Electronique numérique

- Travaux Dirigés -

Sujet n°2 :

- **"Expression d'une fonction logique sous forme somme-de-produits et produit-de-sommes"**
- **"Simplification des fonctions logiques par tableaux de Karnaugh"**

Exercice 1 : Mise sous forme "somme-de-produits" standard d'une fonction logique

Déterminer la forme somme-de-produits (ou disjonctive) standard (ou canonique) de la fonction suivante :

$$f = \overline{A}.\overline{B} + A.B.\overline{C}.D$$

Solution

Il faut faire apparaître les variables C et D dans le 1^er^ terme. On le multiplie d'abord par $C + \overline{C}$:

$$\overline{A}.\overline{B} = \overline{A}.\overline{B}.(C + \overline{C}) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$$

Puis on multiplie chacun des 2 termes résultants par $D + \overline{D}$:

$$\overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} = \overline{A}.\overline{B}.C(D + \overline{D}) + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}(D + \overline{D})$$

$$= \overline{A}.\overline{B}.C.D + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D}$$

Finalement :

$$\overline{A}.\overline{B} + A.B.\overline{C}.D = \overline{A}.\overline{B}.C.D + \overline{A}.\overline{B}.C.\overline{D} + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.D + \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.B.\overline{C}.D$$

Exercice 2 : Mise sous forme "somme-de-produits" standard d'une fonction logique puis sous forme "produit-de-sommes" standard

Soit la fonction logique définie par :

F(A,B,C) = 1 si une variable et une seule est égale à 1.

Déterminer :

1) sa forme disjonctive standard
2) sa forme conjonctive standard, en utilisant 3 méthodes différentes.

Solution

1) On écrit la table de vérité

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

On en déduit la fonction sous la forme disjonctive standard :

$$F(A,B,C) = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C},$$

que l'on ne peut pas simplifier.

2) Pour la forme conjonctive standard, on peut utiliser 3 méthodes :

- La 1ère consiste à partir de son expression sous forme SDP, déterminée au 1) :

$$F(A,B,C)=\overline{A}.\overline{B}.C+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.\overline{C}$$

On calcule $\overline{F}$ sous forme PDS standard :

$$\overline{F(A,B,C)}=\overline{\overline{A}.\overline{B}.C+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.\overline{C}}$$

$$\overline{F(A,B,C)}=\overline{\overline{(A+B+\overline{C})}+\overline{(A+\overline{B}+C)}+\overline{(\overline{A}+B+C)}}$$

$$=\overline{\overline{(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C).(\overline{A}+B+C)}}$$

$$=(A+B+\overline{C}).(A+\overline{B}+C).(\overline{A}+B+C)$$

$$=(A.A+B.A+\overline{C}.A+A.\overline{B}+B.\overline{B}+\overline{C}.\overline{B}+A.C+B.C+\overline{C}.C).(\overline{A}+B+C)$$

$$=(A+\overline{C}.\overline{B}+B.C).(\overline{A}+B+C)$$

$$=A\overline{A}+\overline{A}.\overline{C}.\overline{B}+\overline{A}.B.C+A.B+\overline{C}.\overline{B}.B+B.C.B+A.C+\overline{C}.\overline{B}.C+B.C.C$$

$$=\overline{A}.\overline{C}.\overline{B}+\overline{A}.B.C+A.B+B.C+A.C$$

$$=\overline{A}.\overline{C}.\overline{B}+\overline{A}.B.C+A.B.C+A.B.\overline{C}+A.B.C+\overline{A}.B.C+A.B.\overline{C}+A.B.C+A.\overline{B}.C$$

$$=\overline{A}.\overline{C}.\overline{B}+\overline{A}.B.C+A.\overline{B}.C+A.B.\overline{C}+A.B.C$$

Puis on lui applique le principe de dualité :

$$F(A,B,C)=(A+B+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

- La 2e méthode consiste à partir de la table de vérité et à définir $\overline{F}$ à partir des lignes où F vaut 0, sous forme de SDP, puis à transformer sous forme PDS (en simplifiant éventuellement au passage) :

$$\overline{F(A,B,C)}=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.C+A.\overline{B}.C+A.B.\overline{C}+A.B.C$$

$$=\overline{(A+B+C)}+\overline{(A+\overline{B}+\overline{C})}+\overline{(\overline{A}+B+\overline{C})}+\overline{(\overline{A}+\overline{B}+C)}+\overline{(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})}$$

$$=\overline{(A+B+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})}$$

d'où

$$F(A,B,C)=(A+B+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Remarque : on aurait pu appliquer le principe de dualité comme avec la 1ère méthode.

