**Université Ibn Tofail**
**Faculté des Sciences**
**Département de Physique**
**Kénitra**

# MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

(Version modifiée)

**(S6)**

**Auteur**
**Pr. A.MASLOUHI**

**Mars 2015**

# Sommaire

**Chapitre I : Introduction à la mécanique des milieux continus**

1- Objet de la mécanique des milieux continus
2- Hypothèses de continuité
3- Cinématique du milieu continu

**Chapitre II : Etude générale du vecteur contrainte et du tenseur de contrainte**

1- Introduction
2- Tenseur de contrainte
3- Equations générale de l'équilibre
4- Application à un fluide au repos
5- Propriétés locales du tenseur des contraintes
6- Directions principales contraintes normales principales
7- Représentation de Mohr

**Chapitre III : Etude des petites déformations et du tenseur du taux de déformation**

1- Le tenseur du gradient du vecteur déplacement
2- Le tenseur du taux de déformation
3- Définitions élémentaires du taux de déformation

**Chapitre IV : Les relations fondamentales de la dynamique (Les équations de conservation)**

1- Rappels mathématiques
2- La dérivée particulaire
3- Les équations de conservation

**Chapitre V : Application aux écoulements des fluides visqueux**

1- Equation de conservation de quantité de mouvement
2- Equation de conservation de l'énergie
3- Formulation mathématique des problèmes de mécanique des fluides
4- Quelques solutions analytiques des équations de Navier-Stokes

# REFERENCES

## PRINCIPAUX OUVRAGES EN RAPPORT AVEC LE COURS

### COURS


- **Introduction à la mécanique des milieux continus**
  **P.Germain P.Muller**
  **Edition : Masson**

- **Mécanique expérimentale des fluides expérimentales**
  **Auteurs : R. COMOLET et J.BONNIN**
  **Tome I**
  **Edition : Masson**

- **Mécanique des fluides**
  **Eléments d'un premier parcours**
  **Auteur : P. chassaing**
  **Edition : Polytech**


### EXERCICES


- **Exercices et problèmes de mécanique des milieux continus**
  **J.Obala**
  **Edition : Masson**

- **Mécanique expérimentale des fluides expérimentales**
  **Auteurs : R. COMOLET et J.BONNIN**
  **Tome III**
  **Edition : Masson**

- **Mécanique des Fluides**
  **Hubert Lumbroso**
  **Edition : Dunod**

# CHAPITRE I : INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

## 1- Objet de la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus est le domaine de la mécanique consacré aux mouvements des corps déformables : gaz, liquide ou solide, en utilisant les données et les méthodes de la mécanique rationnelle. La mécanique des milieux continus étudie les corps matériels qui remplissent l'espace de façon ininterrompue, continue, et dont les points changent de distance lors du mouvement. Les problèmes essentiels de la mécanique des milieux continus qui font l'objet d'études sont présentés de la manière suivante :

- action d'un fluide sur un corps en mouvement : avion, obus, navires, sous-marins, voitures, etc.…
- écoulement d'un fluide dans des tubes ou plus généralement dans divers mécanismes (pompes, turbines, turbomachines)
- écoulement d'un fluide dans un milieu poreux
- hydrostatique où équilibre des liquides et des corps flottant où immergés
- les mouvements des gaz lors d'une explosion où d'une combustion
- les mouvements turbulents des fluides
- l'étude des mouvements et de l'équilibre des corps solides déformables : la théorie de l'élasticité, fatigue des corps

## 2- Hypothèses de continuité

### a- continuité du milieu

Un milieu continu est un milieu dans lequel toutes les propriétés physiques varient d'une façon continue d'un point à un autre. Par exemple la masse m est une fonction continue des variables x, y, z, t, par tout sauf sur un nombre fini de surfaces ou de lignes (surfaces ou ligues singulière)

### b- Continuité des transformations

Il faut admettre que les fonctions qui composent les équations de mouvement d'un milieu continu, sont continues et dérivables par rapport à toutes les variables, en effet :

Deux points infiniment voisins à t =0 restent infiniment voisins à t =T
Deux points infiniment voisins à t =T proviennent de deux points infiniment voisins à t =0

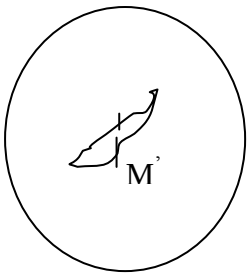
**Conséquence**

- un volume $V_{t=0}$ se transforme en un volume $V_T$
- une surface fermée $S_{t=0}$ se transforme en une surface fermée $S_T$
- une courbe fermée $C_{t=0}$ se transforme en une courbe fermée $C_T$
- La masse contenue à l'intérieur d'une surface matérielle fermée reste

### c- Phénomènes ne respectant pas la continuité

Formations des trous

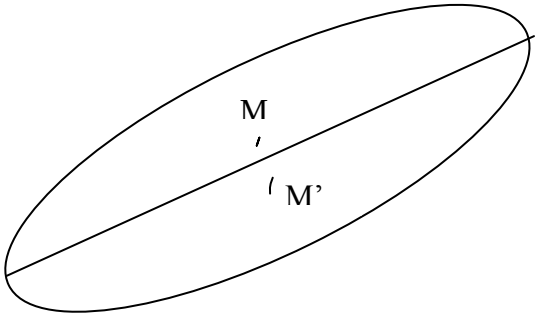
- Cavitation dans les liquides



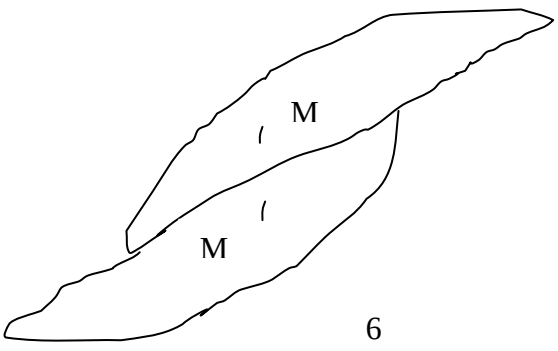
- Fissure dans les solides

**<u>Glissement relatif de deux parties du milieu</u>**

- Sillage dans les liquides




- Glissement ou failles dans les solides



Pour tous ces exemples, il y a une non continuité dans le milieu. M et M' ne sont pas voisins.

## 3- Cinématique du milieu continu

La cinématique du milieu continu à pour objet d'étudier le milieu en terme de déplacement vitesse et accélération et ceci sans faire intervenir les forces qui entrent en jeu.
Pour effectuer cette étude, il est nécessaire de définir la portion du milieu continu dont on étudie le mouvement et le repère de position choisi

### 3.1- Description du mouvement

Pour décrire le mouvement d'une particule du milieu continu, on s'intéressera aux différentes fonctions suivantes :

***Fonctions vectorielles***

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\vec{x}$ | | | Trajectoire de la particule |
| $\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ | Où | $u_i = \frac{dx_i}{dt}$ | Vitesse |
| $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt}$ | Où | $\gamma_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}$ | Accélération |

***Fonctions scalaires***

| | |
|---|---|
| P | Pression |
| ρ | Masse volumique |
| T | Température |

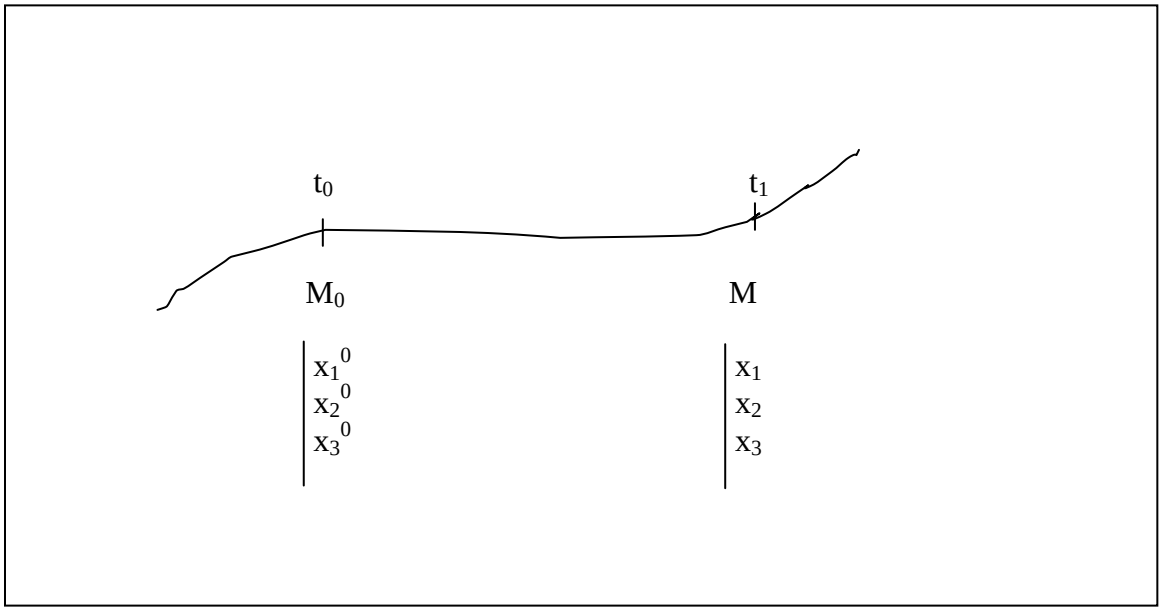
Etc..

Il existe deux méthodes de description du mouvement :

- méthode de Lagrange
- méthode d'Euler

**a- <u>Méthode de Lagrange</u>**

Soit une particule occupant la position $M_0 (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ à l'instant $t_0$ et la position $M(x_1, x_2, x_3)$ à l'instant t




Le mouvement de la particule au point M sera connu si :

$x_1 = x_1 (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$
$x_2 = x_2 (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$
$x_3 = x_3 (x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$

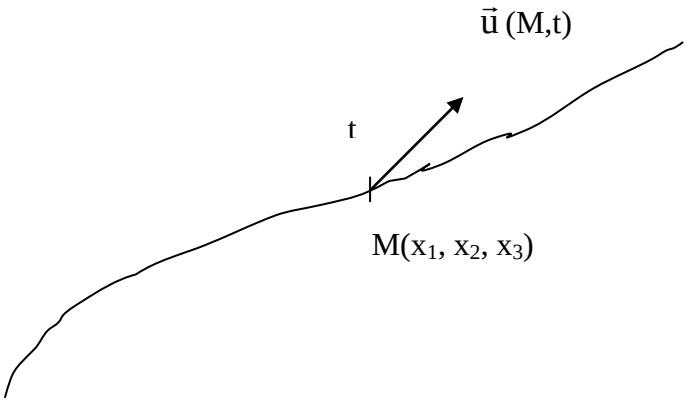
***$(x_1^0, x_2^0, x_3^0, t)$ sont appelées variables de Lagrange***

La méthode de Lagrange consiste à individualiser une particule du milieu continu et de la suivre dans son mouvement. Les coordonnées de la particule en un point sont exprimées en fonction de la position initiale et du temps. (On s'intéresse à l'histoire d'une particule matérielle déterminée)

**<u>b- Méthode d'Euler</u>**

Soit un point M fixe de l'espace de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$
À l'instant $t_0$ , il y a en M une particule de vitesse $\vec{U}_0$
À l'instant t , il y a en M une autre particule de vitesse $\vec{U}$ ( $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$ , $u_2(x_1, x_2, x_3, t)$ , $u_3(x_1, x_2, x_3, t)$ )

$u_i = u_i (x_i, t)$




Dans la description eulérienne, la description cinématique du mouvement se fait à partir de l'analyse des vitesses des particules en un point fixe. ($x_1$,$x_2$,$x_3$,t) sont appelés variables d'Euler. En effet, la méthode d'Euler consiste à considérer un point fixe de l'espace et à étudier en fonction du temps, les caractéristiques des autres particules en ce point. (On s'intéresse en un point de l'espace à l'évolution des caractéristiques du milieu)

**c- Trajectoire et ligne de courant**

**Trajectoire**

***On appelle trajectoire d'une particule, la ligne géométrique de positions qu'elle occupe au cours du temps.***

La trajectoire est calculée à partir du champ de vitesse :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad ; \quad u_i = \frac{dx_i}{dt}$$

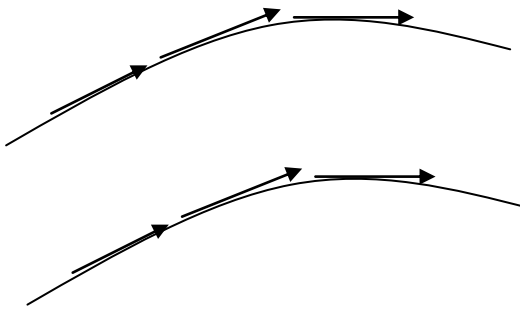
Avec $u_1 = \frac{dx_1}{dt}$ ; $u_2 = \frac{dx_2}{dt}$ ; $u_3 = \frac{dx_3}{dt}$

D'où l'équation de la trajectoire

$$\frac{dx_1}{u_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{u_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{u_3(x_1, x_2, x_3, t)} = dt$$

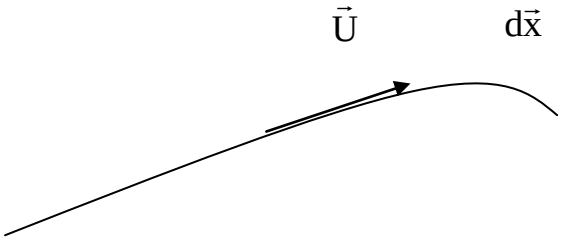
**Ligne de courant** (visualisation du champ de vitesse)

***On appelle ligne de courant à l'instant $t_0$, toute courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse des particules.***



$t_0$ = cte

L'équation de la ligne de courant est obtenue à partir de la définition




$$\vec{u} \wedge d\vec{x} = 0 \qquad \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{matrix}$$

$u_2\, dx_3 - u_3\, dx_2 = 0$
$u_1\, dx_3 - u_3\, dx_1 = 0$
$u_1\, dx_2 - u_2\, dx_1 = 0$

D'où le système différentiel

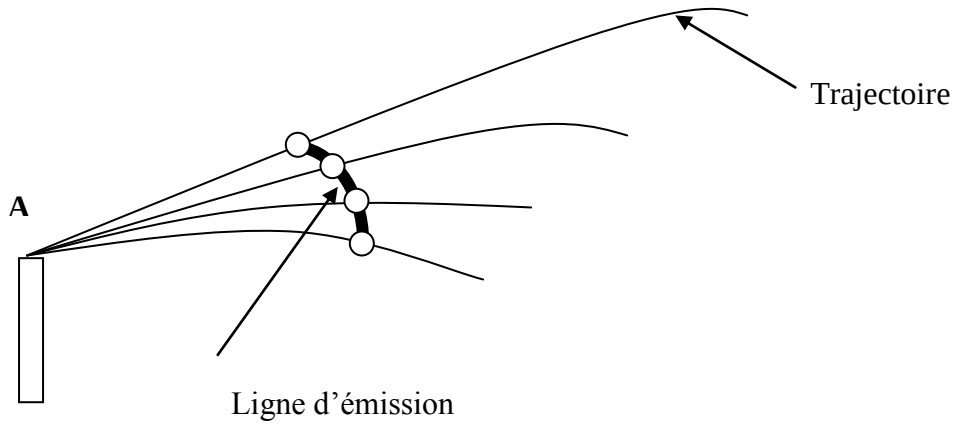
$$\frac{dx_1}{u_1(x_1,x_2,x_3,t_0)} = \frac{dx_2}{u_2(x_1,x_2,x_3,t_0)} = \frac{dx_3}{u_3(x_1,x_2,x_3,t_0)}$$

**Remarque**

Dans le cas d'un mouvement permanent ou stationnaire (c'est à dire que la vitesse de la particule en un point de l'espace est constante en fonction du temps). Il y a coïncidence entre la trajectoire et la ligne de courant.

**Ligne d'émission**

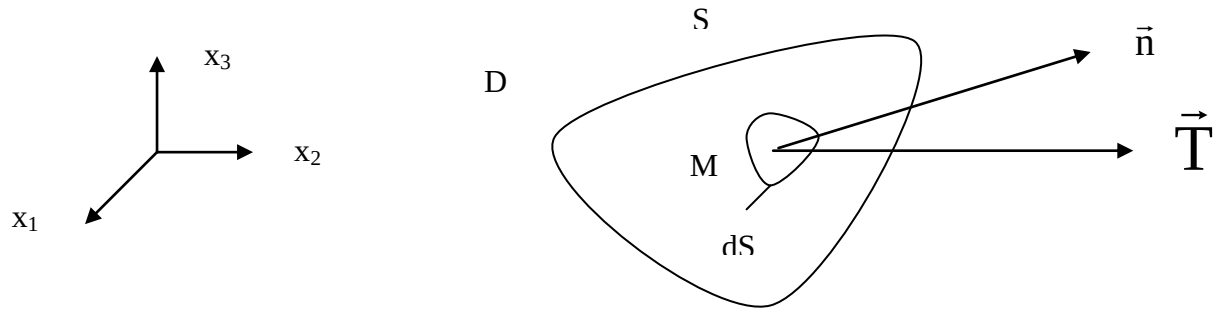
***C'est la ligne géométrique correspondant à l'ensemble des particules qui sont passées à l'instant t par le même point fixe A***



## CHAPITRE II- ETUDE GENERALE DU VECTEUR CONTRAINTE ET DU TENSEUR DE CONTRAINTE

### 1 INTRODUCTION

Soit un corps naturel continu, parvenu à un état d'équilibre, après des déformations, sous l'action des forces qui lui sont appliqués. Le corps est supposé limité par une surface extérieure connue S.




