Electronique numérique

- Travaux Dirigés -

Sujet n°1 : "Fonctions logiques, tables de vérité, algèbre booléenne, simplification des fonctions logiques"

Exercice 1 (propositions logiques)

Exprimer par une proposition logique que

1) Les variables A, B, C, D sont toutes égales à 1
2) Toutes les variables A, B, C, D sont nulles
3) Au moins l'une des variables A, B, C, D est égale à 1
4) Au moins l'une des variables A, B, C, D est égale à 0

Solution

1) A.B.C.D=1
2) A+B+C+D=0
3) A+B+C+D=1
4) A.B.C.D=0

Exercice 2 (valeurs d'une fonction logique)

Soit la fonction logique suivante, de 4 variables A, B, C et D :

$$f(A,B,C,D) = (A+B+C+D).(A+\overline{B}+\overline{C}+D).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$$

Indiquer pour quelles valeurs des variables d'entrée la fonction vaut 0

Réponses

1) La fonction vaut 0 si un seul des termes du produit vaut 0. Chacun des termes du produit vaut 0 si tous les termes de sa somme valent 0. Donc f vaut 0 pour l'une des 3 combinaisons suivantes :

$$A. = 0; B = 0; C = 0; D = 0$$
$$A. = 0; B = 1; C = 1; D = 0$$
$$A. = 1; B = 1; C = 1; D = 1$$

Exercice 3 (valeurs d'une fonction logique, table de vérité et simplification de fonction)

1) Soit $F(A,B,C) = A.\overline{B} + A.B.C + A.\overline{C}$
   Que valent F(0,1,1), F(1,1,0) et F(1,0,0) ?
2) Vérifier la propriété d'absorption du complément, à l'aide des tables de vérités des 2 fonctions à gauche et à droite du signe = de la relation :
$$\overline{A}.\overline{B} + B = \overline{A} + B$$
3) Soit $F(A,B,C) = A.\overline{B} + A.B + A.C$
   En précisant à chaque fois les propriétés utilisées, montrer que $F(A,B,C) = A$
4) Soit $F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + A.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$

En précisant à chaque fois les propriétés utilisées, montrer que $F(A,B,C) = A + \bar{B}.C$

Solutions

1) F(0,1,1)=0 ; F(1,1,0)=1 ; F(1,0,0)=1
2)

A	B	$\bar{A}.\bar{B} + B$	$\bar{A} + B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

3) $F(A,B,C) = A.\bar{B} + A.B + A.C = A.(\bar{B} + B) + A.C = A + A.C = A.(1 + C) = A$

4) $F(A,B,C) = \bar{A}.\bar{B}.C + A.\bar{B}.\bar{C} + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C} + A.B.C = \bar{A}.\bar{B}.C + A.\bar{B}.(C + \bar{C}) + A.B.(C + \bar{C})$

$= \bar{A}.\bar{B}.C + A.\bar{B} + A.B = \bar{A}.\bar{B}.C + A.(\bar{B} + B) = \bar{A}.\bar{B}.C + A = \bar{B}.C + A$

Exercice

Déterminer la forme somme-de-produit (ou disjonctive) standard (ou canonique) suivante :

$$\bar{A}.\bar{B}. + A.B.\bar{C}.D$$

Solution

Il faut faire apparaître les variables C et D dans le 1er terme. On le multiplie d'abord par $C + \bar{C}$:

$$\bar{A}.\bar{B} = \bar{A}.\bar{B}.(C + \bar{C}) = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$$

Puis on multiplie chacun des 2 termes résultants par $D + \bar{D}$:

$$\bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} = \bar{A}.\bar{B}.C(D + \bar{D}) + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}(D + \bar{D})$$

$$= \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$$

Finalement :

$$\bar{A}.\bar{B}. + A.B.\bar{C}.D = \bar{A}.\bar{B}.C.D + \bar{A}.\bar{B}.C.\bar{D} + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.D + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + A.B.\bar{C}.D$$

Exercice 4 (table de vérité)

Déterminez les valeurs binaires des variables A, B et C pour lesquelles la somme de produits standard suivante est égale à 1 :

$$ABC + A.\bar{B}.\bar{C}. + \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.$$

En déduire la table de vérité de cette fonction.

Solution

Le 1er terme de la somme est égal à 1 si

A=1, B=1 et C=1

Le 2^{e} terme est égal à 1 si

A=1, B=0 et C=0

Le 3^{e} terme est égal à 1 si

A=0, B=0 et C=0

La somme est égale à 1 si au moins 1 des 3 termes est à 1. La table de vérité comporte donc en sortie trois 1 (aux combinaisons des entrées décrites ci-dessus), des 0 partout ailleurs.

