rôle du temps.
Le moment conjugué est donné par

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = n_0(s)(1-\lambda z)\frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}}.$$

Le hamiltonien est donné ainsi par

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = z'p_z - \mathcal{L} &= n_0(s)(1-\lambda z)\left(\frac{z'^2}{\sqrt{1+(z')^2}} - \sqrt{1+(z')^2}\right)\\ &= n_0(s)(1-\lambda z)\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}}.\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement de $x$, il est conservé $\mathcal{H} = C_0$.

2. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = C_0 \Longrightarrow n_0(s)(1-\lambda z)\frac{1}{\sqrt{1+(z')^2}} &= C_0\\ \Longrightarrow C_0^2(1+\left(z'\right)^2) &= n_0^2(s)(1-\lambda z)^2\\ \Longrightarrow z' &= \sqrt{\frac{n_0^2}{C_0^2}(1-\lambda z)^2 - 1}\\ \Longrightarrow \frac{dz}{\sqrt{\frac{n_0^2}{C_0^2}(1-\lambda z)^2 - 1}} &= dx\end{aligned}$$

On pose

$$Z = \frac{n_0}{C_0}(\lambda z - 1) \Longrightarrow dZ = \lambda \frac{n_0}{C_0} dz$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{\sqrt{Z^2-1}} &= \frac{\lambda n_0}{C_0} dx \Longrightarrow \text{argch}(Z) = \frac{\lambda n_0}{C_0} x + C_1 \\ \Longrightarrow Z &= \text{ch}\left(\frac{\lambda n_0}{C_0} x + C_1\right) \Longrightarrow z = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{C_0}{n_0}\text{ch}\left(\frac{\lambda n_0}{C_0} x + C_1\right) + 1\right] \end{aligned}$$

or $z(0) = 0$ et $z'(0) = 5/12$ ce qui donne

$$\frac{C_0}{n_0}\text{ch}C_1 + 1 = 0 \text{ et } \text{sh}C_1 = 5/12 \Longrightarrow C_1 = \text{Argsh}(\frac{5}{12}) = \ln\left(\frac{5}{12} + \sqrt{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}\right) = \ln\frac{3}{2}$$

ce qui donne

$$\frac{C_0}{n_0} = -\frac{1}{\text{ch}\left(\ln\frac{3}{2}\right)} = -\frac{12}{13}$$

ce qui donne alors comme solution

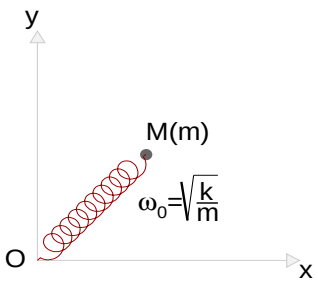
$$z = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{12}{13}\text{ch}\left(\lambda\frac{13}{12}x + ln\frac{3}{2}\right)\right]$$

La distance à la quelle se trouve l'oasis est $z(L) = 0$ et donc

$$1 - \frac{12}{13}\text{ch}\left(\lambda\frac{13}{12}L + ln\frac{3}{2}\right) = 0 \Longrightarrow L = \frac{1}{\lambda}\frac{12}{13}\left[\text{Argch}\frac{13}{12} - \ln\frac{3}{2}\right].$$

## Exercice 2

Considérons un oscillateur harmonique de masse $m$ et de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et ce en deux dimensions, figure ci-contre. Le référentiel $\mathcal{R}(O, xyz)$ est supposé galiléen. On utilise dans l'exercice les coordonnées cartésiennes.




1. Le vecteur position est repéré par $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Le vecteur vitesse est alors donné par

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}.$$

L'énergie cinétique $T$ est donnée par $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$.

2. La seule force est $\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j})$ ce qui donne pour l'énergie potentielle

$$dV = -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = k\,(xdx + ydy) \Longrightarrow V(x,y) = \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) + C$$

la constante est prise égale à 0.