Les forces agissant en chaque point M du corps sont de deux sortes :

- les forces intérieures
- les forces extérieures

Les forces intérieures d'origines moléculaires s'opposent deux à deux et par conséquent s'annulent.
Les forces extérieures agissant sur le corps peuvent être de deux sortes :

**Les forces de volume ou force à distance**

Elles proviennent de l'action sur D de tout ce qui est extérieure au corps pris dans son ensemble. Ces forces qui se réduisent en général aux forces de pesanteur sont proportionnelles au volume de l'élément sur lequel elle agissent;; s'écrivent :

$\vec{f}dv = (f_{X_1}\vec{i} + f_{X_2}\vec{j} + f_{X_3}\vec{k})dv$ Dans (o, $x_1$ , $x_2$ ,$x_3$ )

$f_{x1}$ , $f_{x2}$ , $f_{x3}$ sont les composantes des forces volumiques suivant les trois directions

**Les forces de surface ou force de contact**

Ce sont des forces appliquées aux éléments de surface du corps. Ainsi autour d'un point M de la surface du corps, la force appliquée à l'élément de surface dS sera proportionnelle à dS et pourra être représentée par :

$\vec{T}dS = (T_{x_1}\vec{i} + T_{x_2}\vec{j} + T_{x_3}\vec{k})dS$

$\vec{T}$ dépend de la position du point M de la surface et de l'orientation de dS autour de M

$\vec{T}$ peut être décomposé en $\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t = T_n\vec{n} + T_t\vec{t}$

$\vec{T}_n$ : Composante normale à dS, appelée contrainte normale, tension, ou compression

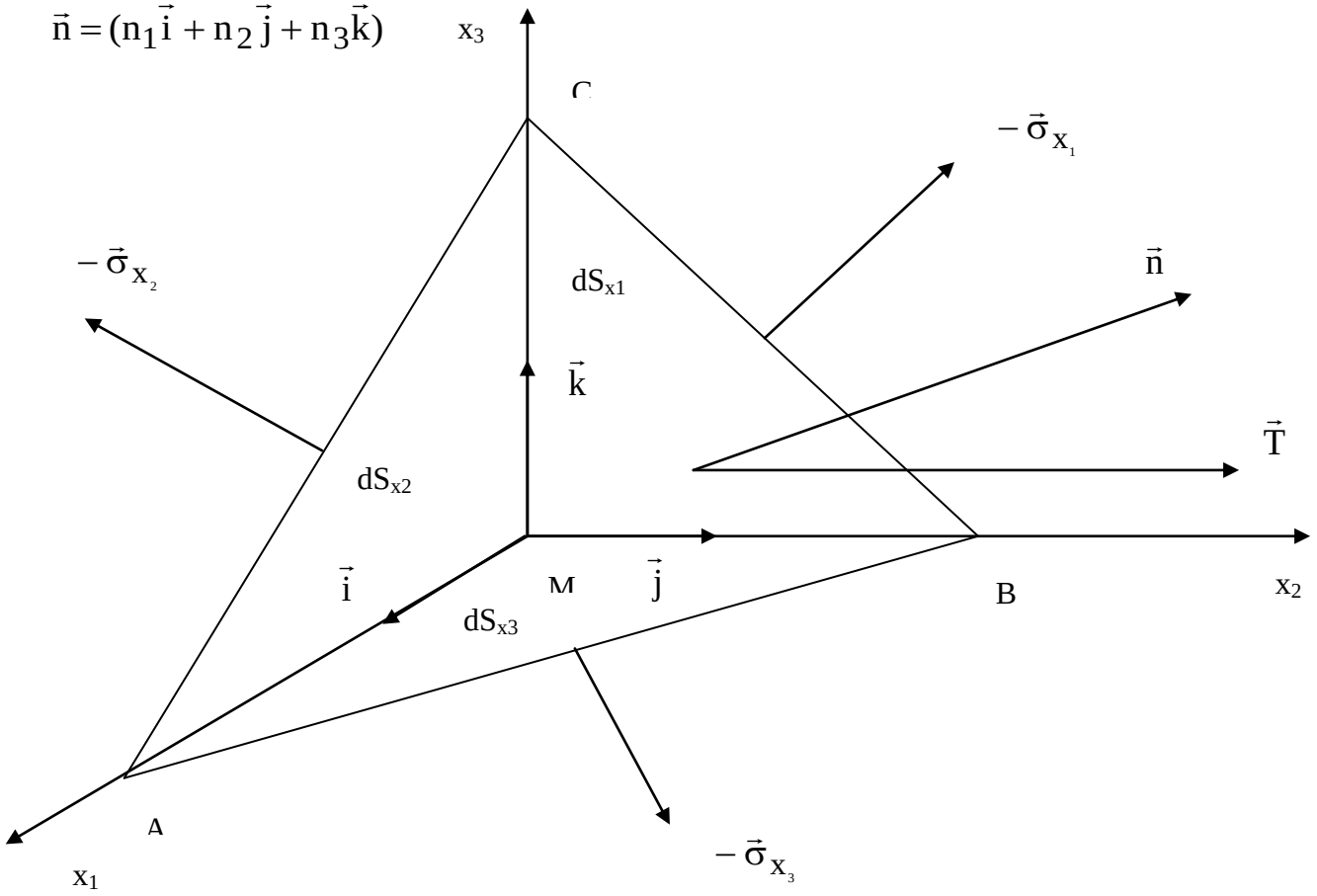
$\vec{T}_t$ : Composante parallèle à dS, appelée contrainte tangentielle, contrainte de glissement, ou contrainte de cisaillement

## 2. TENSEUR DE CONTRAINTE

Nous allons montrer que le vecteur $\vec{T}$ pourra s'exprimer en fonction des contraintes s'exerçant respectivement sur trois éléments de surfaces triangulaires passant par un point M ($x_1$ , $x_2$ ,$x_3$ )

Considérons pour cela un tétraèdre infiniment petit MABC, les points A, B, C étant choisis respectivement sur les axes $M_{x1}$ , $M_{x2}$ , $M_{x3}$

Désignons par $\vec{T}$ la contrainte exercée par le milieu extérieur sur la face ABC du tétraèdre, dS est l'aire de cette face



$\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à cette face dirigée de l'intérieur vers l'extérieur.

Désignons aussi par

$\vec{\sigma}_{X_1}$ la contrainte exercée par le corps continu sur MBC du côté > 0

$\vec{\sigma}_{X_2}$ la contrainte exercée par le corps continu sur MAC du côté > 0

$\vec{\sigma}_{X_3}$ la contrainte exercée par le corps continu sur MAB du côté > 0

<u>Convention de signe</u>

$\vec{\sigma}_X$ :

- dans le cas où $\vec{\sigma}_X$ s'exerce du côté des $x > 0$ ($+\vec{\sigma}$ : appelée compression)
- dans le cas où $\vec{\sigma}_X$ s'exerce du côté des $x < 0$ ($-\vec{\sigma}$ : appelée traction)

Si on prend la résultante des contraintes exercée par le milieu extérieur sur le tétraèdre, on obtient :

$$\vec{T}dS - \vec{\sigma}_{X_1} dS_{X_1} - \vec{\sigma}_{X_2} dS_{X_2} - \vec{\sigma}_{X_3} dS_{X_3} = 0$$

Avec $dS_{x1} = n_{x1}\, dS$
$dS_{x2} = n_{x2}\, dS$
$dS_{x3} = n_{x3}\, dS$

( $n_{x1}$ , $n_{x2}$ , $n_{x3}$ ) sont les cosinus directeurs des angles formés par $\vec{n}$ et les axes ( $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ )

Soit $$\vec{T} - \vec{\sigma}_{X_1} n_{X_1} - \vec{\sigma}_{X_2} n_{X_2} - \vec{\sigma}_{X_3} n_{X_3} = 0$$

Ceci peut s'écrire dans la notation indicielle $$T_i - \sigma_i n_i = 0$$

**<u>Rappel</u>**

La notation indicielle est une convention, elle permet d'universaliser l'écriture des équations, de simplifier et faciliter les calculs.

-- L'indice muet : c'est lorsque l'indice est répété deux fois dans un monôme, ce monôme en fait est remplacé par la somme de tous les termes en donnant à l'indice les valeurs 1, 2, 3

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = A_j B_j = A_k B_k$$

-- L'indice franc : c'est lorsque l'indice ne peut apparaître qu'une seule fois dans le monôme

$$A_i = B_{ij} C_j \qquad A_1 = A_{11} C_1 + A_{12} C_2 + A_{13} C_3$$
$$A_2 = A_{21} C_1 + A_{22} C_2 + A_{23} C_3$$
$$A_3 = A_{31} C_1 + A_{32} C_2 + A_{33} C_3$$

On peut vérifier que cette relation est vraie quelque soit la position du tétraèdre par rapport aux coordonnée ( $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ ).

Alors
$$\vec{T} = \vec{\sigma}_{x_1} n_{x_1} + \vec{\sigma}_{x_2} n_{x_2} + \vec{\sigma}_{x_3} n_{x_3}$$
$$= (\sigma_{x_1 x_1} \vec{i} + \sigma_{x_2 x_1} \vec{j} + \sigma_{x_3 x_1} \vec{k}) n_{x_1} + (\sigma_{x_1 x_2} \vec{i} + \sigma_{x_2 x_2} \vec{j} + \sigma_{x_3 x_2} \vec{k}) n_{x_2}$$
$$+ (\sigma_{x_1 x_3} \vec{i} + \sigma_{x_2 x_3} \vec{j} + \sigma_{x_3 x_3} \vec{k}) n_{x_3}$$

D'où les composantes de $\vec{T}$ suivant $(M, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$T_{x_1} = \sigma_{x_1 x_1} n_{x_1} + \sigma_{x_1 x_2} n_{x_2} + \sigma_{x_1 x_3} n_{x_3} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$
$$T_{x_2} = \sigma_{x_2 x_1} n_{x_1} + \sigma_{x_2 x_2} n_{x_2} + \sigma_{x_2 x_3} n_{x_3} = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$
$$T_{x_3} = \sigma_{x_3 x_1} n_{x_1} + \sigma_{x_3 x_2} n_{x_2} + \sigma_{x_3 x_3} n_{x_3} = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

Ou sous la forme

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \qquad (i, j) = 1, 2, 3$$

La composante $\sigma_{ij}$ du tenseur de contrainte est représentée par :

i : le numéro de l'axe ou la direction du vecteur
j : le numéro de l'élément de surface considéré

Les composantes $\vec{T}$ sont des fonctions linéaires des composantes $\sigma_{ij}$.

**Propriétés du tenseur** $\sigma_{ij}$

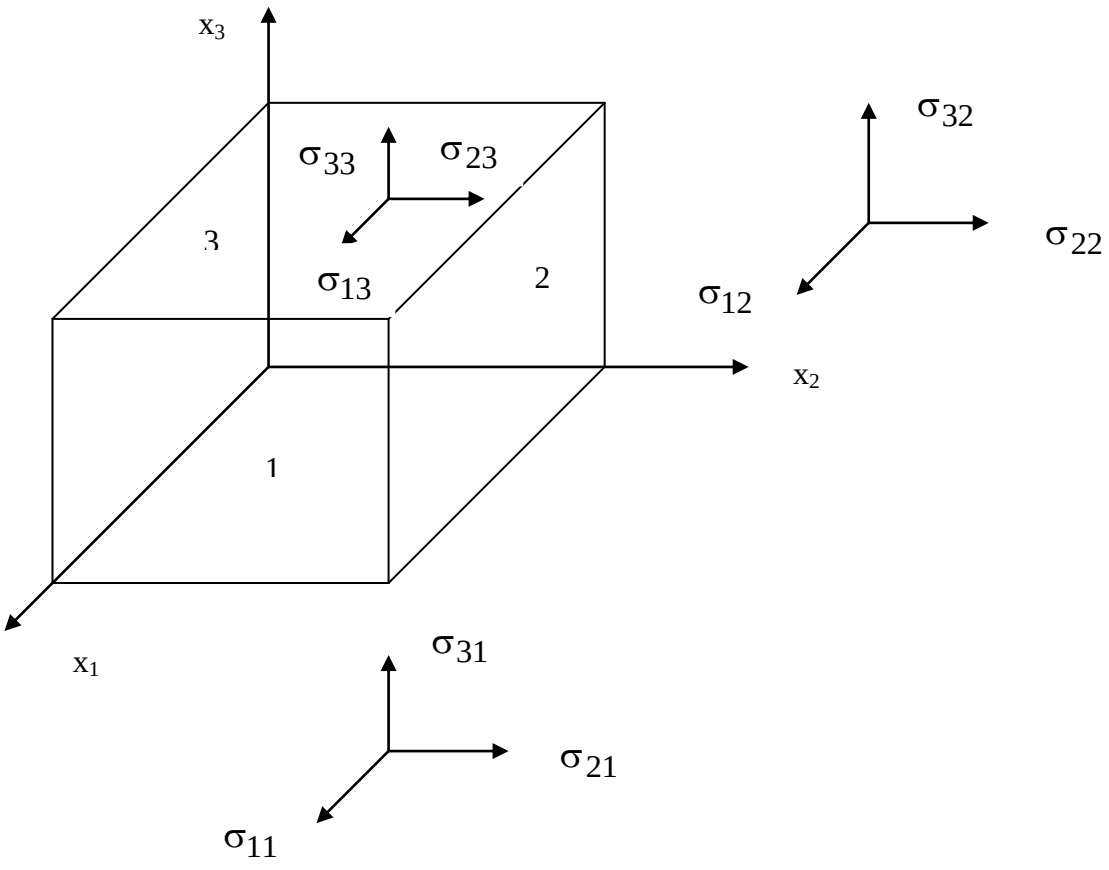
- Les composantes $\vec{T}$ sont des fonctions linéaires des composantes $\sigma_{ij}$.
- $$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

ce qui conduit à un tenseur de contrainte symétrique

$$\left|\sigma_{ij}\right| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12}=\sigma_{21} & \sigma_{13}=\sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

- Les composantes de même indices : $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ sont les contraintes normales
- Les composantes d indices différents : $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{32}$ sont les contraintes tangentielles.

Ces différentes composantes peuvent être représentées de la manière suivante



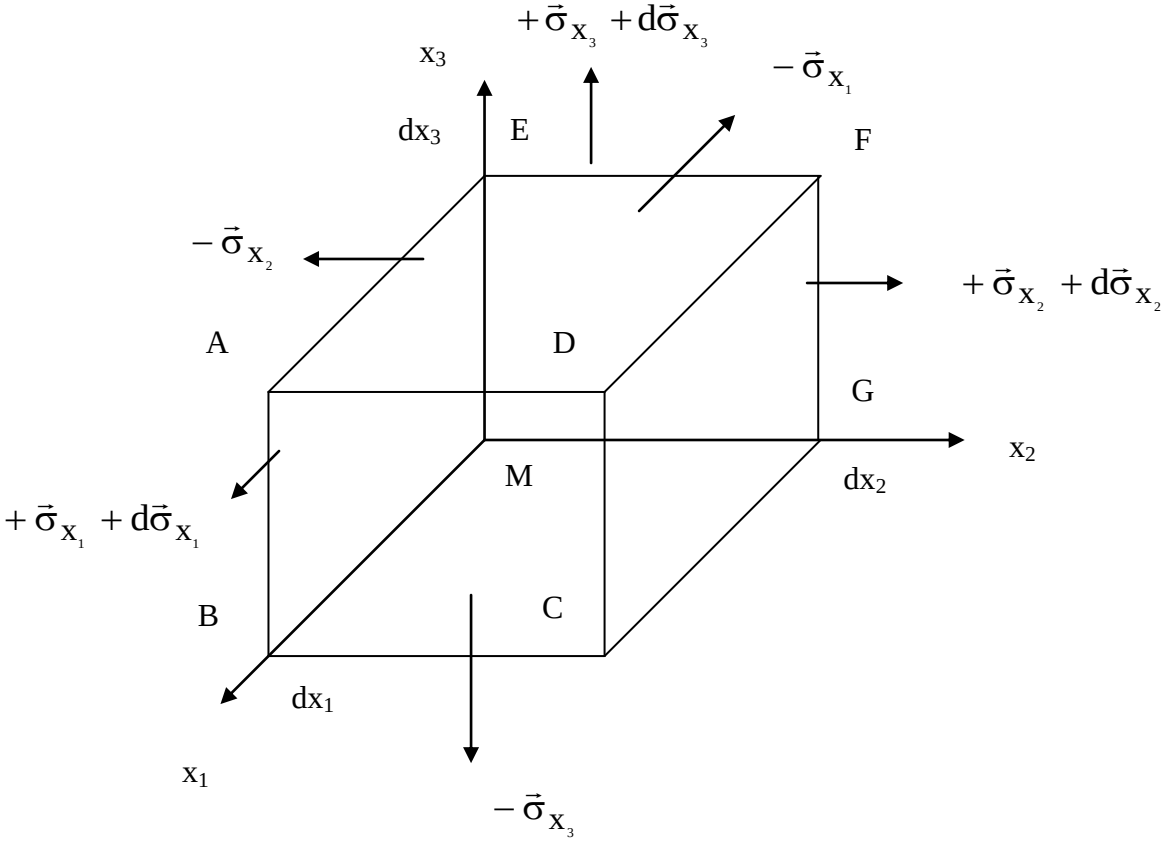
## 3. EQUATIONS GENERALE DE l'EQUILIBRE

### i- Conditions d'équilibre

Un corps est dit en équilibre lorsque l'ensemble des forces appliquées à la surface équilibre l'ensemble des forces massiques appliquées à ses éléments de volume.

### ii- Equations d'équilibre

Considérons un parallélépipède infiniment petit de la figure ci- contre




Les forces s'exerçant sur cet élément de volume sont :

- les forces massiques agissant sur l'élément de volume ($dx_1dx_2dx_3$) et dont les composantes sont : ($f_{x1}$ ($dx_1dx_2dx_3$), $f_{x2}$ ($dx_1dx_2dx_3$), $f_{x3}$ ($dx_1dx_2dx_3$))

- les forces surfaciques ou contraintes (tractions) peuvent déterminés de la façon suivante :

Sur la face MGEF normale à $\vec{M}_{x_1}$, agit la contrainte $-\vec{\sigma}_{x_1} dx_2 dx_3$ et à pour composantes respectives

$$-\vec{\sigma}_{x_1} dx_2 dx_3 = \begin{vmatrix} -\sigma_{x_1 x_1} dx_2 dx_3 \\ -\sigma_{x_2 x_1} dx_2 dx_3 \\ -\sigma_{x_3 x_1} dx_2 dx_3 \end{vmatrix}$$

Sur la face parallèle ABCD agit la contrainte

$$+(\vec{\sigma}_{x_1} + \frac{\partial \vec{\sigma}_{x_1}}{\partial x_1}) dx_2 dx_3 = \begin{vmatrix} (\sigma_{x_1 x_1} + \frac{\partial \sigma_{x_1 x_1}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 \\ (\sigma_{x_2 x_1} + \frac{\partial \sigma_{x_2 x_1}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 \\ (\sigma_{x_3 x_1} + \frac{\partial \sigma_{x_3 x_1}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3 \end{vmatrix}$$

En faisant le bilan des forces surfaciques sur les deux faces parallèles, on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_{x_1 x_1}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \\ \frac{\partial \sigma_{x_2 x_1}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \\ \frac{\partial \sigma_{x_3 x_1}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 \end{vmatrix}$$

Pour les autres forces traversés par $\overrightarrow{M_{x2}}$ *et* $\overrightarrow{M_{x3}}$ , on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma x_1 x_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ \frac{\partial \sigma x_2 x_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ \frac{\partial \sigma x_3 x_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma x_1 x_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \\ \frac{\partial \sigma x_2 x_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \\ \frac{\partial \sigma x_3 x_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 \end{vmatrix}$$

En faisant le bilan de toutes les forces à l'équilibre

$$\sum \vec{f}_{surfaces} + \sum \vec{f}_{volumes} = \vec{0}$$

en remplaçant $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ par 1,2,3

On obtient ainsi les équations de l'équilibre d'un milieu continu

$$\overrightarrow{M_{x1}} \qquad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = 0$$

$$\overrightarrow{M_{x2}} \qquad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = 0$$

$$\overrightarrow{M_{x3}} \qquad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = 0$$

## iii)-Application à un fluide au repos

### a)-les équations de la statique des fluides

Pour un fluide au repos. Seules les forces de pression qui interviennent.