Exercice 5 (simplification de fonctions logiques)

En utilisant l'algèbre booléenne, simplifier les expressions suivantes (en les mettant sous forme somme-de-produits) :

$$F_1 = [A.\overline{B}(C+BD)+\overline{A}.\overline{B}]C$$
$$F_2 = \overline{A}.BC + A\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + ABC$$
$$F_3 = \overline{AB+AC} + \overline{A}.\overline{B}.C$$
$$F_4 = BD + B(D+E) + \overline{D}(D+F)$$
$$F_5 = \overline{A}.\overline{B}C + (\overline{A+B+\overline{C}}) + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D$$
$$F_6 = ABCD + AB(\overline{CD}) + (\overline{AB})CD$$
$$F_7 = ABC(AB+\overline{C}(BC+AC))$$
$$F_8 = (B+BC)(B+\overline{B}.C)(B+D)$$

Solution

$$F_1 = [A.\overline{B}(C+BD)+\overline{A}.\overline{B}]C = [A.\overline{B}C + A.\overline{B}BD + \overline{A}.\overline{B}]C = [A.\overline{B}C + A.0.D + \overline{A}.\overline{B}]C$$
$$= [A.\overline{B}C + 0 + \overline{A}.\overline{B}]C = [A.\overline{B}C + \overline{A}.\overline{B}]C = A.\overline{B}CC + \overline{A}.\overline{B}C = A.\overline{B}C + \overline{A}.\overline{B}C$$
$$= (A+\overline{A}.).\overline{B}C = .\overline{B}.C$$

$$F_2 = \overline{A}.BC + A\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + ABC = \overline{A}.BC + (A+\overline{A})\overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + ABC$$
$$= \overline{A}.BC + \overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C + ABC = (\overline{A}+A).BC + \overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C = BC + \overline{B}.\overline{C} + A.\overline{B}.C$$
$$= BC + \overline{B}.(\overline{C}+A.C) = BC + \overline{B}.(\overline{C}+A) = .B.C + A.\overline{B} + \overline{B}.\overline{C}$$

$$F_3 = \overline{AB+AC} + \overline{A}.\overline{B}.C = \overline{AB}.\overline{AC} + \overline{A}.\overline{B}.C = (\overline{A}+\overline{B}).(\overline{A}+\overline{C}) + \overline{A}.\overline{B}.C$$
$$= \overline{A}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{A} + .\overline{A}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C = \overline{A}. + \overline{B}.\overline{A} + .\overline{A}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C$$
$$= \overline{A}. + .\overline{A}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C = \overline{A}. + \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C = \overline{A}. + \overline{B}.\overline{C}$$

$$F_4 = BD + B(D+E) + \overline{D}(D+F) = BD + BD + BE + \overline{D}D + \overline{D}F = BD + BE + \overline{D}D + \overline{D}F$$
$$= BD + BE + \overline{D}F$$

$$F_5 = \overline{A}.\overline{B}C + (\overline{A+B+\overline{C}}) + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D = \overline{A}.\overline{B}C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{\overline{C}} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D = \overline{A}.\overline{B}C + \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D$$
$$= \overline{A}.\overline{B}C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D = \overline{A}.\overline{B}.(C+\overline{C}.D) = \overline{A}.\overline{B}.(C+D) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.D$$

$$F_6 = ABCD + AB(\overline{CD}) + (\overline{AB})CD = AB(CD+\overline{CD}) + (\overline{AB})CD = AB + (\overline{AB})CD = AB + CD$$

$$F_7 = ABC(AB+\overline{C}(BC+AC)) = ABC(AB+\overline{C}.C(B+A)) = ABC(AB) = ABC$$

$$F_8 = (B+BC)(B+\overline{B}.C)(B+D) = B(B+C)(B+D) = (BB+BC)(B+D) = (B+BC)(B+D)$$
$$= B(B+D) = BB+BD = B+BD = B$$

$$= BC + BCD = BC$$

Exercice 6 (table de vérité, forme somme-de-produits et produit-de-sommes)

Soit F(x,y,z) définie par sa table de vérité :

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Donner la forme canonique (ou standard) conjonctive et disjonctive de F.

Solution

1) Forme disjonctive : on regarde les lignes où F vaut 1 ; chacune de ces lignes se traduira par un produit des 3 variables x, y, et z ou de leur complément. S'il y a un 1 dans la colonne de la variable correspondante, on écrit la variable telle quelle dans le produit. S'il y a un 0 on la complémente.

$$F(x,y,z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.\bar{z} + \bar{x}.y.z + x.y.z = \bar{x}.\bar{z} + y.z$$

2) Forme conjonctive : on considère les 0 de la sortie de la table de vérité et non plus les 1. Il y a donc 4 termes :

$$F(x,y,z) = (x.+y+\bar{z}).(\bar{x}+y+z).(\bar{x}+y+\bar{z}).(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