3. Le lagrangien du système est donné par

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}; t) = T - V(x,y) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right).$$

Calculons les moments conjugués

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \end{cases}$$

4. Montrons que le lagrangien est invariant par rotation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(s) - y\sin(s) \\ x\sin(s) + y\cos(s) \end{pmatrix}.$$

Pour une transformation infinitésimale, $x' = x - \delta s y$ et $y' = x\delta s + y$ ce qui donne $\delta x = x' - x = -y\delta s$ et $\delta y = y' - y = x\delta s$. ainsi $x'^2 + y'^2 = (x - y\delta s)(x - y\delta s) + (x\delta s + y)(x\delta s + y) \simeq x^2 - 2xy\delta s + y^2 + 2xy\delta s + \mathcal{O}(\delta s^2) = x^2 + y^2$. De même pour la vitesse, onutilise la même démarche, $\delta\dot{x} = -\dot{y}\delta s$ et $\delta\dot{y} = \dot{x}\delta s$ et on déduit $\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = (\dot{x} - \dot{y}\delta s)(\dot{x} - \dot{y}\delta s) + (\dot{x}\delta s + \dot{y})(\dot{x}\delta s + \dot{y}) \simeq \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\delta s + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\delta s + \mathcal{O}(\delta s^2) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. ce qui permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x', y', \dot{x}', \dot{y}') &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x'^2 + y'^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) + \mathcal{O}(\delta^2 s) = \mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{aligned}$$

et donc le lagrangien est invariant.
Le théorème de Noether nous donne la quantité conservée suivante

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\frac{\delta y}{\delta s}$$

sachant que $\delta x/\delta s = -y$ et $\delta y/\delta s = x$ ce qui donne pour la quantité conservée

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\frac{\delta y}{\delta s} = -p_x y + p_y x = -L_z$$

et qui n'est d'autre que le moment cinétique orbital selon l'axe $Oz$, axe autour duquel la rotation a lieu.

5. Le hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) &= T + V \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right) \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2\left(x^2 + y^2\right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation $k = m{\omega_0}^2$.
Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, alors il est conservé.

6. **Cette question sera comptée comme un bonus**
   Pour vérifier que la transformation

$$\begin{cases} x &= X\cos\alpha + \frac{P_y}{m\omega_0}\sin\alpha \\ p_x &= -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_x\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{array}{rcl} y &=& Y\cos\alpha + \frac{P_x}{m\omega_0}\sin\alpha \\ p_y &=& -m\omega_0 Y\sin\alpha + P_y\cos\alpha \end{array}$$

   il suffit de vérifier que les relations des crochets de Poisson sont préservées

$$\begin{aligned} \{X,X\} &= \{Y,Y\} = \{X,Y\} = \{Y,X\} = \{P_X,P_X\} = \{P_Y,P_Y\} = \{P_X,P_Y\} = \{P_X,P_Y\} = 0 \\ \text{et } \{X,P_X\} &= \{Y,P_Y\} = 1. \end{aligned}$$

   Le nouvel hamiltonien peut être calculé de manière aisée et on obtient

$$\mathcal{H}(X,Y,P_X,P_Y) = \frac{P_X^2}{2m} + \frac{P_Y^2}{2m} + \frac{1}{2}m{\omega_0}^2(X^2+Y^2).$$

7. On se propose de résoudre le problème en utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ). On note par $Q_1, Q_2, P_1$ et $P_2$ les nouvelles variables.

   **7-a)** L'équation de HJ est donnée par

$$\mathcal{H}(x,y,\frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial x},\frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial y}) + \frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial t} = 0$$

   Comme le hamiltonien est conservé, on peut séparer le paramètre $t$. De même, l'expression du hamiltonien peut être séparée en deux termes où le premier est $\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ et le deuxième est $\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2$ et donc l'action hamiltonienne peut être séparée alors comme

$$S(x,y;t,P_1,P_2) = S(x,y;t,P_1,P_2) = S_x(x;P_1) + S_y(y;P_2) - Et.$$

   **7-b)** Partons de l'hamiltonien et subsitituons $p_x$ par $\partial\mathcal{S}/\partial x$ et $p_y$ par $\partial\mathcal{S}/\partial y$, et comme

$$\frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial x} = \frac{\partial\mathcal{S}_x(x;P_1)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial\mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial y} = \frac{\partial\mathcal{S}_y(y;P_2)}{\partial y}$$

   nous obtenons

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_x(x;P_1)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_y(y;P_2)}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2 = E = E_x + E_y$$