Avec $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij}$

$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -P \qquad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$

et $\vec{F}_V$ = force de pesanteur par rapport à l'unité de masse

$$F_{v_i} = \vec{F}_v = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

D'où $o\vec{x}_1$ : $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$

$o\vec{x}_2$ : $\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$

$o\vec{x}_3$ : $\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \rho g = 0$

Suivant les 3 axes $o\vec{x}_1$ : $\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$

$o\vec{x}_2$ : $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$ **Equation de la statique des fluides**

$o\vec{x}_3$ : $-\frac{\partial P}{\partial x_3} - \rho g = 0 \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho g$

**b- <u>Cas de l'equilibre d'un fluide incompressible dans un champ de pesanteur (</u>** $\rho = \text{cte}$)

$o\vec{x}_3 = -o\vec{h}$

$\frac{\partial P}{\partial h} = \rho g \Longrightarrow P(h) = \rho g h + cte$

si h =0 Cte = $P_{Atm}$

$\Longrightarrow P = \rho g h + P_{Atm}$ Équation de l'hydrostatique

En posant $\gamma = \rho g$ poids volumique

$$\boxed{\Delta P = P - P_{Atm} = \gamma h}$$

**b)- <u>Fluide compressible en équilibre dans un champ de pesanteur,</u>** $\rho = f(x, y, z)$

Nous avons toujours : $\frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$

$\rho$ est déterminée à partir de l'équation d'état du fluide considéré

Cas d'un gaz parfait à T = cte

Un gaz parfait PV = nRT $\Longrightarrow P\frac{m}{\rho} = nRT$

$$\rho = \frac{Pm}{nRT} = \frac{PM}{RT}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{PM}{RT} g$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{\partial P}{P} = -\int_{z_0}^{z} \frac{Mg}{RT} \partial z$$

$$\log \frac{P}{P_0} = -\frac{Mg}{RT} (z - z_0)$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}$$

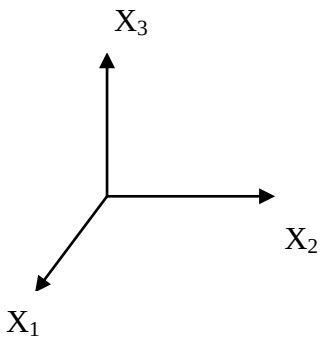
$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}, \qquad \textbf{Loi d'évolution de la pression}$$

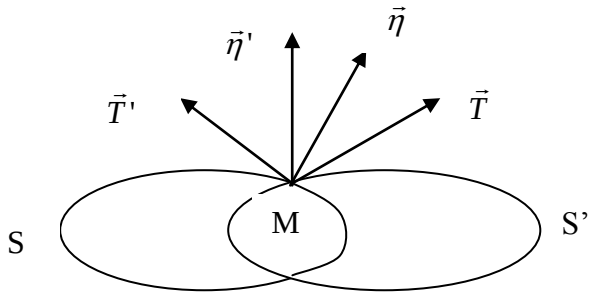
On peut aussi déterminer la loi d'évolution de la masse volumique

$$\rho = \frac{P_0 M}{RT} e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}$$

## 4. PROPRIETES LOCALES DU TENSEUR DES CONTRAINTES

Principe de réciprocité ou principe de Cauchy




Soit le vecteur contrainte $\overrightarrow{T}$ de composantes $T_i$ s'exerçant au point M d'un élément de surface dont la normale a pour cosinus directeurs $\eta_i$. La projection de

la contrainte $\overrightarrow{T}$ sur une direction quelconque $\vec{\eta}'$ de cosinus directeurs $\eta'_i$ aura pour expression :

$$\vec{T}\ \vec{\eta}\ '\ =\ T_i\ n'_i = T_1\ n'_1 + T_2\ n'_2\ + T_3\ n'_3$$

et comme $$T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$

$$T_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$

$$T_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

$$\Longrightarrow \quad T_i n'_i = \sigma_{11} n_1 n'_1 + \sigma_{12} n_2 n'_1 + \sigma_{13} n_3 n'_1 + \sigma_{21} n_1 n'_2 + \sigma_{22} n_2 n'_2 + \sigma_{23} n_3 n'_2$$

$$+ \sigma_{31} n_1 n'_3 + \sigma_{32} n_2 n'_3 + \sigma_{33} n_3 n'_3$$

$$T_i n'_i = \sigma_{11} n_1 n'_1 + \sigma_{22} n_2 n'_2 + \sigma_{33} n_3 n'_3 + \sigma_{12}\ (n_2 n'_1 + n_1 n'_2) + \sigma_{13}(n_3 n'_1 + n_1 n'_3)$$

$$+ \sigma_{23}(n_3 n'_2 + n_2 n'_3)$$

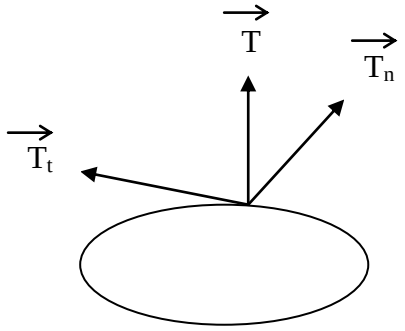
On retrouve la même expression pour la quantité $T'_i n_i$ . C'est le principe de réciprocité ou **principe de Cauchy** qui s'énonce de la manière suivante :

***Si l'on considère deux plans, la projection du vecteur contrainte relatif à l'un deux sur la normale du second ne change pas quand on permute les deux plans, c'est à dire :***

$$\vec{T}\vec{n}' = \vec{T}'\vec{n} \qquad \text{ou} \qquad T_i n'_i = T' n_i$$

**Contrainte normale**

La contrainte normale est donné par la projection de $\vec{T}$ sur la normale $\vec{n}$ :




$$T_n = \vec{T}\vec{n}$$

et si on veut déterminer $T_n$ par rapport aux composantes du tenseur de contraintes, il suffit de faire $\vec{n} = \vec{n}'$ dans la relation précédentes (1)

$$T_n = \vec{T}\vec{n} = T_i n_i = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\,\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\,\sigma_{13} n_1 n_3 + 2\,\sigma_{23} n_2 n_3$$

**Contrainte tangentielle**

Elle appartient au plan normal à $\vec{n}$ qui contient l'aire sur le quelle s'exerce la contrainte $\vec{T}$

$$\vec{T}_t = \vec{T} - \vec{T}_n = \vec{T} - T_n \vec{n}$$

En module

$$T_t^2 = T^2 - T_n^2 \qquad \text{comme} \qquad T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$$

$$T_t^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_n^2$$

## 5. DIRECTIONS PRINCIPALES CONTRAINTES NORMALES PRINCIPALES

On appelle directions principales du tenseur des contraintes les directions $\overrightarrow{X'}$, telles que $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{X'}$ soient **colinéaires**.
Autrement dit, une direction est principale si, et seulement si pour cette direction, la contrainte tangentielle est nulle.
Ceci a pour conséquence, qu'il existe au moins un repère orthonormé, dit **principal** du tenseur des contraintes dans lequel la matrice représentant ce tenseur est diagonale.

a) **si le repère R est principal, la matrice $|\sigma'_{ij}|$ est de la forme** :

$$|\sigma'_{ij}| = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Les 3 scalaires $\sigma_1$ , $\sigma_2$ , $\sigma_3$ sont appelés contraintes normales principales ou valeurs propres du tenseur des contraintes

- **si** $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ les directions principales sont les axes du repère principal R

- **si** $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ les directions principales sont l'axe $ox_3$ et toute direction issue de O normale à $ox_3$, le tenseur est dit de révolution

- **si** $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ toute direction issue de O est principale, le tenseur est dit ophique.

**b) si le repère R n'est pas principal**

* les contraintes principales $\sigma_1$ , $\sigma_2$ , $\sigma_3$ (ou valeurs propres) sont calculées à partir du système.

$$\det\left(\left|\sigma_{ij}\right| - \sigma I_E\right) = 0$$

Ou en notation indicielle $\det\left(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}\right) = 0$

$$\left|\sigma_{ij}\right| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{pmatrix} = 0$$

On obtient un polynôme en $\sigma^3$

$$\sigma^3 - \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\sigma^2 + \left(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)\right)\sigma$$
$$+ \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{32}^2 - \sigma_{12}^2\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{22}\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{22}^2\sigma_{31} = 0$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma^3 - I\,\sigma^2 + II\,\sigma + III = 0$$

Avec $I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + III = 0$

$$II = \sigma_{11}\,\sigma_{22} + \sigma_{22}\,\sigma_{33} + \sigma_{33}\,\sigma_{11} - \left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\,\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\,\sigma_{ij}\right)$$

$$III = \det\left|\sigma_{ij}\right| = \det\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

I , II , III sont appelés : invariants élémentaires attaché au tenseur $\sigma_{ij}$

*** Les axes principaux des contraintes principales sont donnés par les vecteurs propres.**

En effet, soit $\overrightarrow{T}$ le vecteur contrainte colinéaire à $\overrightarrow{X'}$.
$\overrightarrow{X'}$ Vecteur propre, si $\exists\ \sigma$ (valeur propre) $\in$ R, tel que

$$\boxed{\sigma_{ij}\,x'_j = \sigma\,x'_i}$$

Ce système admet pour chaque valeur $\sigma_i$ une direction principale $x'_i$

Par la suite, les composantes de la contrainte $\overrightarrow{T}$ , dont la normale $n'_i$ à pour cosinus directeurs $n'_1$, $n'_2$, $n'_3$ seront donnée par la relation (dans le repère principal) :

$$T_1 = \sigma_1 n'_1 \qquad T_2 = \sigma_2 n'_2 \qquad T_3 = \sigma_3 n'_3$$

avec $n'^2_1 + n'^2_2 + n'^2_3 = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_1^2}{\sigma_1^2} = n'^2_1 \qquad \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} = n'^2_2 \qquad \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = n'^2_3$$

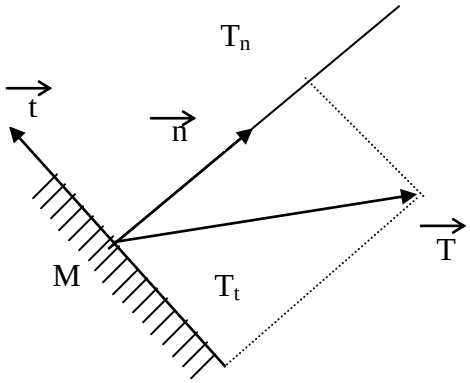
$$\Rightarrow \quad \frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

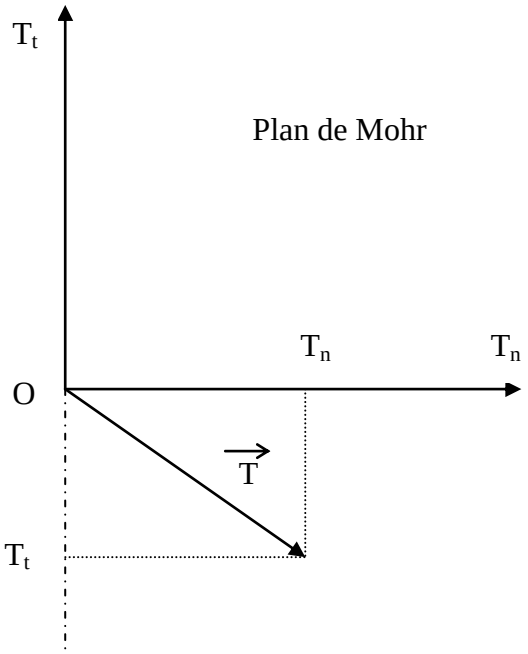
Ellipsoïde des contraintes

## 6. REPRESENTATION DE MOHR

### i- Principe de la représentation de Mohr

Le principe de représentation de Mohr est basé fondamentalement sur le vecteur contrainte $\vec{T}$ . Il consiste à représenter $\vec{T}$ dans un plan ($T_n$ , $T_t$ ) (appelé plan de Mohr ). lié à la facette que nous étudierons.




On oriente le plan $\left(\vec{n}\ ,\ \vec{t}\right)$ , tel que :

$\left(\vec{n}\ ,\ \vec{t}\right) = +\ \frac{\pi}{2}$

Connaissant le tenseur de contrainte $\sigma_{ij}$ , on se propose de déterminer le domaine engendré par l'extrémité du vecteur contrainte dans la plan de Mohr lorsque $\vec{n}$ subit une rotation.

Cherchons dans le repère principale, les composantes $n_i$ du vecteur normal $\vec{n}$ tel que ($\sigma_1$ , $\sigma_2$ , $\sigma_3$ ) et $\left(\overrightarrow{x'_1}\ ,\ \overrightarrow{x'_2}\ ,\ \overrightarrow{x'_3}\right)$ soient les contraintes et directions principales.

Si $\quad \overrightarrow{T} = n_i\ \sigma_i\ \overrightarrow{x'_i}$

$$\overrightarrow{T} = n_1\ \sigma_1\ \vec{x}'_1 + n_2\ \sigma_2\ \vec{x}'_2 + n_3\ \sigma_3\ \vec{x}'_3$$

$$T^2 = T_n^2 + T_t^2 = n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2 + n_3^2\sigma_3^2$$

Aussi on a $\quad T_n = \vec{T}\,\vec{n} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$

Avec $\quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \qquad \|\vec{n}\| = 1$

On obtient le système d'équation suivant

$$T_n^2 + T_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$
$$T_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$
$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

Ceci peut se mettre aussi sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_1 & \sigma_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_n^2 + T_t^2 \\ T_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système linéaire non homogène est donné par :

$$n_1^2 = \frac{\det \begin{vmatrix} T_n^2 + T_t^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ T_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ T_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \qquad n_2^1 = \cdots\cdots\cdots \quad , \quad n_3^1 = \cdots\cdots\cdots$$

$$n_1^2 = \frac{\left(T_n^2 + T_t^2\right)\left(\sigma_2 - \sigma_3\right) - \sigma_2^2\left(T_n - \sigma_3\right) + \sigma_3^2\left(T_n - \sigma_2\right)}{\sigma_1^2\left(\sigma_2 - \sigma_3\right) - \sigma_2^2\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) + \sigma_3^2\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)}$$

$$= \frac{T_t^2 + \left(T_n - \sigma_2\right)\left(T_n - \sigma_3\right)}{\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)}$$

Les expressions analogues pour $n_2^2$ et $n_3^2$ s'obtiennent en effectuant des permutations circulaires sur 1, 2, 3

$$n_2^2 = \frac{T_t^2 + \left(T_n - \sigma_3\right)\left(T_n - \sigma_1\right)}{\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\left(\sigma_2 - \sigma_1\right)}$$

$$n_3^2 = \frac{T_t^2 + \left(T_n - \sigma_1\right)\left(T_n - \sigma_2\right)}{\left(\sigma_3 - \sigma_1\right)\left(\sigma_3 - \sigma_2\right)}$$

Les 3 équations permettent de délimiter le domaine parcouru par le vecteur contrainte.

Pour faciliter le raisonnement supposons que : $n_1^2$ , $n_2^2$ , $n_3^2$ sont $\geq 0$ et $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
La positivité de $n_1^2, n_2^2, n_3^2$ fournit les inégalités suivantes

$(1)$ $\quad T_t^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) \geq 0$

$(2)$ $\quad T_t^2 + (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) \leq 0$

$(3)$ $\quad T_t^2 + (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) \geq 0$

Ces relations peuvent se mettrent aussi sous la forme :

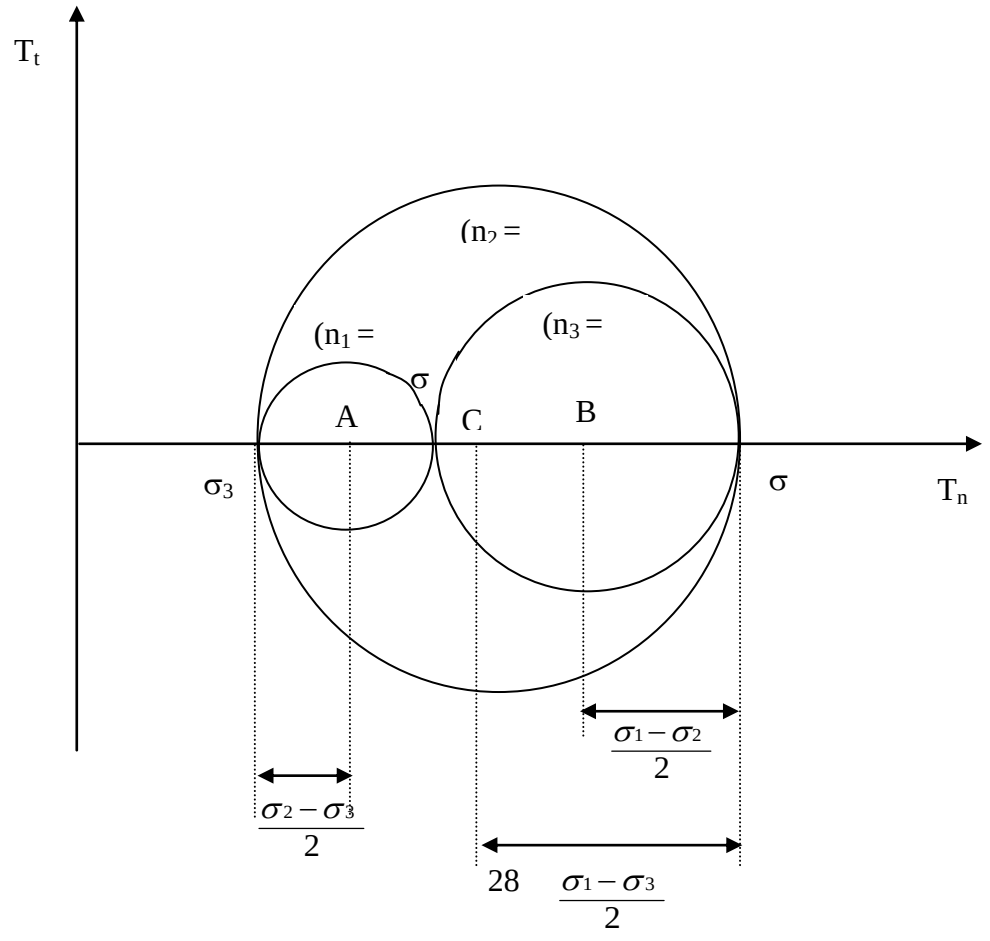
$$T_t^2 + \left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$T_t^2 + \left(T_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2$$

* Cette inégalité montre que T est dans le plan de Mohr, extérieur au cercle centré au point d'abscisse $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)$

* L'équation (2) montre que T est intérieur au cercle centré au point $\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)$

* L'équation (3) conduit à un résultat analogue à (1) mais cette fois-ci avec $(\sigma_1, \sigma_2)$



Ces résultats montrent que pour l'orientation de la facette considéré, l'extrémité du vecteur contrainte se trouve à l'extérieur des 2 plus petits cercles (diamètre $\sigma_1\sigma_2$ *et* $\sigma_2\sigma_3$ ) et à l'intérieur du cercle de grand diamètre (diamètre $\sigma_1\sigma_3$), les frontière de ces cercle sont respectivement atteintes pour $n_1 = 0$ , $n_2 = 0$ , $n_3 = 0$ , les 3 cercle sont appelées cercles principaux ou cercle de Mohr.

