Chapitre 4

Nombres complexes, fonctions et formules trigonométriques

4.1 Nombres complexes

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib : a,\, b \in \mathbb{R}\}$$

où $i^2 = -1$.
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition 4.1.1. *On dit que l'écriture $z = a + ib$ où a et $b \in \mathbb{R}$, est la forme algébrique de z. Cette écriture est unique.*
$a = \Re(z)$ est la partie réelle de z et $b = \Im(z)$ est la partie imaginaire de z.
Tout nombre complexe non nul tel que $\Re(z) = 0$ est appelé imaginaire pur.
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ deux nombres complexes. $z = z' \Longleftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

$\mathbb{C}$ est muni de deux lois de composition internes, l'addition $+$ et la multiplication $\times$: soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$.

1. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
2. $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

Définition 4.1.2. *Le module d'un nombre complexe z est : $\mid z \mid = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} \in \mathbb{R}^+$.*
Le conjugué d'un nombre complexe z est : $\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z) \in \mathbb{C}$.

Proposition 4.1.1. *$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, on a*

1. *$z + \bar{z} = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$*
2. *$z\bar{z} = \mid z \mid^2$*

3. *Si* $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{\mid z \mid^2}$
4. *Si* $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = z\dfrac{1}{z'} = \dfrac{z\bar{z'}}{\mid z' \mid^2}$
5. $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$, $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$,
6. $\mid zz' \mid = \mid z \mid \mid z' \mid$
7. $\mid \frac{z}{z'} \mid = \frac{|z|}{|z'|}$
8. $\mid z + z' \mid \leq \mid z \mid + \mid z' \mid$ *(Inégalité triangulaire)*

Exercice 4.1.1. Prouvez cette proposition. Et montrez que le module est une **distance** sur $\mathbb{C}$.
Quelles sont les parties réelles et imaginaires du complexe $\frac{1+i}{2+3i}$?

4.1.1 Equations du second degré

Théorème 4.1.1. (de d'Alembert) *Tout polynôme à coefficient dans* $\mathbb{C}$ *admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

On s'intéresse aux équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ (où a, b et $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$). $P(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du second degré.
Mise sous forme canonique :

$$P(x) = a[x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}],$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$.
$P(x) = 0 \Longleftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ car $a \neq 0$. Les racines de P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

1. Si $\Delta < 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et P n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$. Ses racines sont dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = -\frac{\mid \Delta \mid}{4a^2} = (i)^2.(\frac{\sqrt{\mid \Delta \mid}}{2a})^2$$

$$\Longleftrightarrow x + \frac{b}{2a} = i\frac{\sqrt{\mid \Delta \mid}}{2a} \text{ ou } -i\frac{\sqrt{\mid \Delta \mid}}{2a}$$

$$\Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\mid \Delta \mid}}{2a} \text{ ou } -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\mid \Delta \mid}}{2a}.$$

2. Si $\Delta = 0$, P admet une unique racine dans $\mathbb{R}$. On dit qu'elle est double ou de multiplicité 2.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

3. Si $\Delta > 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et P admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = (\frac{\sqrt{\Delta}}{2a})^2$$

$$\Longleftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} := x_1 \text{ ou } -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} := x_2.$$

4. Résoudre $P(x) = 0$ est équivalent à résoudre le système suivant $\begin{cases} x + y & = & -\frac{b}{a} \\ xy & = & \frac{c}{a} \end{cases}$.

Remarque 4.1.1. En pratique, pour factoriser un polynôme et trouver ses racines, on commence par chercher s'il a des racines évidentes : $0, 1, -1, \ldots$. Par exemple, -1 est évidemment racine de $P(x) := 3x^2 + 2x - 1$, donc on commence par écrire $P(x) = (x + 1)(px + q)$ avant de déterminer p et q.

Exercice 4.1.2. 1) Tracez schématiquement la courbe $y = P(x)$ dans un repère orthogonal (xOy) de $\mathbb{R}^2$, dans les trois cas : $\Delta = 0, \Delta > 0, \Delta < 0$.
2) Etudiez le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$, dans les trois cas précédents.
3) Résoudre $x + 1 = \sqrt{11 - x}$.

