Résumé du cours d'Algèbre Linéaire I & II

Jean-Eloi Lombard

23 juillet 2007

Table des matières

Chapitre 1

Espace Vectoriel

Définition 1.1 (Liste) *Une liste de longueur n ($n \in \mathbb{N}$) est une collection ordonnée de n objets symbolisés par n sigles séparé par des virgules, le tout entre parenthèses. On dit que l'élément j de la liste est la j^e coordonnée.*

Proposition 1.1 *Deux listes sont égales si et seulement si :*

1. *elles ont même longueur*
2. *quelque soit le j^e élément de la première liste, il est égal au j^e élément de la seconde.*

Remarque 1.1 (Différence entre une liste et un ensemble) *Dans une liste de n éléments l'ordre importe contrairement à l'ensemble. Ainsi $\{1, 2, 3\}$ et $\{3, 2, 1\}$ et le même ensemble, mais $(1, 2, 3)$ et $(3, 2, 1)$ sont des listes différentes.*

Définition 1.2 (Vecteur) *Un vecteur est un objet mathématique caractérisé par :*

1. *une direction*
2. *un sens*
3. *une norme*

En représentation Cartésienne un vecteur de $\mathbb{F}^n$ est représenté par une liste de scalaires de longueur n.

Proposition 1.2 (Addition) *L'addition de deux vecteurs de $\mathbb{F}^n$ est donnée par l'addition de chaque composant de la liste. Ainsi, pour $u, v \in \mathbb{F}^n$:*

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

Proposition 1.3 (Multiplication) *Soit $a \in \mathbb{F}$ et $u \in \mathbb{F}^n$, alors la multiplication du vecteur u par le scalaire a est donnée par la multiplication de chaque composante du vecteur par le scalaire a, soit :*

$$au = (au_1, \ldots, au_n)$$

1.1 Espace Vectoriel

Définition 1.3 (Espace Vectoriel) *Un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V est un ensemble de vecteurs de V muni de la multiplication et de l'addition vectorielle (comme définie ci-dessus) vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Commutativité :* $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$
2. *Assossiativité :* $(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$
3. *Identité additive :* $\exists 0 \in V / v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in V$
4. *Inverse additif :* $\forall v \in V$, $\exists w \in V / v + w = 0$
5. *Identité multiplicative :* $1v = v \forall v \in V$
6. *Distributivité :* $a(u + v) = au + av \, \forall u, v \in V \, a \in \mathbb{F}$ *et* $(a + b)v = av + bv \, \forall a, b \in \mathbb{F} \, v \in V$.

Proposition 1.4 (Unicité de l'élément neutre pour l'addition) *Un espace vectoriel a un unique élément neutre par rapport à l'addition.*

Démonstration *Supposons 0 et $0'$ deux éléments neutre pour l'addition du même espace vectoriel V, alors :*

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

La première égalité est justifiée par le fait que $0'$ est une identité additive et la seconde est justifiée par le fait que 0 est un élément neutre pour l'addition.

Proposition 1.5 (Unicité de l'inverse additif) *Tout élément d'un espace vectoriel posséde un unique inverse additif.*

Démonstration *Soit $v \in V$ avec V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Supposons w et w' deux inverses additifs de v alors :*

$$w = w + 0 = w + (v + w') = (w + v) + w' = 0 + w' = w'$$

La premiere égalité tiens parce que V est un espace vectoriel et donc il existe un élément neutre noté 0. La deuxième égalité tiens car w' est l'inverse additif de v. La troisième égalité tiens car V est un espace vectoriel et satisfait donc la propriété d'associativité. La quatrième égalité tiens car w est l'inverse additif de v et finalement la cinquième égalité tiens car 0 est l'élément neutre pour l'addition.

Proposition 1.6 $a0 = 0 \ \forall a \in \mathbb{F}$

Démonstration $a0 = (a + 0)0 = a0 + 0$ *La premiere égalité tiens car V est un espace vectoriel donc il existe 0 élément neutre pour l'addition. La deuxième égalité tiens à cause de la propriété de distributivité sur l'espace vectoriel V.*

Proposition 1.7 $0v = 0 \ \forall v \in V$

Démonstration $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$

Proposition 1.8 $(-1)v = -v \ \forall v \in V$

Démonstration $(-1)v + v = 1v + -1(v) = (1 - 1)v = 0$ *La première et la deuxième égalité sont justifiée par la propriété de distributivité sur un espace vectoriel.*

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.4 *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et U un sous ensemble de V. U est* un sous-espace vectoriel *de V si et seulement si il vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. *existence de l'identité additive :* $0 \in U$
2. *s'il est fermé sous l'addition (définie par la propriété 1.2) :* $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
3. *s'il est fermé sous la multiplication (définie par la propriété 1.3) :* $a \in \mathbb{F}$ *et* $u \in U \Rightarrow au \in U$

1.3 Somme et somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 1.5 (Somme) *Soit $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces vectoriels de V. La somme de $U_1, \ldots, U_m$ notée $U_1 + \ldots + U_m$ est l'ensemble formé par toutes les sommes possibles d'éléments de $U_1, \ldots, U_m$, soit :*

$$U_1 + \ldots + U_m = \{u_1 + \ldots + u_m / u_1 \in U_1, \ldots u_m \in U_m\}$$

Définition 1.6 (Somme Directe) *V est la somme directe de $U_1, \ldots, U_m$, noté $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ si et seulement si tout élément de V ne peut-être écrit que par une somme de la forme $u_1 + \ldots + u_m$ avec tout les $u_i \in U_i$ quelque soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Proposition 1.9 *Soit $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces vectoriels de V. V est une somme directe de $U_1, \ldots, U_m$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$V = U_1 + \ldots + U_m$*
2. *la seule manière d'écrire 0 comme somme de $u_1 + \ldots + u_m$ est d'avoir $u_i = 0 \, \forall i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Démonstration