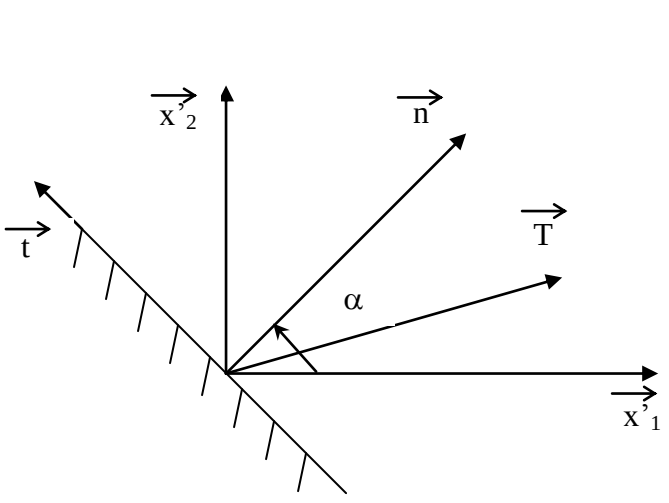
## ii. Etat de contrainte plane

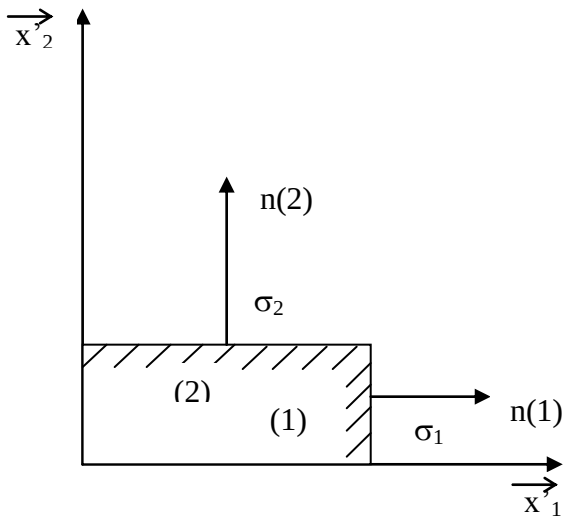
Le tenseur $\sigma_{ij}$ est dit plan lorsqu'il existe un repère orthonormé $(o, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$, dans lequel la matrice $|\sigma_{ij}|$ s'écrit :

$$|\sigma_{ij}| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{11} & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{càd que} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

*i)* ***Effectuons la représentation de Mohr lorsque*** $\vec{n}$ ***est repéré par un repère principal*** $(o, \vec{x'_1}, \vec{x'_2}, \vec{x'_3})$

Soit la contrainte plane $|\sigma_{ij}'| = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ s'exerçant sur un plan traversé perpendiculairement par $\overrightarrow{ox_3}$




Les composants du vecteur contrainte

$$\overrightarrow{T} = \begin{vmatrix} T_1 = \sigma_1 \ n_1 \\ T_2 = \sigma_2 \ n_2 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \cos\alpha = n_1 \\ \sin\alpha = n_2 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{t} = \begin{vmatrix} -\sin\alpha = t_1 \\ \sin\alpha = t_2 \end{vmatrix}$$

On sait aussi que :

$$T_n = \vec{T}\,\vec{n} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2$$

$$T_n = \sigma_1\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + \sigma_2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) = \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$T_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\alpha$$

et $T_t = \vec{T}\,\vec{t} = -\sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + \sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha = -\frac{\sigma_1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sigma_2}{2}\sin 2\alpha$

$$T_t = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\alpha$$

$\vec{T}$ peut s'écrire dans le plan $(\vec{n}, \vec{t})$ :

$$\vec{T} = \left(\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos(-2\alpha)\right)\vec{n} + \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\sin(-2\alpha)\vec{t}$$

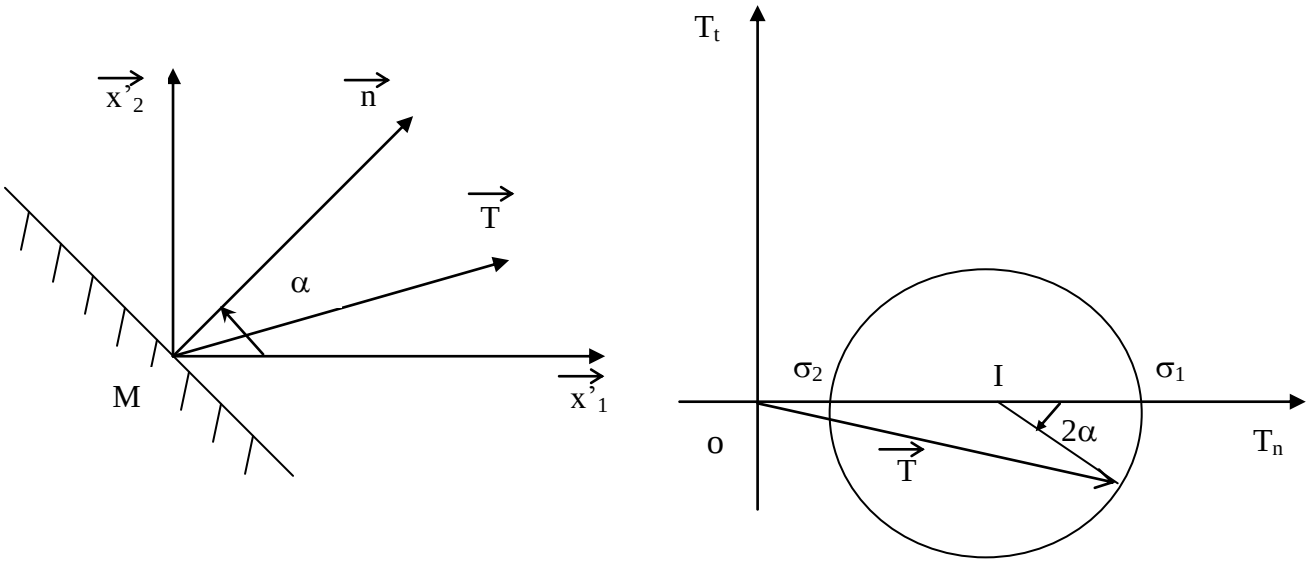
***Ces équations montrent que $\vec{T}$ décrit un cercle centré sur l'axe des Tn en I d'abscisse $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ et de rayon $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$*** $\quad (\sigma_1 \succ \sigma_2)$

De plus une rotation d'angle $\alpha$ *de* $\vec{n}$ correspond à une rotation d'angle $-2\alpha$ sur le cercle.

$\sigma_1$ *et* $\sigma_2$ Sont les extrémités du cercle, on peut vérifier aisément que si :

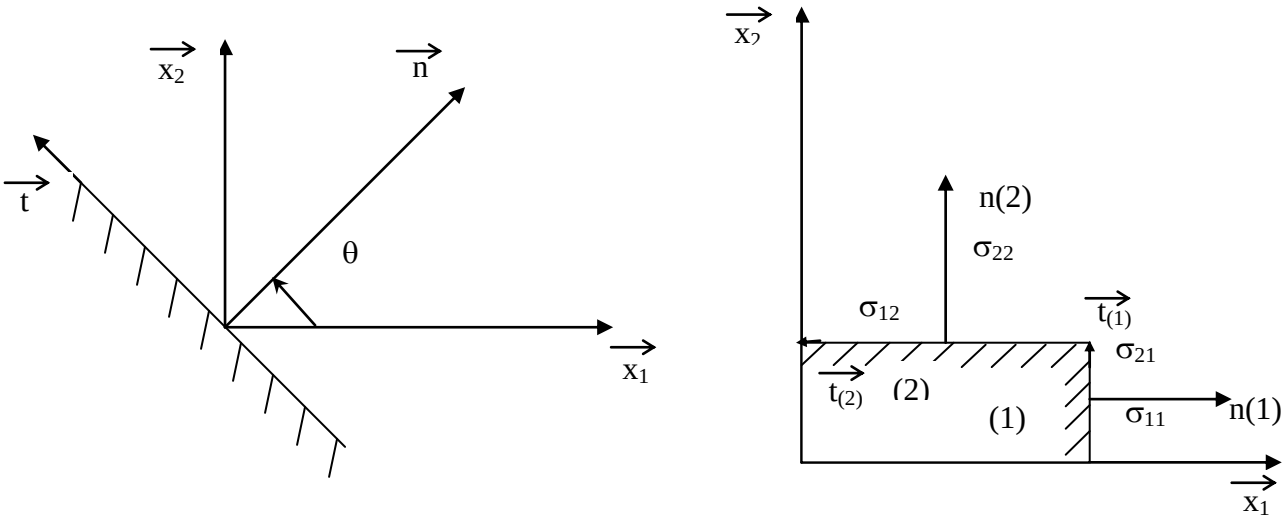
$$2\alpha = 0 \quad Tn = \sigma_1 \ et \ \ Tt = 0$$
$$2\alpha = \pi \quad Tn = \sigma_2 \ et \ \ Tt = 0$$

Sur le repère $(\ o\ ,\ \vec{x}'_1\ ,\ \vec{x}'_2\ ,\ \vec{x}'_3\ )$ $\qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$




***ii) Effectuons la représentation de Mohr lorsque*** $\vec{n}$ ***est repéré par un repère orthonormé quelconque de base*** $\left(o, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right)$.

Soit l contrainte plane $\left|\sigma_{ij}\right| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ s'exerçant sur un plan traversé perpendiculairement par $o\vec{x}_3$ .




Remarque : par convention, on posera que la contrainte tangentielle exercée sur la facette $\sigma_{21} = -\sigma_{12}$ (elle est orientée au sens opposé de $o\vec{x}_1$)

Les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}$ exprimés par rapport $\left(o, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\right)$

$$\vec{T}=\begin{vmatrix}\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2\\ \sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2\\ 0\end{vmatrix}\qquad \text{Avec}\quad \vec{n}\begin{vmatrix}n_1=\cos\theta\\ n_2=\sin\theta\\ 0\end{vmatrix}\qquad \vec{t}\begin{vmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{vmatrix}$$

D'ou $T_n=\vec{T}\vec{n}=\sigma_{11}\cos\theta\cos\theta+\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta+\sigma_{21}\cos\theta\sin\theta+\sigma_{22}\sin\theta\sin\theta$

$$T_n=\sigma_{11}\cos\theta\cos\theta+2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta+\sigma_{22}\sin\theta\sin\theta$$

En posant $\cos 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$ $\qquad$ $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ $\qquad$ $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$T_n=\sigma_{11}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)+\sin 2\theta\,\sigma_{12}+\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\sigma_{22}$$

$$T_n=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+\frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22})\cos 2\theta+\sigma_{12}\sin 2\theta$$

De plus,

$$T_t=\vec{T}\vec{t}=-\sigma_{11}\cos\theta\sin\theta-\sigma_{12}\sin\theta\sin\theta+\sigma_{21}\cos^2\theta+\sigma_{22}\sin\theta\cos\theta$$

$$T_t=-\frac{\sigma_{11}}{2}\sin 2\theta-\sigma_{12}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)+\sigma_{21}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)+\frac{\sigma_{22}}{2}\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin 2\theta-\frac{\sigma_{12}}{2}+\frac{\sigma_{12}}{2}\cos 2\theta+\frac{\sigma_{21}}{2}+\frac{\sigma_{21}}{2}\cos 2\theta$$

$$T_t=\frac{1}{2}(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin 2\theta+\sigma_{12}\cos 2\theta$$

** calcul des contraintes principales $\sigma_1$ et $\sigma_2$ à partir du tenseur de contrainte $\sigma_{ij}$*

$$\det(|\sigma_{ij}|-\sigma I_E)=0\qquad\Rightarrow\qquad \det\begin{pmatrix}\sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\ (\sigma_{11}-\sigma)(\sigma_{22}-\sigma)-\sigma_{12}^2=0$$

$$\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma\sigma_{11}-\sigma\sigma_{22}+\sigma^2-\sigma_{12}^2=0$$

$$\sigma^2-\sigma(\sigma_{11}+\sigma_{22})-\sigma_{12}^2+\sigma_{11}\sigma_{22}=0$$

$$\Delta = (\sigma_{11}+\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 - 4\sigma_{11}\sigma_{22} = (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2$$

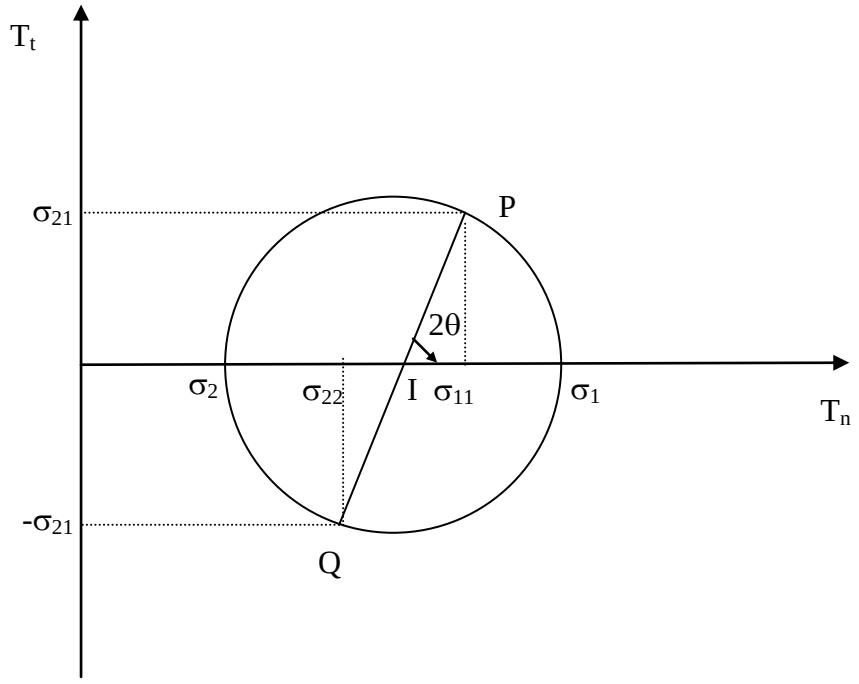
D'ou $$\sigma_1 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

Donc le cercle considéré est de centre $I = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}}{2}$ et de rayon $R = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$

**Construction directe**

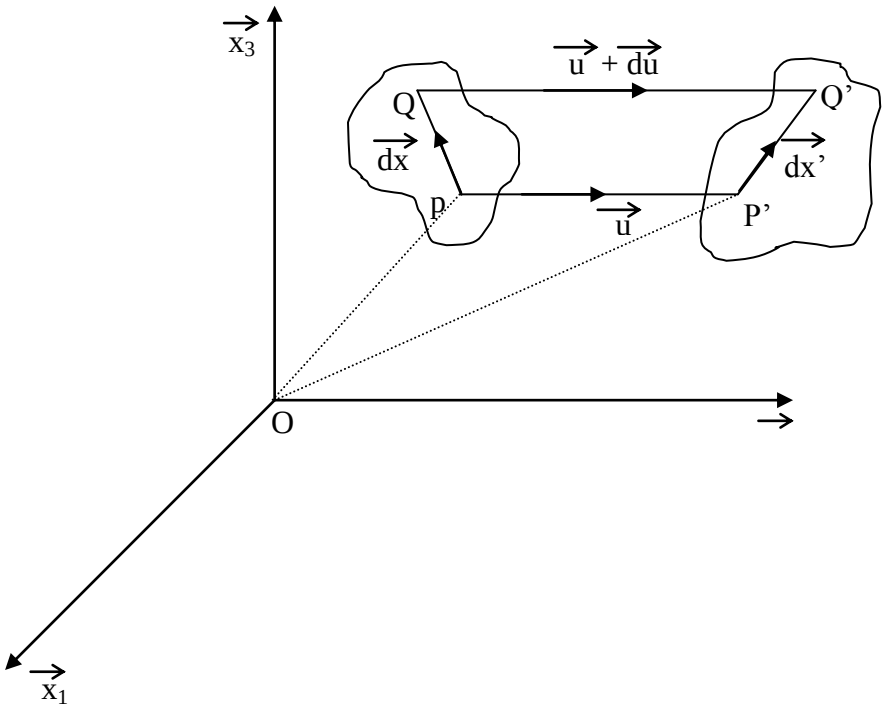
On peut alors construire le cercle de Mohr en connaissant les 2 points diamétralement opposé $P(\sigma_{11}, \sigma_{21})$ *et* $Q(\sigma_{22}, -\sigma_{12})$



## CHAPITRE III ; ETUDE DES PETITES DEFORMATIONS ET DU TENSEUR DU TAUX DE DEFORMATION

### 1 –Le tenseur du gradient du vecteur déplacement

Une propriété essentielle du milieu continu, c'est qu'une fois soumis à des contraintes, les «éléments de volumes subissent des changements de position, d'orientation et de forme que nous allons préciser.
Considérons dans un référentiel cartésien, la position du point P d'un corps continu avant et après la déformation (déformation infinitésimal)




Avant la déformation P ($x_1$, $x_2$, $x_3$ )
Après la déformation P' ($x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ )

Le déplacement du point du corps après la déformation est représenté par le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{pp'} = \overrightarrow{op'} - \overrightarrow{op}$ qui aura pour composante suivant les 3 axes.

$u_1 = x'_1 - x_1$

$u_2 = x'_2 - x_2$ noté aussi $u_i = x'_i - x_i$

$u_3 = x'_3 - x_3$

Le vecteur $u_i$ est appelé vecteur déplacement (ou déformation). La donnée de u en fonction des $x_i$ détermine complètement la déformation du corps.
De même qu'au cours de la déformation du corps. Les distances entre les points du corps varient.

Soient deux points infiniment voisins (avant la déformation) P($x_1$, $x_2$, $x_3$ ) et Q($x_1$+d$x_1$, $x_2$+d$x_2$, $x_3$+d$x_3$). Si d$x_i$ est **le rayon vecteur** entre ces deux points avant la déformation, il devient après la déformation d$x'_i$ = d$x_i$+ d$u_i$ et les composantes du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ sont :

$$dx'_1 = dx_1 + du_1$$
$$dx'_2 = dx_2 + du_2$$
$$dx'_3 = dx_3 + du_3$$

et comme $u_i$ dépend des $x_i$ càd que $u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3)$
$u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3)$
$u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3)$

Par conséquent

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3$$
$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3$$
$$du_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3$$

$\Rightarrow$

$$dx'_1 = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3$$
$$dx'_2 = dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3$$
$$dx'_3 = dx_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3$$

Ou encore $dx'_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \qquad (j = 1,2,3)$

$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{du}$

Aussi on peut écrire : $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'}$

$$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q'} - \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \vec{u} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{du} - \overrightarrow{PQ}$$

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{du}$$

$$\overrightarrow{du} = \left| \begin{array}{l} du_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ du_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ du_3 = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{du} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{du} = \left| G \right| \overrightarrow{dx} = \left| G \right| \ \overrightarrow{PQ}$$

$dx'_1, dx'_2, dx'_3$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{P'Q'}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{du}$$

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} + \left| G \right| \ \overrightarrow{PQ} \qquad \text{avec} \quad \overrightarrow{QQ'} = \vec{u} + \overrightarrow{du}$$

$$= \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{du}$$

$$= \overrightarrow{PP'} + \left| G \right| \ \overrightarrow{PQ}$$

$\left| G \right|$ désigne le tenseur gradient du vecteur déplacement équivalent à

$$|G| = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{du} = |G| \overrightarrow{PQ} \qquad \overrightarrow{du} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

**Remarque**

Dans le cas **des petites déformations**, les termes de la matrice $|G|$ sont très petits devant 1.

$$\frac{\partial u_i}{\partial u_i} \langle\langle 1$$

c à d que la variation de la déformation relative au corps est très petite devant la variation d'un point du corps au cours de la déformation.