- La 3e méthode consiste à partir de la table de vérité, à considérer les lignes où F vaut 0 comme pour la 2e méthode, et à définir F directement sous forme PDS :

$$F(A,B,C)=(A+B+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C).(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$

Exercice 3 : Mise sous forme "somme-de-produits"

Soit la fonction logique définie par :

F(A,B,C) = 1 si le nombre de variables à 1 est paire.

Montrer que cette fonction est un NON-OU EXCLUSIF à 3 entrées.

Solution

On écrit la table de vérité

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

On en déduit la fonction :

$$F(A,B,C)=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.C+A.\overline{B}.C+A.B.\overline{C}=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.C+A(\overline{B}.C+B.\overline{C})=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.C+A(B\oplus C)$$

$$=\overline{A}.(\overline{B}.\overline{C}+B.C)+A(B\oplus C)=\overline{A}.\overline{(B\oplus C)}+A(B\oplus C)=\overline{A\oplus B\oplus C}$$

Exercice 4 : Mise sous forme "somme-de-produits" standard d'une fonction logique puis sous forme "produit-de-sommes" standard

1) Déduire la fonction booléenne simplifiée (forme "somme de produits", ou disjonctive) de la table de vérité suivante :

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2) Retrouver ce résultat à l'aide d'un tableau de Karnaugh

Solution

$$F(A,B,C)=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.\overline{B}.C+A.\overline{B}.C+A.B.\overline{C}$$

$$=\overline{A}.\overline{B}.(\overline{C}+C)+A.\overline{B}.C+A.B.\overline{C}$$

$$=\overline{A}.\overline{B}.+\overline{B}.C+A.B.\overline{C}$$

2) On peut utiliser un tableau pour effectuer cette même simplification. Il n'y a qu'un regroupement possible.

c \ ab	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

d'où la fonction :

$$F(A,B,C)=\overline{A}.\overline{B}+\overline{B}.C+A.B.\overline{C}$$

Exercice 5 : Simplification d'une fonction logique par la méthode de Karnaugh

1) Soit la fonction logique suivante

$$F_1\,(a, b, c, d) = \Sigma\,(1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13)$$

a) La simplifier par la méthode de Karnaugh en utilisant 2 regroupements possibles.
b) Montrer que les 2 fonctions simplifiées obtenues sont identiques (par exemple en faisant apparaître des termes adéquats).

2) Simplifier par la méthode de Karnaugh la fonction suivante

$$F_2\,(a, b, c, d, e) = \Sigma\,(1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17)$$

3) Simplifier par la méthode de Karnaugh la fonction suivante

$$F_3\,(a, b, c, d) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b}\,c\,\overline{d} + a\,\overline{b}\,\overline{d} + a\,b\,\overline{c}\,\overline{d} + a\,b\,c\,\overline{d}$$

Solutions

1) On écrit la table de vérité :

a	**b**	**c**	**d**	**F_1**
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Le tableau de Karnaugh correspondant est :

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

Un premier regroupement possible est :

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

d'où l'on tire la fonction simplifiée :

$$F = b.\bar{c} + \bar{c}.d + \bar{b}.c$$

Le 2^{e} regroupement possible est :

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

d'où l'on tire la fonction simplifiée, dont le 2^{e} terme est différent :

$$F = b.\bar{c} + \bar{b}.d + \bar{b}.c$$

Pour démontrer que ces 2 expressions correspondent à la même fonction, on pourrait reprendre la fonction non-simplifiée, mais il y a plus simple. On peut prendre par exemple la 1ère expression et faire apparaître le terme qui nous intéresse, à savoir $\bar{b}$, et essayer de faire disparaître $\bar{d}$:

$$F = b.\bar{c} + (b + \bar{b}).\bar{c}.d + \bar{b}.c = b.\bar{c} + b.\bar{c}.d + \bar{b}.\bar{c}.d + \bar{b}.c = b.\bar{c} + \bar{b}.\bar{c}.d + \bar{b}.c = b.\bar{c} + \bar{b}.(\bar{c}.d + c)$$
$$= b.\bar{c} + \bar{b}.(d + c) = b.\bar{c} + \bar{b}.d + \bar{b}.c$$

On retrouve bien la 2^{e} forme.