Exercice 4.1.3. Inéquations et systèmes d'inéquations
Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + 3z < -2$,

2. $-2z^2 + 6z - 5 = 0$.

4.1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

* Le nombre complexe $z = a + ib$ est associé au point $M = (a, b)$ du plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Ce point M est appelé point image de z et le vecteur $\vec{OM} = (a, b)$ est appelé vecteur image de z, tandis que $z = a + ib$ est l'affixe du point M ou du vecteur $\vec{OM}$.
$\mid z \mid = OM$.
* Si les deux points A et B ont pour affixes les deux complexes z_A et z_B, alors $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$.
$\mid z_B - z_A \mid = \mid\mid \vec{AB} \mid\mid$.
* Si les deux points A et B ont pour affixes les deux complexes z_A et z_B, alors $(z_A + z_B)/2$ est l'affixe du milieu du segment $[AB]$.
* Soient $M(a, b)$ le point d'affixe z et k un réel non nul. Le produit kz est l'affixe du point

$P(ka, kb)$ vérifiant $\vec{OP} = k\vec{OM}$. P est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.
* Soient M le point d'affixe z. Alors le produit iz est l'affixe du point $N(-b, a)$, image de M dans la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

Exercice 4.1.4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $x + iy$ tels que :

1. $\begin{cases} x + 2y & \leq & 4 \\ x - y & < & 1 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} x^2 & < & y \\ y & < & \frac{x+3}{2} \end{cases}$.

4.1.3 Cercle trigonométrique et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Le cercle trigonométrique (ou cercle unité) $\mathcal{C}$ est le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ (identifié au plan de coordonnées (xOy) muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$) constitué des points à une distance 1 de l'origine : le cercle de centre O et de rayon 1. Il peut être identifié au sous ensemble de $\mathbb{C}$ suivant

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} :\mid z \mid= 1\}.$$

Représentez le sur votre feuille sans l'aide de votre calculatrice !
On note I le point de coordonnées $(1, 0)$ et J le point de coordonnées $(0, 1)$.

Rappels :
* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un angle. Soit A le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{OI}, \vec{OA}) = \alpha$. On appelle cosinus et sinus de l'angle α, et l'on note $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, les coodonnées du point A dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
* $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
* $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$.
* $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$, $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$.
* Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors $\cos\alpha \neq 0$ et $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
Placer dans le plan (xOy) le point T de coordonnées $(1, \tan\alpha)$.
Vérifier que T est le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en I et de la droite (OA).

Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'affixe z. Alors $z = \cos\theta + i\sin\theta$, où $\theta \in \mathbb{R}$ (en radians).

Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$. $r =\mid z \mid= \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ son module. Alors $\frac{z}{r} \in \mathbb{C}^*$ et même $\mid \frac{z}{r} \mid= 1$. Donc il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\frac{z}{r} = \cos\theta + i\sin\theta$. La forme trigonométrique de z est

$$z =\mid z \mid (\cos\theta + i\sin\theta).$$

θ est un argument de z. $\theta + 2k\pi$ en sont d'autres ($k \in \mathbb{Z}$).

ATTENTION : l'origine O n'a pas d'argument.

On écrit (en l'admettant) **la forme trigonométrique** de z : $z = \mid z \mid e^{i\theta}$, où la fonction $e^{\cdot}$ est la fonction exponentielle.

Exercice 4.1.5. Donnez la forme exponentielle des nombres complexes $1 - i$, i et -1.

Notations. on écrit que 2 réels x et y sont égaux modulo 2π

$$x \equiv y[2\pi]$$

s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$.

Théorème 4.1.2. *Deux nombres complexes non nuls sont égaux ssi ils ont même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.*

Proposition 4.1.2. $arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)$, $arg(-z) \equiv \pi + arg(z)$, $arg(zz') \equiv arg(z) + arg(z')$, $arg(1/z) \equiv -arg(z)$, $arg(z/z') \equiv arg(z) - arg(z')$

Cela provient des règles de calcul de la fonctions exponentielle : $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$, $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Proposition 4.1.3. .