## 2- Le tenseur du taux de déformation

Le tenseur $|G|$ peut être décomposé en une somme d'un tenseur symétrique $|\Delta|$ et d'un tenseur antisymétrique $|\Omega|$

$$|G| = |\Delta| + |\Omega|$$

Les deux tenseurs $|\Delta|$ et $|\Omega|$ ont pour coordonnées

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \text{ et } \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

c à d que

$$|\Delta| = |\varepsilon_{ij}| = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$|\Omega| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent la formule (1) $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + |G|\ \overrightarrow{PQ}$ se transforme en $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + |\Delta|\ \overrightarrow{PQ} + |\Omega| \overrightarrow{PQ}$

Si on considère le vecteur $\vec{\omega}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ associé à la matrice $|\Omega|$

On à $|\Omega|\ \overrightarrow{PQ} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$

Avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}$

$\vec{u}$ est appelé vecteur

d'ou $\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PP'} + |\Delta|\ \overrightarrow{PQ} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ}$

Il en résulte que la transformation Q à Q' fait intervenir trois caractéristiques :

1- une translation infiniment petite $(\tau)$définie par $\overrightarrow{PP'}$
2- une rotation infiniment petite (R) définie par le vecteur $\vec{\omega}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$

3- une transformation linéaire (D) appelé déformation pure définie par le tenseur symétrique $|\Delta| = |\varepsilon_{ij}|$ (appelé tenseur du taux de déformation)

$$|\Delta| = |\varepsilon_{ij}| = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

si i = j $\varepsilon_{ij}$ est appelé taux de déformation unitaire

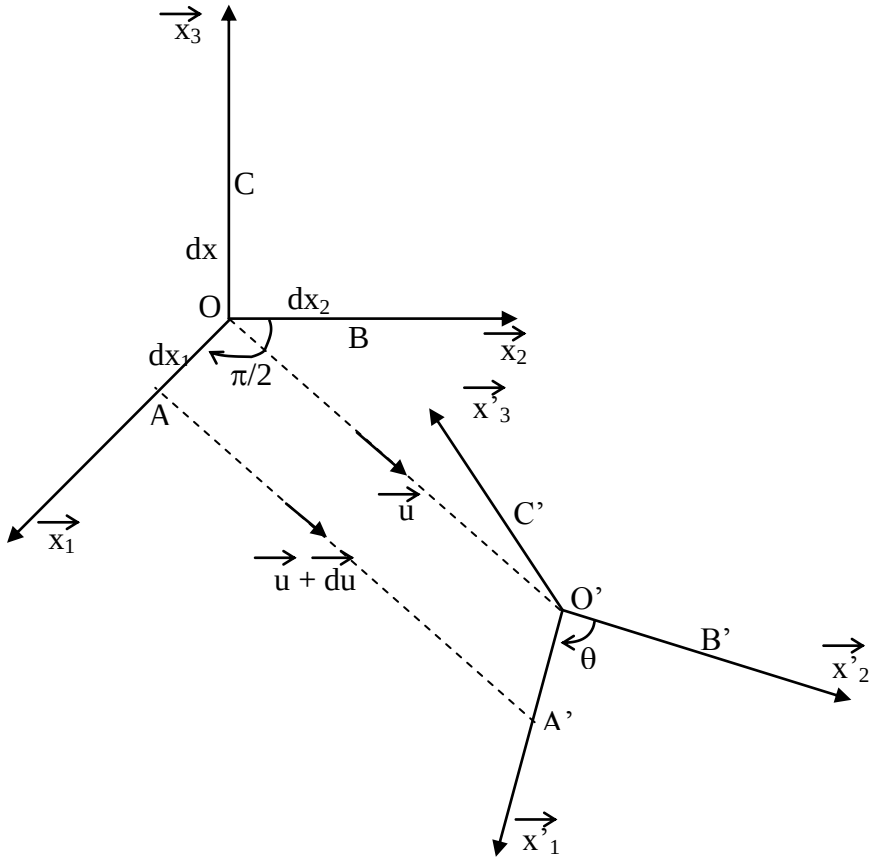
si i ≠ j $\varepsilon_{ij}$ est appelé taux de déformation angulaire

## 3- Définitions élémentaires du taux de déformation

Nous allons considérer une déformation autour d'un point O.

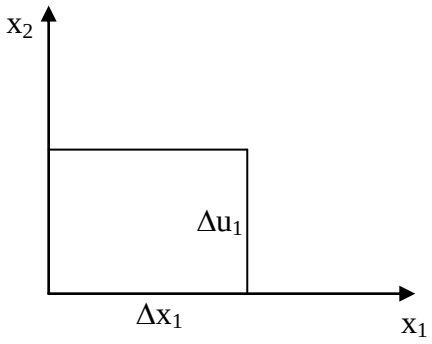
Pour cela considérons avant la déformation un trièdre tri rectangulaire, issue du point $O\left(o, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}\right)$ tel que OA = $dx_1$ , OB = $dx_2$ , OC = $dx_3$

Après la déformation, il devient $\left(o', \overrightarrow{x'_1}, \overrightarrow{x'_2}, \overrightarrow{x'_3}\right)$



**** On définit la déformation longitudinale unitaire suivant $\overrightarrow{ox_1}$ (l'allongement unitaire)***

$$\varepsilon_{11} = \frac{O'A' - OA}{OA} = \frac{du_1}{dx_1} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$$

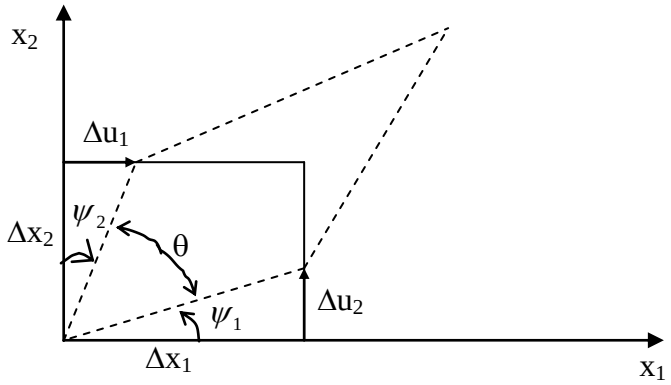



De même pour les composantes

$$\varepsilon_{22} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2} \quad et \quad \varepsilon_{33} = \frac{\Delta u_3}{\Delta x_3}$$

**** On définit la déformation angulaire des axes $\overrightarrow{ox_1}$ et $ox_2$ c'est l'angle qui a notée*** $\varepsilon_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta$

Ceci par un volume situé dans le plan ($x_1$ , $x_2$ )




Avec $\Psi_1 \approx \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1}$

$$\Psi_2 \approx \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2}$$

$$\varepsilon_{12} = \Psi_1 + \Psi_2 \approx \frac{1}{2}\left( \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} \right)$$

avec $\varepsilon_{13} \approx \frac{1}{2}\left( \frac{\Delta u_1}{\Delta x_3} + \frac{\Delta u_3}{\Delta x_1} \right)$ *et* $\varepsilon_{32} \approx \frac{1}{2}\left( \frac{\Delta u_3}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_3} \right)$

**Remarque**

* La déformation longitudinale sera considérée comme positive, s'il y a allongement dans la direction considérée.

* La déformation angulaire est considérée comme positive, s'il y a diminution de l'angle droit.

## CHAPITRE IV- LES RELATIONS FONDAMENTALES DE LA DYNAMIQUE (LES EQUATIONS DE CONSERVATION)

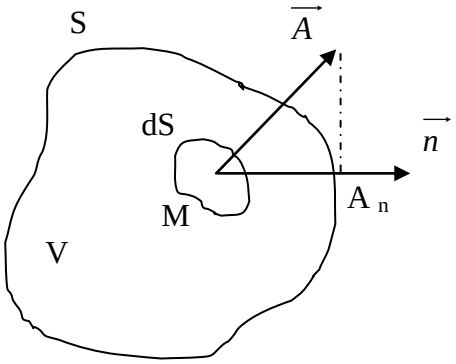
### 1- Rappels mathématiques

#### Théorème de la divergence

Ce théorème permet de transformer une intégrale de volume en une intégrale de surface.

Soient S la surface fermée entourant le domaine V. $\overrightarrow{A}(M)$ un vecteur défini dans V et sur S et $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal à dS
Le théorème s'écrit :

$$\int_V div\ \overrightarrow{A}\ dV = \int_S \overrightarrow{A}\ \overrightarrow{n}\ dS = \int_S A_n\, dS$$




Flux du vecteur $\overrightarrow{A}$ sortant par la surface S

$$si\ \overrightarrow{A}\ \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{n}\ \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{vmatrix}$$

Cette formule peut s'écrire sous la forme :

$$\int_V \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_S \left( A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3 \right) dS$$

Qui peut s'écrire

$$\int_V \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\ dV = \int_S A_{i1} n_i\ dS \quad formule\, d'Ostrogradosky$$

* si f est une fonction scalaire

$$\int_V \overrightarrow{grad}\ f\ dV = \int_S f\ \overrightarrow{n}\ dS \quad formule\, de\, Gauss$$

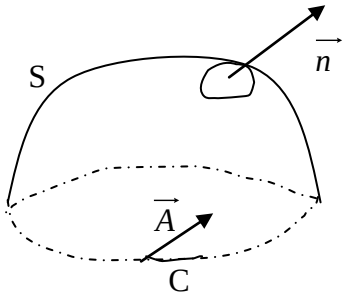
* Formule du rotationnel

$$\int_V \overrightarrow{rot}\,\vec{A}\; dV \;=\; \int_S \left(\vec{n} \;\wedge\; \vec{A}\right) dS$$

* Formule de Stokes

Elle permet de transformer une intégrale de surface en une intégrale curviligne.

En effet, si on considère une surface S limitée par une courbe fermée C, sur laquelle, on fixe un sens de circulation




$\int_S \vec{n}\;\overrightarrow{rot}\vec{A}\; dS \;=\; \int_C \vec{A}\; d\vec{l}$ le travail (circulaire) de $\vec{A}$ le long de la courbe fermée

= au flux de son rotationnel qui s'appuie sur cette

courbe.

## 2. la dérivée particulaire

Soit une fonction $f(M,t)$ définie dans le repère $\left(\overrightarrow{ox_1}\,,\,\overrightarrow{ox_2}\,,\,\overrightarrow{ox_3}\right)$ lorsqu'on suit le point M dans son mouvement la fonction $f(M,t)$ est une fonction $g(t)$ de la seule variable t .
Par définition, on nomme dérivée particulaire (ou dérivée matérielle), la quantité $\dfrac{df}{dt}$

En effet, si $f(M,t) = f(x_1,x_2,x_3,t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}$$

En posant $u_i = \frac{dx_i}{dt}$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

Qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

* la dérivée particulaire d'une fonction vectorielle $\vec{A}(M,t)$, lorsqu'on suit M dans son déplacement

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

terme local terme convectif

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad} = u_1\frac{\partial}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Si le vecteur $\vec{A}$ est égal au vecteur vitesse $\vec{U}$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{grad})\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{grad}\frac{u^2}{2} + (r\vec{o}t\,\vec{u})\Lambda\vec{u}$$

Accélération Accélération locale Accélération convective

* **<u>Dérivée particulaire d'une intégrale de volume</u> (théorème de transport)**

Soit une intégrale de volume définie par :

$$I = \int_V f(M,t)dV$$

La dérivée particulaire de I donne :

$$\frac{dI}{dt} = \int_V (\frac{df}{dt} + f.div\vec{U})dV$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_V (\frac{df}{dt} + divf.\vec{U} - \vec{U}.grad\vec{f})dV$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_V (\frac{\partial f}{\partial t} + divf.\vec{U})dV$$

Et d'après le théorème de la divergence

$$\frac{dI}{dt} = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}dV + \int_S f.\vec{U}.\vec{n}.dS$$

Si $\vec{I}$ est une quantité vectorielle $\vec{I} = \int_V \vec{A}.dV$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dV + \int_S \vec{A}.\vec{U}.\vec{n}.dS = \int_V \frac{\partial A_i}{\partial t}dV + \int_S A_i.U_n.dS$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_V \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dV + \int_S \vec{A}.U_n.dS$$

**Remarque :**

Si : f = 1 $\quad I = \int_V dV = V$ volume dans le domaine D

$$\frac{dI}{dt} = 0 + \int_S U_n.dS$$ Débit volumique sortant de S

## Le lemme fondamental

Soit f (M) une fonction continue dans un domaine D.

Si on a : $\int_D f(M)dV = 0$

Alors pour $\forall D$ la fonction f (M) = 0

Ce lemme peut être aussi utilisé sous la forme :

Si $\int_D f(M)dV = \int_D g(M)dV$ alors f (M) = g (M)

## 3- Les Equations de conservation

### i- Equation de conservation de la masse ou équation de continuité

Soit un volume V d'un milieu continu que l'on suit dans son mouvement et dont la masse $M = \int_V \rho.dV$

Étant donné qu'il n'y a ni source ni puit, M reste constante lors de son déplacement.

La dérivée particulaire $\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho.dV = 0$

D'après le théorème de la dérivée particulaire d'une intégrale de volume

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho.dV = \int_V \frac{d\rho}{dt}dV + \int_V \rho.div\vec{U}.dV = 0$$

$$\int_V (\frac{d\rho}{dt} + \rho.div\vec{U})dV = 0$$

Etant donné que V est arbitraire (lemme fondamental)

$\frac{d\rho}{dt} + \rho.div\vec{U} = 0$ **Equation de Continuité**

Si le milieu est incompressible $\rho = cte$ alors :

$$div\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

**Application à un écoulement d'un fluide permanent**

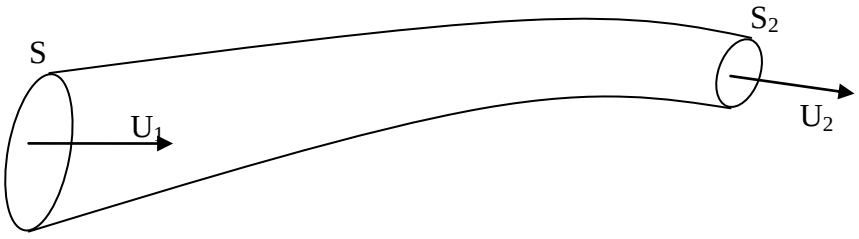
Il à rappeler que le débit massique à travers une surface S :

- le débit : c'est la quantité de fluide par unité de temps
- le débit volumique : surface x vitesse
- le débit massique : masse volumique x débit volumique $= \rho \times S \times V$

Lorsque la vitesse n'est pas constante à travers la section.

$$Q_v = \int_S v_n \, d\,s \qquad Q_m = \rho \, Q_v$$

Si on applique la conservation de la masse de l'écoulement permanent d'un fluide à travers une conduite




La conservation de la masse s'écrit pour le cas d'un écoulement permanent

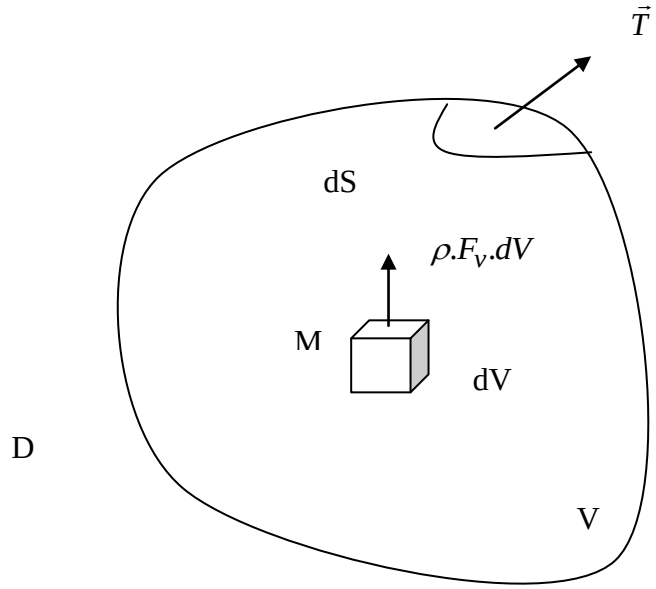
$$\rho_1 S_1 u_1 = \rho_2 S_2 u_2$$

Pour le cas d'un fluide incompressible

$$S_1 u_1 = S_2 u_2$$

## ii- Théorème de Quantité de Mouvement

Soit un domaine D de volume V et d surface S en mouvement




L'équation de conservation de quantité de mouvement est donnée par le théorème de quantité de mouvement

$$[A] = \frac{d[K]}{dt} = [F_{ext}]$$

Par définition, les éléments de réduction au point M pour chaque torseur

$$[K] = \begin{cases} \vec{K} = \int_D \rho.\vec{u}.dV \\ \vec{\mathrm{M}}_0(K) = \int_D O\vec{M}\Lambda\rho.\vec{u}dV \end{cases}$$

$$[A] = \begin{cases} \vec{\gamma} = \int_D \rho.\vec{\gamma}.dV \\ \vec{\mathrm{M}}_0(\gamma) = \int_D O\vec{M}\Lambda\rho.\vec{\gamma}.dV \end{cases}$$

$$[F_{ext}] = \begin{cases} \vec{F}_{ext} = \int_D \rho.\vec{F}_v.dV + \int_S \vec{T}.dS \\ \vec{\mathrm{M}}_0(F_{ext}) = \int_D (O\vec{M}\Lambda\rho.\vec{F}_v.dV) + \int_D (O\vec{M}\Lambda\vec{T})dS \end{cases}$$

Cette égalité entre es torseurs se traduit par 2 égalités vectorielles

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho.\vec{u}.dV = \int_V \rho.\vec{F}_V.dV + \int_S \vec{T}.dS \qquad F_V = \text{Force de volume} \big/ \text{unité de masse}$$

Ceci peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho.u_i.dV = \int_V \rho.F_{v_i}.dV + \int_S T_i.dS$$

Le vecteur contrainte : $T_i = \sigma_{ij}.n_j$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho.u_i.dV = \int_V \rho.F_{v_i}.dV + \int_S \sigma_{ij}.n_j.dS$$