2)

Il y a une variable supplémentaire : E ; le tableau de Karnaugh va comporter le double de cases par rapport à 4 variables. Par exemple :

cde \ ab	00	01	11	10
000				1
001	1	1		1
011	1	1		
010	1	1		
110				
111				
101	1	1		
100	1	1		

d'où la fonction simplifiée :

$$F_2 = \overline{a}.\overline{c}.e + \overline{a}.\overline{c}.d + \overline{a}.c.\overline{d} + a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}$$

3)

$$F_3\ (a, b, c, d) = \overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d} + \overline{a}\ \overline{b}\ c\ \overline{d} + a\ \overline{b}\ \overline{d} + a\ b\ \overline{c}\ \overline{d} + a\ b\ c\ \overline{d}$$

Il faut d'abord mettre F_3 sous forme standard :

$$F_3\ (a, b, c, d) = \overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d} + \overline{a}\ \overline{b}\ c\ \overline{d} + a\ \overline{b}\ c\ \overline{d} + a\ \overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d} + a\ b\ \overline{c}\ \overline{d} + a\ b\ c\ \overline{d}$$

Dans le tableau de Karnaugh, on met des 1 pour chaque terme de la somme de produits ; une variable d'entrée (a, b, c ou d) correspond à un 0 quand elle est complémentée, à 1 sinon.

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	1	1

d'où la fonction simplifiée :

$$F_3 = \overline{b}.\overline{d} + a.\overline{d}$$

Remarque : on aurait pu utiliser un tableau de 8 colonnes et 2 lignes (3 variables pour les colonnes et 1 pour les lignes) :

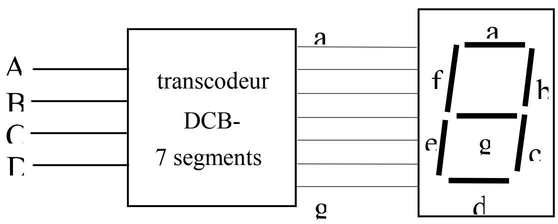
d \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0

d'où la fonction simplifiée :

$$F_3 = \overline{b}.\overline{d} + a.\overline{d}$$

Exercice 6 : Transcodeur 7-segments

Un transcodeur 7-segments permet de visualiser sur un afficheur à 7 LEDs la valeur décimal d'un chiffre codé en binaire.



1) On suppose que les combinaisons des variables d'entrée ne correspondant pas à un chiffre décimal ne peuvent pas se produire et que l'on souhaite que tous les segments restent éteints pour ces combinaisons. Déterminer la fonction logique permettant d'obtenir le segment "a".
2) On suppose maintenant que ces combinaisons ne risquent pas de se produire. En effectuant les simplifications adéquates, déterminer à nouveau la fonction logique correspondant au segment "a".

Annexe : Détermination de la forme PDS (Produit-de-Sommes) d'une fonction logique

A partir de la forme Somme-de-Produits (SDP) de la fonction logique

On peut passer de la forme SDP à la forme PDS. Il faut :

- exprimer $\overline{F}$, la simplifier et la mettre sous forme SDP
- appliquer le principe de dualité à l'expression obtenue, en :

- remplaçant $\overline{F}$ par F ;
- remplaçant × par + et vice-versa ;
- complémentant les variables.

ou en utilisant les règles de DeMorgan.

Par exemple, avec la fonction OU EXCLUSIF sous forme PDS standard :

$$F(A,B) = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

On a :

$$\overline{F} = \overline{\overline{A}.B + A.\overline{B}} = \overline{\overline{A}.B}.\overline{A.\overline{B}} = (A+\overline{B})(\overline{A}+B) = A.\overline{A} + \overline{B}.\overline{A} + A.B + \overline{B}.B = \overline{A}.\overline{B} + A.B$$

On applique alors le principe de dualité au résultat :

$$F = (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

(1ère méthode vue en cours)

A partir de la table de vérité

On considère les lignes où la fonction vaut 0. Chacune de ces lignes correspond à un terme du PDS.

On écrit la forme SDP ; le résultat correspond à $\overline{F}$.

On transforme alors la SDP en PDS en utilisant le théorème de DeMorgan ou le principe de dualité.

Par exemple, pour la table de vérité du OU EXCLUSIF :

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

On a :

$$\overline{F(A,B)} = \overline{A}\overline{B} + A.B$$

$$= \overline{A}\overline{B} + A.B = \overline{A+B} + \overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{(A+B).(\overline{A}+\overline{B})}$$

d'où

$$F(A,B) = (A+B).(\overline{A}+\overline{B})$$

(2e méthode vue en cours)

On peut remarquer qu'on peut également écrire directement le PDS à partir de la table de vérité, en considérant les lignes où f vaut 0, et en complémentant les variables (3e méthode vue en cours).