1. **Formule de De Moivre**. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.
2. **Formules d'Euler**. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

4.1.4 Nombres complexes et transformations du plan

Translation. Soient z, z' et a des nombres complexes. La transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + a$, est la translation de vecteur $\vec{u}$ ayant pour affixe a.
Montrez le.

Homothétie. Soient z, z' et ω des nombres complexes et k un réel non nul. La transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = k(z - \omega)$, est l'homothétie de rapport k et de centre le point Ω d'affixe ω.
Montrez le.

Rotation. Soient z, z' et ω des nombres complexes et α un réel. La transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$, est la rotation d'angle α et de centre le point Ω d'affixe ω.
Montrez le.

4.1.5 Exercices

Exercice 4.1.6.

1. Calculer i^2,i^3 et i^4 ; en déduire les entiers n tels que i^n est imaginaire pur.
2. Donner les coordonnées polaires de $1+i, (1+i)^2, (1+i)^4$ et en déduire les entiers naturels n tels que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.

Exercice 4.1.7. QCM

On pose $z = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

   (a) $2\sqrt{2}$ (c) $2-\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2})$
   (b) $-2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

   (a) $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ (b) $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ (c) $4e^{3i\frac{\pi}{4}}$ (d) $4e^{-3i\frac{\pi}{4}}$

3. z s'écrit sous forme exponentielle

   (a) $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ (b) $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ (c) $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ (d) $2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$

4. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ sont respectivement les cosinus et sinus de

   (a) $\frac{7\pi}{8}$ (b) $\frac{5\pi}{8}$ (c) $\frac{3\pi}{8}$ (d) $\frac{\pi}{8}$

Exercice 4.1.8. Vrai ou faux ?

On assimile le plan complexe à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z-1| = |z+2i|$ est la médiatrice de $[AB]$ où A est d'affixe -1 et B est d'affixe $2i$.
2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $z = 2i + 2e^{i\theta}$ avec θ réel quelconque est le cercle de centre $B(2i)$ et de rayon 2.
3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg\frac{z+1}{z-2i} = 0(2\pi)$ est inclus dans la droite d'équation $y = 2x+2$.
4. L'homothétie de centre B d'affixe $2i$ et de rapport -2 a pour forme complexe $z' - 2i = 2e^{i\pi}(z-2i)$.

Exercice 4.1.9. Représenter l'ensemble des points d'affixe z tels que

1. $\operatorname{Re} z = -2$
2. $\operatorname{Im} z = \sqrt{2}$
3. $\operatorname{Re}(z^2) = 0$
4. $\operatorname{Im}(z^2) = 2$
5. $|z-3| = |z-3i|$
6. $|2-3i+z| = |2+3i|$
7. $|\bar{z}-4+i| = 1$
8. $\arg(\bar{z}) = \arg(-z)(2\pi)$
9. $\arg(\bar{z}+2) = -\frac{\pi}{2}$
10. $\arg(z-2) = \arg(z-i)$

Exercice 4.1.10. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+3i)+(2-i)$
2. $z_2 = (5-i)(7+4i)$
3. $z_3 = (\frac{1}{2}-4i)-(-\frac{3}{2}+2i)$
4. $z_4 = (\frac{3}{4}i-2)(i+1)$
5. $z_5 = (2+5i)^2$
6. $z_6 = \frac{1}{\sqrt{3-i}}$
7. $z_7 = \frac{3-3i}{1+i}$
8. $z_8 = \frac{i}{(3+i)^2}$

Exercice 4.1.11. Soit $z = 3+\sqrt{3i}$ et $z' = -1+2i$. Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z - \bar{z}'$
2. $z \cdot \bar{z}$
3. z^2
4. z'^3

Exercice 4.1.12. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $2iz - 3 = z + i$
2. $3z(z+i) = -iz$
3. $(\sqrt{3}z - i)(z+2+3i) = 0$
4. $3z+1+2iz = i-z-2iz$
5. $5z + 2i = (1+i)z - 3$
6. $\frac{z-i}{z+i} = -3$
7. $-\frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = 3+i$
8. $z^2 + 2\bar{z} = -1$
9. $2z + i\bar{z} = 3$
10. $z^2 + z \cdot \bar{z} = 0$

Exercice 4.1.13. Sans calculer, répondre par vrai ou faux :

1. $(2-i)^2 + (2+i)^2$ est un réel.
2. $\overline{(2+i)^3} = (2-i)^3$
3. $\overline{3-iz} = 3+iz$
4. $\frac{5-i}{3+2i} - \frac{5+i}{3+2i}$ est imaginaire pur.