D'après le théorème de la divergence

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_S \sigma_{ij}.n_j.dS$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho.u_i.dV = \int_V \rho.F_{v_i}.dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.dV$$

De même

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho.u_i.dV = \int_V \frac{\partial(\rho.u_i)}{\partial t}.dV + \int_S \rho.u_i.u_n.dS$$

$$= \int_V \frac{d(\rho.u_i)}{dt}.dV + \int_V \rho.u_i.\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.dV$$

$$= \int_V u_i.\frac{d\rho}{dt}.dV + \int_V \rho.\frac{du_i}{dt}.dV + \int_V \rho.u_i.\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho.u_i.dV = \int_V \rho.\frac{du_i}{dt}.dV + \int_V u_i\underbrace{(\frac{d\rho}{dt} + \rho.\frac{\partial u_i}{\partial x_i})}dV$$

$$\int_V \rho.\frac{du_i}{dt}.dV = \int_V \rho.F_{v_i}.dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}.dV$$

V est un volume arbitraire

D'où l'équation du mouvement du corps continu

$$\boxed{\rho.\frac{du_i}{dt} = \rho.F_{v_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}}$$

A l'équilibre

$$\frac{du_i}{dt} = 0$$

On retrouve $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$ avec : $f_i = \rho.F_{v_i}$

### iii- <u>Equation de conservation de l'énergie</u>

Rappelons le théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_C}{dt} = \mathrm{P}_{ex} + \mathrm{P}_{\mathrm{int}}$$

Puissance des forces extérieures Puissance des forces intérieures

Si on reprend l'équation du mouvement

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = \rho.F_{v_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Si on multiplie les 2 membres par $u_i$

$$\rho.u_i.\frac{du_i}{dt} = \rho.u_i.F_{v_i} + u_i.\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho.\frac{d}{dt}(\frac{u^2}{2}) = \rho.u_i.F_{v_i} + \frac{\partial (u_i.\sigma_{ij})}{\partial x_j} - \sigma_{ij}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

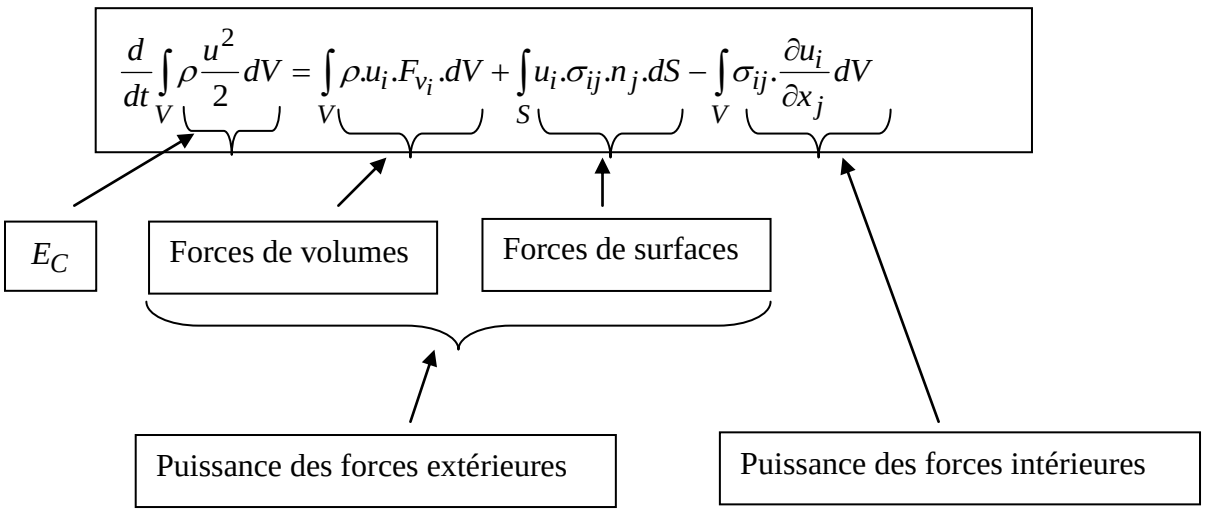
Considérons un domaine D de volume V et de surface S

$$\rho.\frac{d}{dt}(\frac{u^2}{2}).dV = \rho.u_i.F_{v_i}.dV + \frac{\partial (u_i.\sigma_{ij})}{\partial x_j}dV - \sigma_{ij}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV$$

Intégrons cette équation dans le domaine D de volume V

$$\int_V \rho.\frac{d}{dt}(\frac{u^2}{2}).dV = \int_V \rho.u_i.F_{v_i}.dV + \int_V \frac{\partial (u_i.\sigma_{ij})}{\partial x_j}dV - \int_V \sigma_{ij}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\frac{u^2}{2}dV = \int_V \rho.u_i.F_{v_i}.dV + \int_S u_i.\sigma_{ij}.n_j.dS - \int_V \sigma_{ij}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV$$



Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dE_C}{dt} = \mathrm{P}_{ex} + \mathrm{P}_{\mathrm{int}}$$

Avec

$$\mathrm{P}_{ext} = \int_V \rho.u_i.F_{v_i}.dV + \int_S u_i.\sigma_{ij}.n_j.dS$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{int}} = -\int_V \sigma_{ij}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$$

* Maintenant énonçons le premier principe de la thermodynamique dans le cas général :

$$\frac{dE}{dt} = \mathrm{P}_{ex} + \frac{dQ}{dt}$$

E : énergie totale

Puissance des forces extérieures

Puissance thermique
(Taux de chaleur reçue par le système)

Avec : $E = U + E_C$

$U$ : Énergie interne du système

$$U = \int_V e.\rho.dV$$

$E_C$ : Énergie cinétique

e : Énergie interne massique

$\frac{dQ}{dt}$ = Chaleur reçue par contact (à travers S) + chaleur reçue à distance (à travers V)

$$= \int_S q.dS + \int_V r.\rho.dV$$

r : taux de chaleur massique

q : taux de chaleur à travers dS

$$= -\int_S \vec{q}.\vec{n}.dS + \int_V r.\rho.dV \qquad q = -\vec{q}.\vec{n} = -K.gra\vec{d}T.\vec{n}$$ (Loi de Fourier)

$$\Longrightarrow \quad \frac{dU}{dt} + \frac{dE_C}{dt} = \mathrm{P}_{ext} - \int_S \vec{q}.\vec{n}.dS + \int_V r.\rho.dV$$

Comme $$\frac{dE_C}{dt} = \mathrm{P}_{ex} + \mathrm{P}_{\mathrm{int}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dU}{dt} + \mathrm{P}_{\mathrm{int}} = -\int_S \vec{q}.\vec{n}.dS + \int_V r.\rho.dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V e.\rho.dV = -\int_S \vec{q}.\vec{n}.dS + \int_V r.\rho.dV - \mathrm{P}_{\mathrm{int}}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_V \rho.\frac{de}{dt}.dV = -\int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV + \int_V r.\rho.dV + \int_V \sigma_{ij}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV$$

Le volume est arbitraire

$$\rho.\frac{de}{dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r.\rho + \sigma_{ij}.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Équation de conservation de l'énergie

## CHAPITRE V : APPLICATION AUX ECOULEMENTS DES FLUIDES PARFAITS

### 1- Dynamique des fluides parfaits

### 1.2. Introduction

La dynamique des fluides parfaits concerne, le mouvement des fluides non visqueux

### 1.3 – les équations d'Euler

En mouvement, les forces agissant sur la particule d'un fluide parfait sont :

- les forces de volume : exemple, la gravité
- les forces de surfaces : exemple, la pression
- les forces d'inertie : proportionnelles à l'accélération $\vec{\gamma}$ et au volume.

Cet ensemble de forces satisfait la loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

En statique $\vec{\gamma} = 0$ donc $\sum \vec{F} = 0$ . En raisonnant sur un élément de volume parallélépipédique on avait trouvé comme équations régissant l'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F v_i = 0 \quad avec \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Donnant :
$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho F v_1 = 0$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho F v_2 = 0$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho F v_3 = 0$$

En dynamique des fluides $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ . Donc à partir des équations précédentes, au second membre, on ajoute le terme $m\vec{\gamma}$ .

Ce qui donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \qquad avec \qquad m\vec{\gamma} = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \ \vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho F_{V_1} = \rho \gamma_1$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho F_{V_2} = \rho \gamma_2$$
$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho F_{V_3} = \rho \gamma_3$$

Ceci peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \overrightarrow{F_V} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad\ p} \quad équation\ d'Euler$$

Ces équations sont valables pour un ***fluide non visqueux, compressible ou incompressible.***

## 1.2.Autre forme des équations d'Euler

Soit le champ de vitesse $\vec{U}$ , tel que :

$$\vec{U} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \qquad avec \qquad \vec{\gamma} = \frac{d\vec{U}}{dt} \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \frac{du_3}{dt} \end{vmatrix}$$

On obtient ainsi la formule classique des équations d'Euler, valable pour un fluide parfait :

$$\frac{du_1}{dt} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = F_{V_1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}$$
$$\frac{du_2}{dt} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = F_{V_2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}$$
$$\frac{du_3}{dt} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = F_{V_3} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

## 1.3- La relation de Bernouilli

Soit l'équation du mouvement permanent d'un fluide parfait.

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \overrightarrow{F_V} - \overrightarrow{grad}\, p$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \overrightarrow{grad}\, \frac{u^2}{2} + \rho \overrightarrow{rot}\, \vec{u} \wedge \vec{u} = \rho \overrightarrow{F_V} - \overrightarrow{grad}\, p$$

**Hypothèses**

- Pour un écoulement permanent $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$
- Pour un écoulement irrotationnel $\overrightarrow{rot}\, \vec{u} = 0$
- Si $\overrightarrow{F_V}$ dérive de la force de pesanteur $\overrightarrow{F_V} = - \overrightarrow{grad}\, gh$
- Si $\rho = cte$

$$\rho \overrightarrow{grad}\, \frac{u^2}{2} = - \rho \overrightarrow{grad}\, g h - \overrightarrow{grad}\, p$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}\, (\frac{u^2}{2} + g h + \frac{p}{\rho}) = 0$$

$$\frac{u^2}{2} + g h + \frac{p}{\rho} = cte$$ Equation de Bernouilli

## 1.4- Interprétation Energétique

L'équation de Bernouilli est une forme particulière du théorème de la conservation de l'énergie appliqué à l'unité de poids de l'écoulement d'un fluide non visqueux.

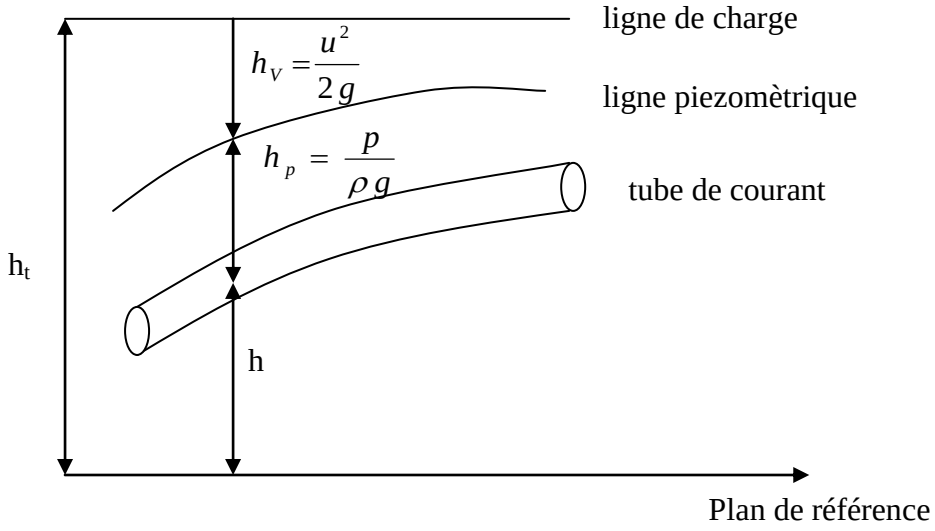
$$\frac{1}{2}\frac{u^2}{g} + \frac{p}{\rho g} + h = cte$$

| énergie cinétique par unité de poids | énergie de pression par unité de poids | énergie potentiel par unité de poids |
|---|---|---|

l'énergie par unité de poids est l'équivalent dimensionnel d'une hauteur définit par $\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h$ qui est appelée la charge totale.

## 1.5- Interprétation graphique

Sur un plan représentant le tube de courant considéré, on porte verticalement les quantités $\frac{u^2}{2g}$ , $\frac{p}{\rho g}$ , $h$




h : côte du point considéré
$h_P$ : côte due à la pression
$h_t$ : charge totale
$\frac{p}{\rho g} + h$ : Hauteur piezomètrique

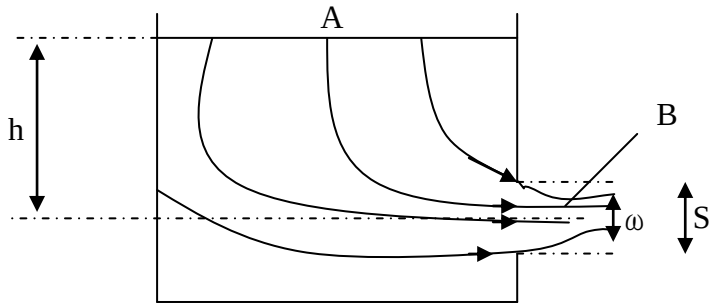
## 1.6.Application du théorème de Bernouilli

Pour appliquer le théorème de Bernouilli, il faut :

- Définir la nature de l'écoulement (permanent, non permanent, rotationnel ou irrotationnel, visqueux, non visqueux)
- Fixer judicieusement les points amont et aval du tube de courant pour lesquels on applique le théorème
- Fixer un plan horizontal de référence

### a- Formule de Torricelli

Un grand réservoir contient un fluide qu'il laisse échapper par un orifice étroit de section S. On se propose de calculer le débit du fluide qui s'écoule.




S section de l'orifice
ω section contracté

$\frac{\omega}{S} = C \langle 1$ C : coefficient de contraction

L'expérience montre que les lignes de courant sont parallèles et rectilignes à la sortie de la section contractée

- Donc on considère l'écoulement irrotationnel
- On choisit un plan de référence passant par l'orifice B
- le point A sur la surface libre, le point B après l'orifice

Donc Bernouilli, va s'appliquer entre un point A quelconque de la surface libre et un point quelconque B de la surface contractée.

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} + h_A = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + h_B$$

Au point A $V_A \approx 0$ grand réservoir
$p_A = p_{Atm}$
$h_A = h$

Au point B $h_B = 0$ référence
$p_B = p_{Atm}$ dans l'orifice $\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$

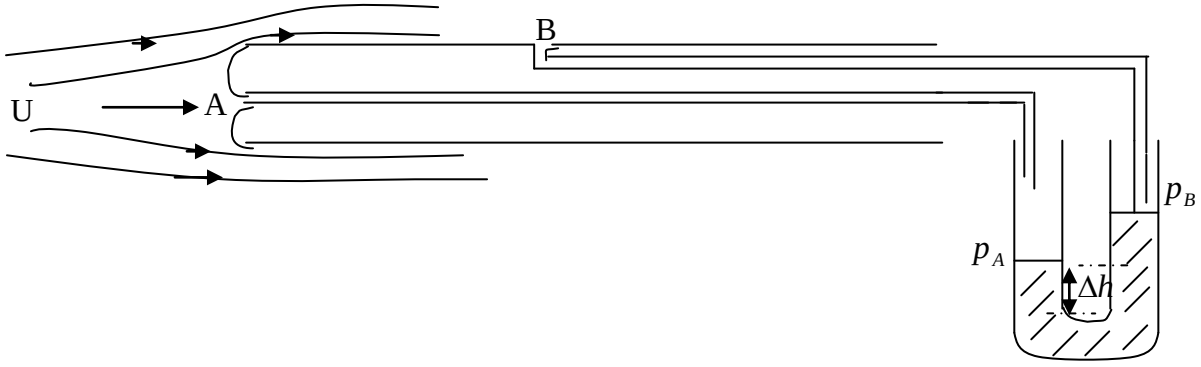
D'ou $0 + \frac{p_{Atm}}{\rho g} + h = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_{Atm}}{\rho g} + 0$

et $V_B^2 = 2gh \Rightarrow V_B = \sqrt{2gh}$

D'ou le débit $Q_v$ ($m^3/s$) = $\omega V_B = cs\sqrt{2gh}$

## b- le tube de Pitot

C'est un appareil qui obéit au principe de Bernouilli et qui permet de mesurer les vitesses d'écoulement en un point.




Si le tube de Pitot est placé dans un écoulement parallèle et uniforme, Bernouilli donne entre A et B :

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} + h_A = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + h_B$$

Au point A $V_A = 0$ (Point d'arrêt)
$h_A = 0$ (Référence)

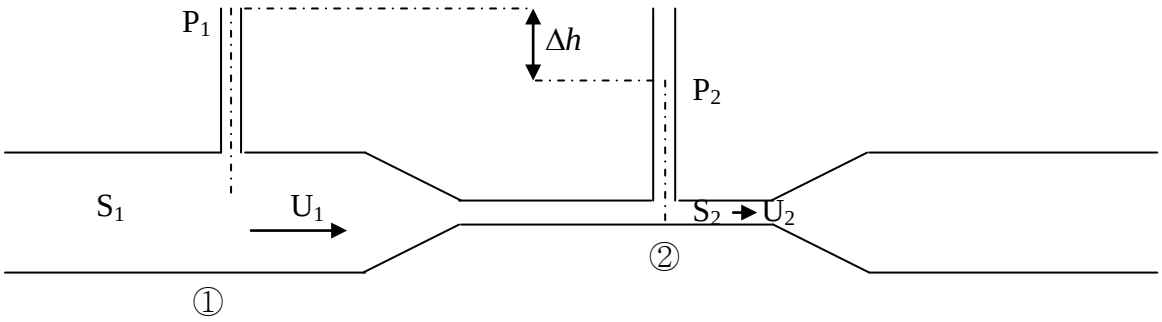
Au point B $V_A = V$ (écoulement uniforme)
$h_B = 0 \quad (h_B \approx h_B = 0)$

$$\frac{p_A}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + 0$$

D'ou $\frac{V^2}{2g} = \frac{p_A - p_B}{\rho g} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho_{fluide}}} = \sqrt{\frac{2\rho_{Hg}\, g\, \Delta h}{\rho_{fluide}}}$

## c- Tube de venturi

C'est une tuyaurie convergente - divergente qu'on intercale dans une conduite de section $S_1$ dont on veut déterminer le débit




Avec la section $S_1$ et $S_2$, Bernouilli s'écrit :

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2$$

$h_1 = h_2 =$ Référence

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

Avec la continuité $S_1 u_1 = S_2 u_2$ (fluide incompressible)

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} = \frac{u_2^2}{2g}\left(1 - \frac{u_1^2}{u_2^2}\right)$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{u_2^2}{2g}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)$$

D'ou $$u_2 = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}} \cdot \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{\rho g}}$$

La différence $\frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ se détermine à l'aide de deux tubes piézometriques où à l'aide d'un manomètre différentiel relié à deux prises de pression statique.