On peut simplifier la fonction par utilisation de la règle de distributivité de la somme par rapport au produit. Rappel :

$$A.+BC = (A.+B).(A.+C)$$

D'où

$$F(x,y,z) = (x.+y+\bar{z}).(\bar{x}+y+z).(\bar{x}+y+\bar{z}).(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

$$= (x.+y+\bar{z}).(\bar{x}+y).(\bar{x}+\bar{y}+z) = (x\bar{x}+y\bar{x}+\bar{z}\bar{x}+xy.+yy+\bar{z}y)(\bar{x}+\bar{y}+z)$$

$$= (\bar{z}\bar{x}+y)(\bar{x}+\bar{y}+z) = \bar{z}\bar{x}+y\bar{x}+\bar{z}\bar{x}\bar{y}+\bar{z}\bar{x}z+yz = \bar{z}\bar{x}+y\bar{x}+\bar{z}\bar{x}\bar{y}+yz$$

$$= \bar{z}\bar{x}+y\bar{x}+yz = \bar{z}\bar{x}+yz$$

La dernière égalité utilise le théorème du consensus.

Exercice

Simplifier les équations logiques suivantes par la méthode algébrique :

$$S_1 = (A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$$

$$S_2 = A + \bar{A}(\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + C + D) + B.\bar{D}$$

$$S_3 = AB\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}CD + \bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + AC$$

Solutions

$$S_1 = (A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B}) = (A.\bar{A} + \bar{B}.\bar{A} + A.B + \bar{B}.B).(\bar{A}+\bar{B}) = (0 + \bar{B}.\bar{A} + A.B + 0).(\bar{A}+\bar{B})$$
$$= (\bar{B}.\bar{A} + A.B).(\bar{A}+\bar{B}) = \bar{B}.\bar{A}.\bar{A} + A.B.\bar{A} + \bar{B}.\bar{A}.\bar{B} + A.B.\bar{B} = \bar{B}.0 + A.\bar{A}.B + \bar{A}.\bar{B}.\bar{B} + A.0$$
$$= A.\bar{A}.B + \bar{A}.\bar{B} = 0.B + \bar{A}.\bar{B} = \bar{A}.\bar{B}$$
$$S_2 = A + \bar{A}(\bar{B}.\bar{C}.\bar{D} + C + D) + B\bar{D} = A + \bar{A}(\bar{B}.\bar{D} + C + D) + B\bar{D} = A + \bar{A}(\bar{B}. + C + D) + B\bar{D}$$
$$= A + \bar{A}.\bar{B}. + \bar{A}.C + \bar{A}.D + B\bar{D} = A + \bar{B}. + \bar{A}.C + \bar{A}.D + B\bar{D} = A + \bar{B}. + C + D + B\bar{D}$$
$$= A + \bar{B}. + C + D + B = A + C + D$$

S_3 est déjà simplifiée.

Exercice 7 (simplification de fonctions)

Calculer les compléments des fonctions suivantes :

$$F_1 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b})$$
$$F_2 = a(c+d) + (\bar{a}+c)(\bar{b}+c+d)$$
$$F_3 = \overline{ab}c + \bar{a}b\bar{c} + a(bc + \overline{bc})$$

Solutions

$$\overline{F_1} = \overline{(a+b)(\bar{a}+\bar{b})} = \overline{a+b} + \overline{\bar{a}+\bar{b}} = \bar{a}.\bar{b} + \bar{\bar{a}}.\bar{\bar{b}} = \bar{a}.\bar{b} + a.b$$
$$\overline{F_2} = \overline{a(c+d) + (\bar{a}+c)(\bar{b}+c+d)} = \overline{a(c+d)}.\overline{(\bar{a}+c)(\bar{b}+c+d)}$$
$$= \overline{ac+ad}.\overline{(\bar{a}+c)(\bar{b}+c+d)} = (\bar{a} + \overline{c+d}).\overline{(\bar{a}+c)(\bar{b}+c+d)} = (\bar{a} + \overline{c+d}).(\overline{\bar{a}+c} + \overline{\bar{b}+c+d})$$
$$= (\bar{a} + \bar{c}.\bar{d}).(\bar{\bar{a}}.\bar{c} + \bar{\bar{b}}.\bar{c}.\bar{d}) = (\bar{a} + \bar{c}.\bar{d}).(a..\bar{c} + b.\bar{c}.\bar{d}) = \bar{a}.a.\bar{c} + \bar{c}.\bar{d}.a.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d} + \bar{c}.\bar{d}.b.\bar{c}.\bar{d}$$
$$= \bar{d}.a.\bar{c} + \bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d} + b.\bar{c}.\bar{d} = \bar{d}.a.\bar{c} + b.\bar{c}.\bar{d}$$

Exercice 8 (simplification de fonctions)

Mettre les fonctions logiques suivantes sous forme disjonctive simplifiée.