Exercice 4.1.14. Résoudre les équations suivantes en se ramenant à des équations du second degré :

1. $(z^2+2)(z^2-4z+4) = 0$
2. $(t^2-5)(t^2+6t+14) = 0$
3. $x^3 + 6x^2 + 13x = 0$
4. $(t^2+3)(2t^2+2t-4) = 0$
5. $(4z^2-4z+101)(z^2+1) = 0$

Exercice 4.1.15.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+az+b)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On appelle j la solution de partie imaginaire positive. Que vaut j^3 ?

3. Etablir que $j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$.
4. Donner la forme algébrique de j^n suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.1.16. Soit $z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $|z| = 1$
2. $\arg z = -\frac{\pi}{3}$
3. $\bar{z} = -e^{-i\frac{\pi}{3}}$
4. $\bar{z} = \frac{1}{z}$
5. $z \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
6. $z^3 = 1$

Exercice 4.1.17. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants, puis leur forme exponentielle :

1. $z_1 = \sqrt{3} + 3i, z_2 = -2 + 2i, z_3 = -i, z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}, z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, z_6 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$
2. $z_1 = 5 - 5i, z_2 = (-i)(2 + 2\sqrt{3}i), z_3 = (-1 + i\sqrt{3})^3$
3. $z_1 = -(\sqrt{6} + i\sqrt{2}), z_2 = (\sqrt{6} + i\sqrt{2})i, z_3 = \frac{i}{(\sqrt{6}+i\sqrt{2})^2}$

4.2 Fonctions cosinus, sinus et tangente

4.2.1 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie	0

4.2.2 Formules trigonométriques

$\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$,
$\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$,
$\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$,
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$,
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

Démontrez ces formules graphiquement !

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$,
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
$\sin(a - b) = -\cos a \sin b + \sin a \cos b$,
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$,
$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$,

Démontrez ces formules en utilisant les règles de calcul de la fonction exponentielle

4.2.3 Etude des fonctions cosinus, sinus et tangente

Les fonctions cosinus et sinus sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
La fonction tangente est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π ; donc leurs représentations graphiques sont invariantes par translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
Cosinus est paire ; donc sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe (oy).
Sinus est impaire ; donc sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine.
La fonction tangente est périodique de période π et est impaire. Sa représentation graphique est invariante par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$ et est symétrique par rapport à l'origine.

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Tracer les tableaux de variation (complétés des valeurs en $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$ et π) des fonctions cosinus et sinus sur $[-\pi, \pi]$.
Tracer le tableau de variation de la fonction tangente sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Calculez $\lim\limits_{x \to -\pi/2^+} \tan x$ et $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \tan x$.

Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, sont asymptotes verticales à la courbe représentative de la fonction tangente.
Tracer les graphes de ces trois fonctions dans un repère orthonormé.

4.2.4 Exercices

Exercice 4.2.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0; \sin x = 1; \sin x = -1; \sin x = \frac{1}{2}; \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. $\cos x = 0; \cos x = 1; \cos x = -1; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos x = \frac{3}{2}$.
3. $\tan x = 0; \tan x = 1; \tan x = -1; \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 4.2.2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin(\frac{x}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; I = [0, 4\pi]$;
2. $\tan(5x) = 1, I = [0, \pi]$.
3. $\cos(2x) = \cos^2 x, I = [0, 2\pi]$;
4. $|\sin(nx)| = 1$.
5. $\sin x = \tan x, I = [0, 2\pi]$;
6. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2, I = [-\pi, \pi]$.

Exercice 4.2.3. Calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$ à l'aide de l'égalité $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$