D'ou le débit dans la conduite

$$Q_V\,(m^3/s) = u_2\,S_2$$

## 1.7- Généralisation de l'équation de Bernouilli

### i) Cas des fluides réels (fluides visqueux)

Pour un fluide réel, l'écoulement s'effectue avec frottement, et par conséquent l'effet de viscosité provoque une perte d'énergie le long de l'écoulement et le bilan énergique par unité de poids n'est plus constant.

On dit qu'il se produit une perte de charge. Ainsi entre deux points A et B de l'écoulement, on aura :

$$\left(\frac{u_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + h_A\right) - \left(\frac{u_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + h_B\right) = \Delta H$$

$\Delta H$ : Perte de charge entre les ponts A et B

# Chapitre VI : Application aux écoulements des fluides visqueux

## 1- Dynamique des fluides visqueux

Nous avons déjà vu qu'un milieu continu en mouvement est caractérisé par l'équation de conservation de quantité de mouvement :

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = \rho.F_{v_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Si on considère la loi de comportement du fluide visqueux est celle d'un fluide Newtonien :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = 2\mu.\varepsilon_{ij} + \lambda.\varepsilon_{kk}.\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu.\varepsilon_{ij} + \lambda.\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

Ou sous forme matricielle

$$\left|\sigma_{ij}\right| = -P.I_E + 2\mu.\left|\varepsilon_{ij}\right| + \lambda.tr\left|\varepsilon_{ij}\right|I_E$$

On aura donc les composantes suivantes :

* Pour i = j $\quad \delta_{ij} = 1$

$$\sigma_{11} = -P + \tau_{11} = -P + 2.\mu.\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3})$$

$$\sigma_{22} = -P + \tau_{22} = -P + 2.\mu.\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3})$$

$$\sigma_{33} = -P + \tau_{33} = -P + 2.\mu.\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3})$$

* Pour $i \neq j \quad \delta_{ij} = 0$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{12} = \mu..(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1})$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau_{13} = \mu..(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3})$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = \tau_{32} = \mu..(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2})$$

Si on revient à l'expression $\delta_{ij}$ celle-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij} = -P.\delta_{ij} + \mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda.\frac{\partial u_k}{\partial x_k}.\delta_{ij}$$

Avec $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ et $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \varepsilon_{kk} = div\vec{u} = \nabla.u$

Si on reprend l'équation du mouvement

$$\rho.\frac{du_i}{dt} = \rho.(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = \rho.F_{v_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho.(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = \rho.F_{v_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda.\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij})$$

Supposons que $\mu$ et $\lambda$ sont constantes

$$\rho.(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = \rho.F_{v_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu.\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) + \mu.\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + \lambda.\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_k}{\partial x_k})$$

En posant $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla.u) = \frac{\partial}{\partial x_i}(div\vec{u})$

$$\rho.(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = \rho.F_{v_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu.\Delta u + \mu.\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}) + \lambda.\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_k}{\partial x_k})$$

$$\rho.(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}) = \rho.F_{v_i} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu.\Delta u + (\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla.u)$$

Sous forme vectorielle :

$$\rho.(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\nabla \vec{u}) = \rho.\vec{F}_v - grad\vec{P} + \mu.\Delta\vec{u} + (\mu + \lambda)grad\vec{(}div.\vec{u})$$

Pour le cas d'u fluide incompressible $\rho = cte \quad div\vec{u} = 0$

On obtient les équations de **Navier – Stokes**

$$\rho.(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}.\nabla \vec{u}) = \rho.\vec{F}_v - grad\vec{P} + \mu.\Delta\vec{u}$$

Projetée suivant les 3 axes $o\vec{x}_1, o\vec{x}_2, o\vec{x}_3$

$$\frac{du_1}{dt} = \rho.F_{v_1} - \frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2})$$

$$\frac{du_2}{dt} = \rho.F_{v_2} - \frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2})$$

$$\frac{du_3}{dt} = \rho.F_{v_3} - \frac{\partial P}{\partial x_3} + \mu(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2})$$

## 2– Equation de conservation de l'énergie

La relation donnée par la mécanique des milieux continus

$$\rho.\frac{de}{dt} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + r.\rho + \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Avec e : énergie interne par unité de masse
q : taux de chaleur passant à travers dS
r : terme source

D'après la loi de Fourier $q_i = -k.\frac{\partial T}{\partial x_i}$

$q_i$ : flux de chaleur

k : la conductivité thermique

et d'après la loi de comportement

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

$$\rho.\frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) + r.\rho + (-P\delta_{ij} + \tau_{\mathrm{ij}})\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\rho.\frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) + r.\rho - P\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{\mathrm{ij}}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Posons $\psi = r.\rho$ le terme source

$$\phi = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$ Dissipation visqueuse par frottement

$$\rho.\frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) - P\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \psi + \phi$$

**Equation de l'énergie écrite autrement**

* <u>en fonction de l'enthalpie</u>

On sait que :

$$h = e + \frac{P}{\rho}$$ h : enthalpie par unité de masse

L'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho.div\vec{u} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \rho\frac{d}{dt}(\frac{1}{\rho})$$

$$P\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = P\rho\frac{d}{dt}(\frac{1}{\rho})$$

$$\rho.\frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) - P.\rho.\frac{d}{dt}(\frac{1}{\rho}) + \psi + \phi$$

Sachant que $h = e + \frac{P}{\rho}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{d}{dt}(\frac{p}{\rho}) = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} + P\frac{d}{dt}(\frac{1}{\rho})$$

$$\rho.\frac{dh}{dt} - \frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \psi + \phi$$

* <u>en fonction de l'entropie</u>

Comme $de = TdS - \frac{PdV}{m}$ avec S : entropie par unité de masse

$$de = TdS - \frac{P}{m}dV$$

$$d(PV) = PdV + VdP \quad \Longrightarrow \quad P\frac{dV}{m} = \frac{1}{m}d(PV) - \frac{V}{m}dP = d(\frac{P}{\rho}) - \frac{dP}{\rho}$$

D'où $de = Tds - d(\frac{P}{\rho}) + \frac{dP}{\rho}$

$$\Longrightarrow \quad dh = de + d(\frac{P}{\rho})$$

$$dh = Tds - d(\frac{P}{\rho}) + \frac{dP}{\rho} + d(\frac{P}{\rho})$$

$$dh = Tds + \frac{dP}{\rho}$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = T.\rho.\frac{ds}{dt} + \frac{dP}{dt}$$

$$\Longrightarrow \qquad T\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(K\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \psi + \phi$$

* <u>en fonction de la capacité calorifique à pression constante</u>

h est fonction d'état en particulier, on peut l'exprimer en fonction des variables (P,T)

$$dh = (\frac{\partial h}{\partial P})_T dP + (\frac{\partial h}{\partial T})_P dT$$

Avec $(\frac{\partial h}{\partial T})_P = C_p$ et $(\frac{\partial h}{\partial P})_T = \frac{1}{\rho}(1 - \beta.T)$

$\beta$ : Coefficient de dilatation cubique

$$\beta = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_p$$

Pour le cas des gaz parfaits $\beta = -\frac{1}{T}$

Par conséquent $dh = C_p dT + \frac{1}{\rho}(1 - \beta.T)dP$

D'où $\frac{dh}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\rho}(1 - \beta.T)\frac{dP}{dt}$

$$\Longrightarrow \qquad \rho\frac{dh}{dt} - \frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(K\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \psi + \phi$$

$$\Longrightarrow \qquad \rho.C_p.\frac{dT}{dt} + \frac{dP}{dt} - \beta.T.\frac{dP}{dt} - \frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(K\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \psi + \phi$$

$$\Longrightarrow \qquad \rho.C_p.\frac{dT}{dt} - \beta.T.\frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i}(K\frac{\partial T}{\partial x_i}) + \psi + \phi$$

Si : $\rho = cte \Longrightarrow \beta = 0$

## 3.- Résumé : Formulation mathématique des problèmes de Mécanique des fluides (Ecoulement Laminaire)

Les grandeurs locales et instantanées que l'on cherche à calculer sont en général au nombre de six P, $\rho$, T, $u_i$. Elles sont liées par 6 équations couplées, qui expriment pour un fluide visqueux Newtonien :

- l'équilibre local du fluide (équation d'état)
- la conservation de la masse
- la loi fondamentale de la dynamique
- la loi de conservation de l'énergie

Dans le cas d'un fluide de viscosité et de conductivité thermique constante, nous avons :

| | |
|---|---|
| Equation d'état | $f(P,\rho,T) = 0$ |
| Continuité | $\frac{d\rho}{dt} + \rho.div\vec{u} = 0$ |
| Mouvement | $\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho.\vec{F}_v - grad\vec{P} + \mu.\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)grad\vec{(}div.\vec{u})$ |
| Energie | $\rho.C_p.\frac{dT}{dt} - \beta.T.\frac{dP}{dt} = K.\nabla^2 T + \psi + \phi$ |

En général $\vec{F}_v$ et $\psi$ sont données par la nature du problème et $\phi$ est la dissipation visqueuse.

Pour le cas d'un **fluide incompressible,** le système se découple en 3 équations :

| | | |
|---|---|---|
| Continuité | $div\vec{u} = 0$ | $\rho = cte$ |
| Navier - Stokes | $\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho.\vec{F}_v - gra\vec{d}P + \mu.\Delta\vec{u}$ | |
| Energie | $\rho.C_p.\frac{dT}{dt} = K.\nabla^2 T + \psi + \phi$ | |

Si le fluide est supposé parfait (non conducteur de chaleur et non visqueux) et non chauffé ($\psi = 0$) et si le fluide se comporte comme un gaz parfait,les équations s'écrivent :

Equation d'état : $P = \rho\frac{RT}{M}$

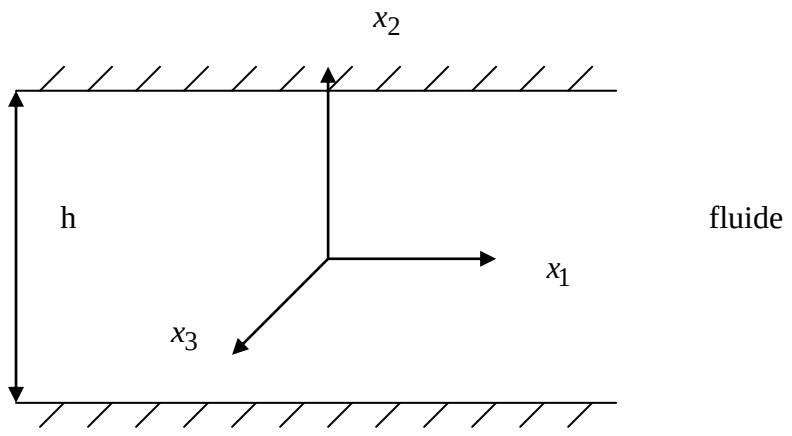
Continuité : $\frac{d\rho}{dt} + \rho.div\vec{u} = 0$

Mouvement : $\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \rho.\vec{F}_v - gra\vec{d}P$

Energie : $\rho.C_p.\frac{dT}{dt} - \beta.T.\frac{dP}{dt} = 0$

## 4- Quelques solutions analytiques des équations de Navier – stokes

### 4.1-Ecoulement Laminaire entre 2 plaques parallèles



**Hypothèses**

1- $\rho = cte$ , fluide incompressible

2- Les plaques parallèles s'étendent à l'infini suivant la direction $\vec{x}_3, \frac{\partial}{\partial x_3} = 0$

3- Ecoulement laminaire unidimensionnel, $u_2 = u_3 = 0$

4- Ecoulement permanent, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

5- Fluide non pesant, $F_v = 0$

6- On néglige $\psi = \phi = 0$

Continuité : $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$

$\Longrightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \Longrightarrow \quad u_1 = f(x_2, x_3) \Longrightarrow \quad u_1 = f(x_2)$

L'équation de Navier – Stokes

Suivant la direction $o\vec{x}_1$ :

$$\rho(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial x_3}) = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3})$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Suivant la direction $o\vec{x}_2$

$$-\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$$

Suivant la direction $o\vec{x}_3$

$$-\frac{\partial P}{\partial x_3} = 0$$

Donc d'après les équations de conservation

$P = P(x_1)$

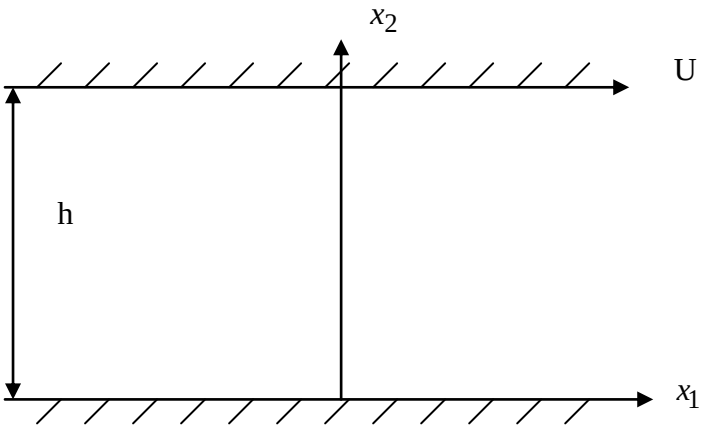
$u_1 = u_1(x_2)$

**(1)** $\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial x_1}$

$\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial x_1} x_2 + A$

$\Longrightarrow$ $u_1(x_2) = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial P}{\partial x_1}\dfrac{x_2^2}{2} + A.x_2 + B$

## 4.2- Ecoulement Plan de Couette




**Hypothèses** :

- Plaque supérieure en mouvement de translation (U)
- Plaque inférieure fixe

Rappel de l'équation du mouvement entre 2 plaque parallèles

$u_1(x_2) = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dP}{dx_1}\dfrac{x_2^2}{2} + A.x_2 + B$

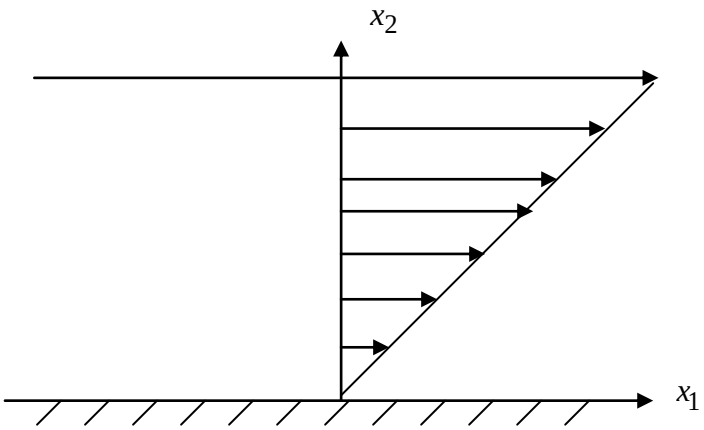
Les conditions aux limites

Si : $x_2 = 0 \quad u_1 = 0 \quad B = 0$

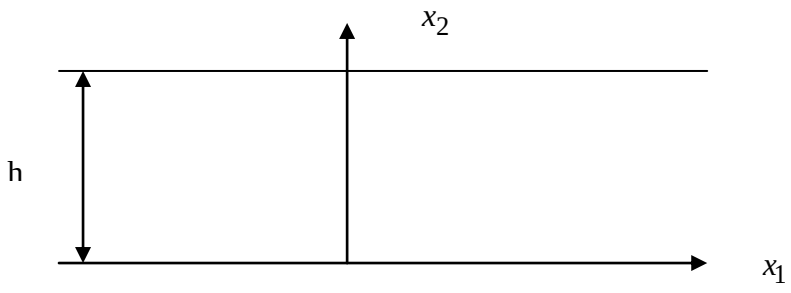
$$x_2 = h \quad u_1 = U \qquad U = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx_1}\frac{h^2}{2} + A.h$$

Pour le cas de l'écoulement de Couette, on considère $\frac{dP}{dx_1} = 0$ (l'écoulement est provoqué par le mouvement de la plaque supérieure), $A = \frac{U}{h}$

D'où le profil de vitesse $u_1(x_2) = \frac{U}{h}x_2$




## 4.3- Ecoulement Plan de Poiseuille




**Hypothèses :**

- 2 plaques sont au repos

- Ecoulement engendré par $\frac{dP}{dx_1}$

L'équation de base

$$u_1 = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}x_2^2 + A.x_2 + B$$

Les conditions aux limites

Si : $x_2 = 0 \quad u_1 = 0 \quad B = 0$

$$x_2 = h \quad u_1 = 0 \qquad 0 = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}h^2 + A.h + 0$$

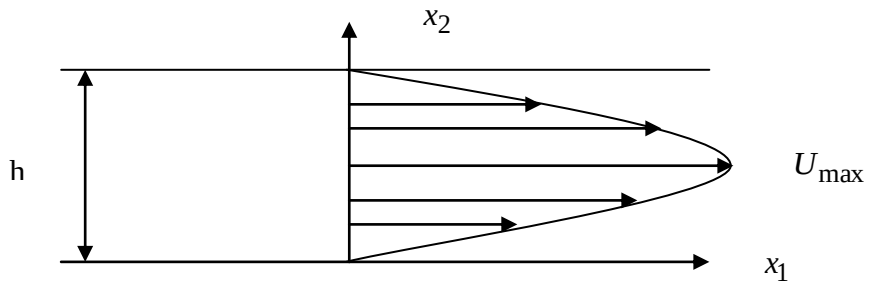
$$\Longrightarrow \qquad A = -\frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}h$$

D'où le profil de vitesse

$$u_1 = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}(x_2^2 - h.x_2)$$

La vitesse est maximale pour $\frac{du_1}{dx_2} = 0 \qquad \frac{du_1}{dx_2} = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}(2.x_2 - h) = 0$

$u_1 = U_{\max}$ Pour : $x_2 = \frac{h}{2}$




$$U_{\max} = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2}\right)$$

$U_{\max} = -\frac{1}{8.\mu} h^2 \frac{dP}{dx_1}$ Avec : $\frac{dP}{dx_1} < 0$ la pression décroît dans le sens de l'écoulement.