$$y_1 = \overline{x_5x_4}x_2 + x_5\bar{x}_4x_2x_1 + x_5x_2x_0 + \bar{x}_4x_2\bar{x}_1 + x_4x_2x_0 + \bar{x}_5x_2x_0$$
$$y_2 = \overline{(\overline{\bar{x}_3x_2}).(\overline{x_3(\bar{x}_2+\bar{x}_1)})}$$
$$y_3 = \overline{\overline{\overline{(x_3+\bar{x}_1)(x_2+x_1)}(\bar{x}_3+x_2+x_1)} + x_3\bar{x}_2x_1}$$

Solution

Le principe est de réduire la longueur des barres, en partant par les plus grandes.

$$y_1 = \overline{x_5x_4}x_2 + x_5\bar{x}_4x_2x_1 + x_5x_2x_0 + \bar{x}_4x_2\bar{x}_1 + x_4x_2x_0 + \bar{x}_5x_2x_0$$

$$= (\overline{x_5} + \overline{x_4}).x_2 + x_5\overline{x_4}x_2x_1 + (x_5 + \overline{x_5})x_2x_0 + \overline{x_4}x_2\overline{x_1} + x_4x_2x_0$$
$$= \overline{x_5}.x_2 + \overline{x_4}.x_2 + x_5\overline{x_4}x_2x_1 + x_2x_0 + \overline{x_4}x_2\overline{x_1} + x_4x_2x_0 = \overline{x_5}.x_2 + \overline{x_4}.x_2.(1 + x_5.x_1) + x_2x_0(1 + x_4) + \overline{x_4}x_2\overline{x_1}$$
$$= \overline{x_5}.x_2 + \overline{x_4}.x_2 + x_2x_0 + \overline{x_4}x_2\overline{x_1} = \overline{x_5}.x_2 + \overline{x_4}.x_2(1 + \overline{x_1}) + x_2x_0 = \overline{x_5}.x_2 + \overline{x_4}.x_2 + x_2x_0$$

$$y_2 = \overline{(\overline{\overline{x_3}x_2}).(\overline{x_3(\overline{x_2} + \overline{x_1})})} = \overline{\overline{\overline{x_3}x_2}} + \overline{\overline{x_3(\overline{x_2} + \overline{x_1})}} = \overline{x_3}x_2 + x_3(\overline{x_2} + \overline{x_1}) = \overline{x_3}x_2 + x_3\overline{x_2} + x_3\overline{x_1}$$

$$y_3 = \overline{\overline{\overline{(x_3 + \overline{x_1})(x_2 + x_1)}(\overline{x_3} + x_2 + x_1)} + x_3\overline{x_2}x_1} = \overline{\overline{\overline{(x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1 + \overline{x_1}x_1)}(\overline{x_3} + x_2 + x_1)} + x_3\overline{x_2}x_1}$$
$$= \overline{\overline{\overline{\overline{(x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1 + \overline{x_1}x_1)}(\overline{x_3} + x_2 + x_1)}}.\overline{x_3\overline{x_2}x_1}} = \overline{(x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1 + \overline{x_1}x_1)}(\overline{x_3} + x_2 + x_1)\left(\overline{x_3\overline{x_2}x_1}\right)$$
$$= \left(\left(x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1 + \overline{x_1}x_1\right) + \left(\overline{\overline{x_3} + x_2 + x_1}\right)\right)\left(\overline{x_3\overline{x_2}x_1}\right) = \left(\left(x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1 + \overline{x_1}x_1\right) + \left(x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}\right)\right)\left(\overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1}\right)$$
$$= \left(x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1 + \overline{x_1}x_1 + x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}\right)\left(\overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1}\right)$$
$$= \left(x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1 + x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}\right)\left(\overline{x_3} + x_2 + \overline{x_1}\right)$$
$$= x_3x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + x_3x_1\overline{x_3} + x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_3} + x_3x_2x_2 + \overline{x_1}x_2x_2 + x_3x_1x_2 + x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}x_2 + x_3x_2\overline{x_1} + \overline{x_1}x_2\overline{x_1} + x_3x_1\overline{x_1} + x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}.\overline{x_1}$$
$$= 0 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + 0 + 0 + x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1x_2 + 0 + x_3x_2\overline{x_1} + \overline{x_1}x_2 + 0 + x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}$$
$$= \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + x_3x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_3x_1x_2 + x_3x_2\overline{x_1} + \overline{x_1}x_2 + x_3\overline{x_2}.\overline{x_1}$$
$$= x_3x_2 + \overline{x_1}x_2$$

Exercice 9 : Principe de dualité

Vérifier l'application du principe de dualité aux propositions logiques suivantes :

1) $A + 1 = 1$

2) $A + \overline{A}.B = A + B$

3) A+B=1 est vrai si A=1 ou B=1