   et on peut mettre le résultat précédent sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_x(x;P_1)}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 &= E_x \Longrightarrow \frac{d\mathcal{S}_x(x;P_1)}{dx} = \pm\sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2x^2} \\ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{S}_y(y;P_2)}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2y^2 &= E_y \Longrightarrow \frac{d\mathcal{S}_y(y;P_1)}{dy} = \pm\sqrt{2mE_y - m^2\omega_0^2y^2} \end{aligned}$$

   ce qui donne en intégrant

$$S(x,y;t,P_1,P_2) = \pm\int\sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2x^2}dx \pm \int\sqrt{2pE_y - m^2\omega_0^2y^2}dy - Et.$$

**7-c)** Dans la transformation de HJ, les variables $Q_1$, $Q_2$, $P_1$ et $P_2$ sont cycliques et donc les équations de Hamilton permettent d'affirmer qu'elles sont conservées.

L'action hamiltonnienne est de type 2. On pose $P_1 = E$ et $P_2 = E_y$ ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_x & = & \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial x} = \pm\sqrt{2mE_x - m^2\omega_0^2x^2} = \pm\sqrt{2m(P_1-P_2) - m^2\omega_0^2x^2} \\ p_y & = & \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial y} = \pm\sqrt{2mE_y - m^2\omega_0^2y^2} = \pm\sqrt{2mP_2 - m^2\omega_0^2y^2} \\ Q_1 & = & \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial P_1} = \pm\int \frac{m}{\sqrt{2m(P_1-P_2)-m^2\omega_0^2x^2}}dx - t \\ Q_2 & = & \frac{\partial \mathcal{S}(x,y;t,P_1,P_2)}{\partial P_2} = \mp\int \frac{m}{\sqrt{2m(P_1-P_2)-m^2\omega_0^2x^2}}dx \pm \int \frac{m}{\sqrt{2mP_2-m^2\omega_0^2y^2}}dy \end{array}\right.$$

**7-d)** On intègre l'équation donnant les nouvelles coordonnées et on obtient

$$\begin{aligned} Q_1 &= \pm\int\sqrt{\frac{m}{2(P_1-P_2)}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}x^2}} - t = \pm\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}}x\right) - t \\ Q_2 &= \mp\int\sqrt{\frac{m}{2(P_1-P_2)}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}x^2}} \pm \int\sqrt{\frac{m}{2P_2}}\frac{dy}{\sqrt{1-\frac{m\omega_0^2}{2P_2}y^2}} \\ &= \mp\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2P_2}}y\right) \pm \frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2(P_1-P_2)}}x\right) \end{aligned}$$

Pour les anciennes coordonnées, la détermination de l'équation de $x$ en inversant celle de $Q_1$,

$$x = \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}}\sin\left(\pm(\omega_0 t + Q_1\omega_0)\right)$$

avec les conditions initiales, nous avons

$$\left.\begin{array}{lcl} x(0) = L & \Longrightarrow & \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}}\sin(\pm Q_1\omega_0) = L \\ \dot{x}(0) = 0 & \Longrightarrow & \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}}\cos(Q_1\omega_0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} Q_1\omega_0 & = & \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{\frac{2(P_1-P_2)}{m\omega_0^2}} & = & L \end{array}\right.$$

ce qui implique $x = L\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

Quant à l'ancienne coordonnée $y$, on remplace $x$ par son expression et on inverse $Q_2$

$$Q_2 = \mp\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2P_2}}y\right) \pm \left(t + \frac{\pi}{2\omega_0}\right)$$

ce qui implique

$$y = \mp\sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}}\sin\left[\omega_0\left(Q_2 \pm t \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right]$$

et avec les conditions initiales $y(0) = 0 \Longrightarrow \sin\left(\omega_0(Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right) \Longrightarrow Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0} = 0$ et

$$\dot{y}(0) = v \Longrightarrow \sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}}\omega_0\cos\left(\omega_0(Q_2 \pm \frac{\pi}{2\omega_0}\right) = v \Longrightarrow \sqrt{\frac{2P_2}{m\omega_0^2}} = v/\omega_0$$

ce qui donne comme solution

$$y = \frac{v}{\omega_0}\sin\omega_0 t.$$