D'où : $u_1 = 4U_{\max}(-\frac{x_2^2}{h^2} - \frac{x_2}{h})$

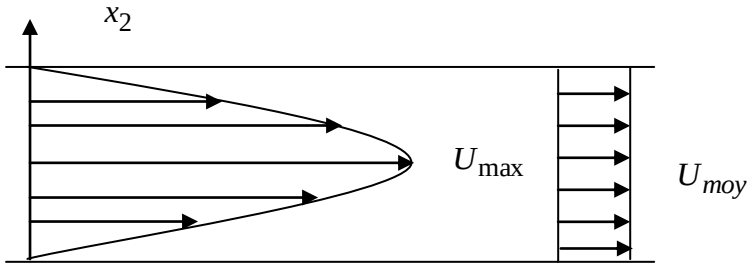
* si on calcul le débit volumique $q_v$ par unité de largeur

$dq_v = u_1 dS$ Avec : $dS = dx_2$

$$q_v = \int_0^h u_1.dx_2 = \int_0^h 4.U_{\max}(\frac{x_2}{h} - \frac{x_2^2}{h^2}).dx_2$$

$$q_v = 4.U_{\max}\left[\frac{x_2^2}{2h} - \frac{x_2^3}{3h^2}\right]_0^h = 4.U_{\max}\left[\frac{h^2}{2h} - \frac{h^3}{3h^2}\right]$$

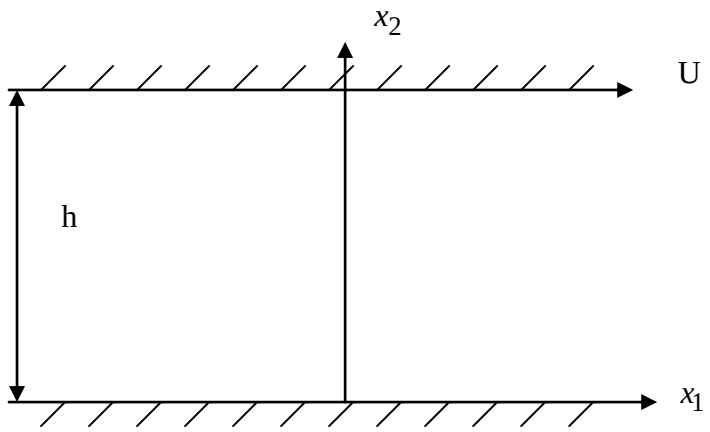
$$q_v = \frac{2}{3}U_{\max}.h$$




$$q_v = \frac{2}{3}U_{\max}.h = U_{moy}.h$$

$$U_{moy} = \frac{2}{3}U_{\max}$$

## 4.4- Ecoulement Plan de Couette généralisé




**Hypothèses :**

- Plaque supérieure en mouvement de translation (U)
- Plaque inférieure fixe
- le gradient de pression $\frac{dP}{dx_1} \neq 0$

L'équation de base

$$u_1 = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}x_2^2 + A.x_2 + B$$

Les conditions aux limites

$$x_2 = 0 \quad u_1 = 0 \quad B = 0$$

$$x_2 = h \quad u_1 = U \quad U = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}h^2 + A.h$$

$$\Longrightarrow \qquad A = \frac{U}{h} - \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}h$$

D'où

$$u_1 = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}x_2^2 + (\frac{U}{h} - \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx_1}\frac{h}{2})x_2 + 0$$

$$u_1 = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}(x_2^2 - h.x_2) + \frac{U}{h}x_2$$

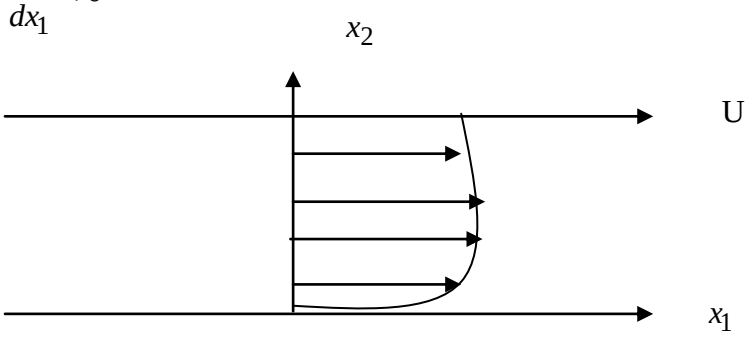
On constate que le profil est une combinaison linéaire des 2 résultats précédents :

Ici : $\frac{dP}{dx_1} \neq 0$

$\frac{dP}{dx_1} < 0$

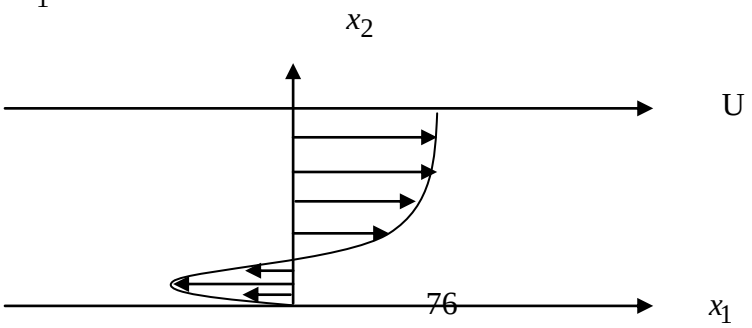
$\frac{dP}{dx_1} > 0$

- Pour : $\frac{dP}{dx_1} < 0$



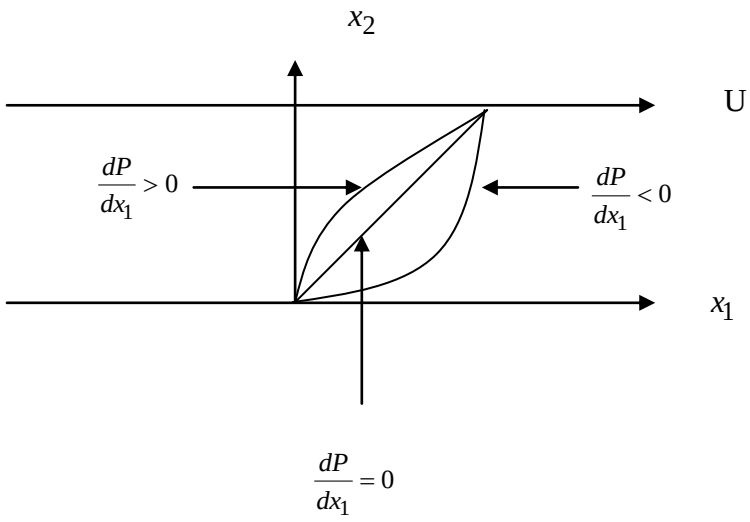

L'écoulement est parabolique, mais non symétrique

- Pour : $\frac{dP}{dx_1} > 0$



L'écoulement est renversé dans une partie de l'écoulement

Il serait intéressant de calculer le gradient de pression critique au niveau duquel, il y a renversement de l'écoulement.




$(\frac{dP}{dx_1})_{critique}$ est obtenue en posant, $\frac{du_1}{dx_2} = 0$ pour : $x_2 = 0$ avec $\frac{dP}{dx_1} \neq 0$

Comme $u_1 = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}(x_2^2 - h.x_2) + \frac{U}{h}x_2$

$$\frac{du_1}{dx_2} = \frac{1}{2.\mu}\frac{dP}{dx_1}(2.x_2 - h) + \frac{U}{h} = 0$$

Pour : $x_2 = 0$ $\qquad -\frac{1}{2.\mu}h.(\frac{dP}{dx_1})_{critique} + \frac{U}{h} = 0$

$\Longrightarrow$ $\qquad (\frac{dP}{dx_1})_{critique} = 2\mu\frac{U}{h^2}$

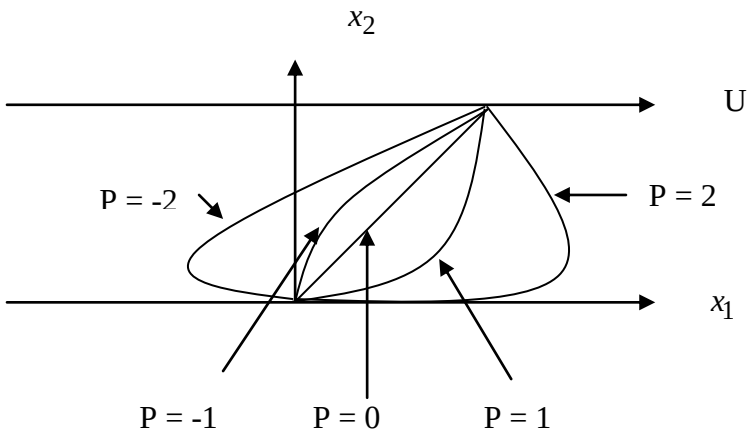
Si on pose la variable sans dimension $P = -\frac{h^2}{2\mu U}(\frac{dP}{dx_1})$

Ainsi on obtient le profil suivant :

$$u_1 = P.U(\frac{x_2}{h} - (\frac{x_2}{h})^2) + \frac{U}{h}x_2$$

Et on aura pour :

| | | |
|---|---|---|
| P = 0 | $u_1 = \frac{U}{h}x_2$ | Ecoulement plan de Couette |
| P = 1 | $u_1 = U(\frac{x_2}{h} - (\frac{x_2}{h})^2) + \frac{U}{h}x_2$ | Ecoulement parabolique non symétrique |
| P > 1 | $u_1 = U(\frac{x_2}{h} - (\frac{x_2}{h})^2) + \frac{U}{h}x_2$ | Ecoulement parabolique non symétrique |
| P = -1 | $u_1 = +U(\frac{x_2}{h})^2$ | Ecoulement critique |
| P < 1 | $u_1 = P.U(\frac{x_2}{h} - (\frac{x_2}{h})^2) + \frac{U}{h}x_2$ | Ecoulement renversé |



# TD DE MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

## EXERCICE 1

On considère le champ d'écoulement bidimensionnel permanent d'un milieu continu défini par le champ de vitesse suivant :

$u_1 = -Ax_1$
$u_2 = +Ax_2$

A est une constante

1. Déterminer l'équation et l'allure des lignes de courant
2. Déterminer le champ des accélérations

## EXERCICE 2

Soit le mouvement caractérisé par :

$U_1 = U_{01} \exp(kt)$
$U_2 = U_{02} \exp(kt)$
$U_3 = U_{03} \exp(kt)$

ou k est une constante

1. Déterminer la nature de la trajectoire du milieu continu en mouvement.

Déterminer les champs de vitesse et d'accélération en utilisant les représentations Lagrangiennes et Eulériennes

## EXERCICE 3

Soit le mouvement plan d'un milieu continu, défini par son champ de déplacement :

$$u_1 = \frac{ax_1 + bx_2}{x_1^2 + x_2^2} \qquad u_2 = \frac{ax_2 - bx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

*a,b étant des constantes*

1. Montrer que le mouvement est celui d'un milieu incompressible.
2. Montrer que le mouvement est irrotationnel.
3. Déterminer le champ d'accélération.

## EXERCICE 4

L'air est considéré comme un gaz parfait et on admettra que la température est constante.

1. Etablir la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude.
2. A quelle altitude z, la pression est elle moitié de la pression atmosphérique $P_{atm}$.

3. Tracer la courbe de la variation de la pression avec la profondeur dans l'eau et avec l'altitude en supposant que la pression atmosphérique règne au niveau de la mer.

On donne : la masse molaire de l'air M=29g, T=290°K et R=8.32 J/mol.°K

**EXERCICE 5**

Soit un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :
- de l'huile de masse volumique $\rho_1$=850 kg/m3 sur une hauteur $h_1$=6 m,
- de l'eau de masse volumique $\rho_2$=1000 kg/m3 sur une hauteur $h_2$=5 m.

On désigne par:
- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézométriques,
- (O, Z) est un axe vertical tel que ZC=O.

Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique entre les points:
1. B et A. En déduire la pression PB (en bar) au point B.
2. A et E. En déduire le niveau de l'huile ZE dans le tube piézométrique.

**EXERCICE 6**

Soit un tube en U dont les branches sont très longues de section s= 1cm$^2$, est ouvert aux deux extrémités. Il contient de l'eau. D'un coté, on verse 10 cm$^3$ d'huile, la différence de niveau des surfaces libre est x=15 mm.

1. Calculer la densité relative de cette huile.
2. On relie la branche qui contient de l'huile à une conduite de gaz pour mesurer la pression de ce gaz. l'autre branche du tube est toujours en contact avec l'atmosphère. La surface de séparation de l'huile et de l'eau se déplace de y=15 cm. Calculer l'excès de pression du gaz sur la pression atmosphérique.

**EXERCICE 7**

Soit en un point M d'un milieu continu, la matrice associée au tenseur des contraintes $\sigma_{i,j,}$

$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} 7a & 0 & -3\sqrt{3a} \\ 0 & 25a & 0 \\ -3\sqrt{3a} & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Définie par rapport à $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, k est une constante et a est un paramètre de charge :

1. Quel est l'état de la contrainte en M pour a=0
2. Déterminer les contraintes principales pour a=1
3. Déterminer les directions principales
4. Calculer la contrainte appliquée au point M sur la facette de normale (√2/2, √2/2, 0)
5. Effectuer la représentation de Mohr

**EXERCICE 8**

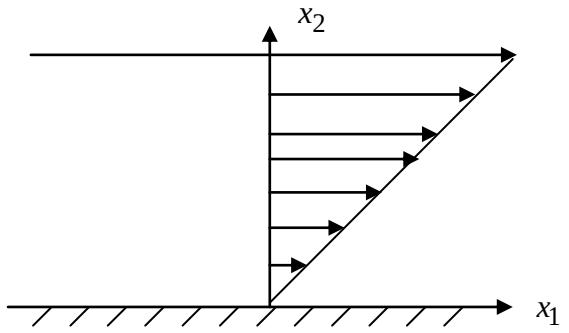
Dans le cadre des petites déformations, on donne le champ des déplacements :

$u_1 = kx_2$
$u_2 = kx_3$ Ou k est constante petite
$u_3 = kx_1$

1. Déterminer le tenseur des déformations $\varepsilon_{ij}$
2. Déterminer les allongements unitaires principaux
3. Déterminer les directions principales
4. Déterminer le vecteur de rotation ω ; En déduire le vecteur tourbillon

**EXERCICE 9**

Soit l'écoulement plan de Couette d'un fluide visqueux entre 2 plaques parallèles dont l'une est mobile de vitesse $U_0$




1) Déterminer le tenseur des déformations
2) Déterminer le tenseur des contraintes
3) Déterminer le vecteur contrainte $\vec{T}$ agissant sur un point M du fluide dont la normale $\vec{n}$ à pour cosinus directeurs (1,1)

**EXERCICE 10**

Un réservoir cylindrique représenté par la figure est ouvert à l'air libre, a une section $S_A$ de diamètre $D_A$ = 2 m. Il est muni, à sa base, d'un orifice de vidange de section $S_B$ et de diamètre $D_B$ = 14 mm. Le réservoir est plein jusqu'à une hauteur $H=(Z_A - Z_B)$ = 2,5 m d'un liquide considéré comme fluide parfait, de masse volumique $\rho$=817 kg/m$^3$.

**Partie 1** : **On considère l'orifice fermé par un bouchon.**

1. En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique, déterminer la pression $P_B$ au point B.
2. En déduire la valeur de la force de pression $F_B$ s'exerçant sur le bouchon.

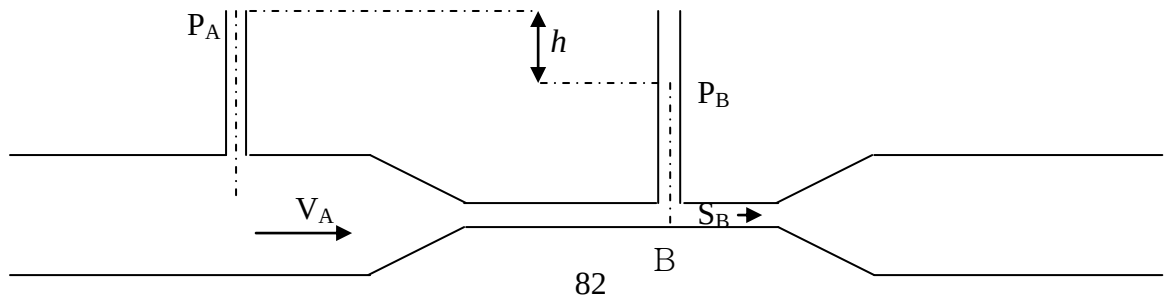
**Partie 2** : **L'orifice est maintenant considéré ouvert.**

On procède à la vidange du réservoir.
Le liquide s'écoule du réservoir par l'orifice. Sa vitesse moyenne d'écoulement au point A est notée $V_A$, et sa vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice est notée $V_B$.

1. En considérant $V_A \neq 0$ et en appliquant le théorème de Bernoulli entre A et B, établir l'expression littérale de la vitesse $V_B$ en fonction de g, H et a.
2. Calculer la valeur de a. L'hypothèse de considérer un niveau H du fluide variant lentement est elle vraie ? Justifier votre réponse.
3. Calculer $V_B$ en considérant l'hypothèse que $V_A$=0.
4. Calculer le débit volumique $Q_V$ du fluide qui s'écoule à travers l'orifice.
5. Calculer la durée T du vidange, si ce débit restait constant.

## EXERCICE 11

Une conduite de section principale $S_A$ et de diamètre d subit un étranglement en B où sa section est $S_B$ (Voir figure) On désigne par $a = S_A/S_B$ le rapport des sections.
Un fluide parfait incompressible de masse volumique $\rho$, s'écoule à l'intérieur de cette conduite. Deux tubes plongent dans la conduite ayant des extrémités respectivement A et B.
Par lecture directe de la dénivellation h, les deux tubes permettent de mesurer le débit volumique $Q_v$ qui traverse la conduite.
1) Donner l'expression de la vitesse $V_B$ en fonction de $V_A$ et a.
2) Donner l'expression de la différence de pression $(P_A-P_B)$ en fonction de $\rho$, $V_A$ et a.
3) Donner l'expression de la vitesse d'écoulement $V_A$ en fonction de g, h, et a
4) Donner l'expression du débit volumique $Q_v$ en fonction de d, g, h, et a .En déduire l'application numérique du débit $Q_v$ pour d=50 mm et a = 2 ,



## EXERCICE 12

Soit l'écoulement laminaire permanent d'un fluide visqueux dans un tuyau, obéissant à la loi de distribution des vitesses :

$$V(y)= ay(b-y)$$

On donne $\mu$= $4.10^{-2}$ Pa/s, $\rho$= 900 kg/$m^3$, R=5cm et $V_{max}$=1,6 m/s

1. Exprimer les coefficients a et b en fonction de R et $V_{max}$
2. Calculer la force de viscosité par unité de surface $F_s$ pour des couches fluides à la distance y distance y de la paroi du tuyau.
3. Calculer en N/$m^2$ le module de la force de viscosité à la distance R/3 de la paroi

## EXERCICE 13

Soit le mouvement permanent d'n fluide visqueux incompressible entre deux plaques horizontales distantes de h. L'écoulement du fluide se fait suivant une seule direction x, le mouvement est provoqué par :

- Le mouvement uniforme de vitesse $V_0$ de la plaque supérieure, de cote y=h, alors que la plaque inférieure est fixe
- Et un gradient de pression, appliqué à la direction de Ox,. G est une constante positive

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-G$$

1. Montrer que le champ de vitesses du fluide en M est indépendant de l'abscisse x .
2. Montrer que l'accélération du fluide est nulle en tout point M
3. Ecrire l'équation de Navier-Stokes au point M du fluide et déterminer la loi de pression au point M. Etablir la loi de distributions de vitesses v(y) du fluide
4. Calculer la force de viscosité par unité de surface F, au niveau de chacune des deux plaques, puis au niveau du plan médian (y=h/2)
5. On se place, dans le cas de l'écoulement de Couette. Déterminer la loi de vitesses v(y)