- ***Sens direct :*** *trivial*
- ***Sens indirect :*** *Soit $v \in V$ alors il existe $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$ tel que $v = u_1 + \ldots + u_n$. Montrons que cette écriture de v est unique. Prenons donc $w_1 \in U_1, \ldots, w_n \in U_n$ tels que $v = w_1 + \ldots + w_n$ en soustrayant les deux écritures de v on obtient $0 = (u_1 - w_1) \ldots (u_n - w_n)$ or chaque $(u_i - w_i)$ appartient à U_i donc d'après la seconde hypothese on a $u_i = w_i$ et donc la représentation de v est unique.*

Proposition 1.10 *Soit U et W deux sous espaces vectoriels de V. $V = U \oplus W$ si et seulement si $V = U + W$ et $U \cap W = \{0\}$*

Démonstration

- ***Sens direct :*** *Si $V = U \oplus W$ alors par définition $V = U + W$. Montrons maintenant que $U \cap W = \{0\}$. Prenons $v \in U \cap W$ alors $0 = v + (-v)$ avec $v \in U$ et $-v \in W$. D'apres la Proposition 1.9 $v = 0 \, \forall v \in U \cap W$ ce qui revient a dire $U \cap W = \{0\}$.*

– ***Sens indirect :*** *Nous allons démontrer le sens indirect à l'aide de la Proposition 1.9. Nous avons trivialement* $V = U + W$*, il ne reste donc plus qu'à montrer la deuxième partie de la propriété. Prenons* $0 = u + w$ *avec* $u \in U$ *et* $w \in W$*. Il faut montrer* $u = w = 0$*. Nous avons* $0 = u + w$ *donc* $u = -w$ *avec* $w \in W$ *et* $u \in U \cap W$*. Or* $U \cap W = \{0\}$ *donc* $w = 0$ *donc* $u = 0$*. Donc la seule manière d'écrire 0 comme somme de vecteurs de U et W est de les avoirs tous nuls, ce qui complète la preuve.*

Chapitre 2

Espace Vectoriel de Dimension Finie

2.1 Span et (in)dépendance linéaire

Définition 2.1 (Combinaison Linéaire) *Une combinaison linéaire de la liste de vecteurs* $(v_1, \ldots, v_m)$ *est de la forme :*

$$a_1v_1 + \ldots + a_mv_m$$

avec $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$

Définition 2.2 (Span) *L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la liste de vecteurs* $(v_1, \ldots, v_m)$ *est appelé le* span *de* $(v_1, \ldots, v_m)$ *noté* $span(v_1, \ldots, v_m)$ *:*

$$span(v_1, \ldots, v_m) = \{a_1v_1 + \ldots + a_mv_m / a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}\}$$

Définition 2.3 (Espace vectoriel de dimension finie) *Un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement il est engendré par un nombre fini de vecteurs, soit :*

$$V = span(v_1, \ldots, v_m) / m \in \mathbb{N}$$

Définition 2.4 (Liste de vecteurs linéairement indépendants) *Une liste de vecteurs* $(u_1, \ldots, u_m)$ *est dite linéairement indépendante si et seulement si la seule manière d'avoir* $a_1u_1 + \ldots + a_mv_m = 0$ *est de choisir tout les* $a_1 = \ldots = a_m = 0$

Définition 2.5 (Liste de vecteurs linéairement dépendants) *La définition s'obtient en prenant la négation de 2.4, soit : Une liste de vecteurs* $(u_1, \ldots, u_m)$ *est dite linéairement dépendante si et seulement si il existe* $a_1, \ldots, a_m$ *non tous nul, tel que* $a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m = 0$

Lemme 2.1 (Dépendance linéaire) *Si* $(v_1, \ldots, v_m)$ *sont linéairements dépendants dans* V *et* $v_1 \neq 0$ *alors il existe* $j \in \{2, \ldots, m\}$ *tel que :*

1. $v_j \in span(v_1, \ldots, v_{j-1})$
2. *si on enlève* v_j *de la liste alors on ne change pas l'espace engendre par* $v_1, \ldots, v_m$

Démonstration *Premier partie :* $(v_1, \ldots, v_m)$ *est linéairement dépendant et* $v_1 \neq 0$ *donc il existe* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ *non tous nuls tel que :*

$$a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$$

Prenons $j = max(j/a_j v_j \neq 0)$ *alors :*

$$v_j = \frac{a_1}{a_j} v_1 + \ldots + \frac{a_{j-1}}{a_j} v_{j-1}$$

ce qui démontre la premiere partie.
Seconde partie : Prenons $u \in span(v_1, \ldots, v_m)$. *Il existe donc* $c_1, \ldots, c_m$ *non tous nuls tels que :*

$$u = c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m$$

En remplaçant v_j *par 2.1 on obtient donc* u *comme combinaison linéaire de* $(v_1, \ldots v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m)$.

Théoreme 2.1 ("de la borne") *Dans un espace vectoriel de dimension finie la longueur de toute liste de vecteurs linéairement indépendants est plus petite ou égale à la longueur de toute liste générant l'espace vectoriel.*

Démonstration *Prenons* $(u_1, \ldots, u_m)$ *linéairement dépendants dans* V *et* $(w_1, \ldots, w_n)$ *une liste générant* V. *Nous voulons donc montrer que* $m < n$. *Nous allons utiliser le Lemme 2.1. À chaque étape du processus nous remplaçons un vecteur* w *par un vecteur* u. *À l'etape 1 nous ajoutons* u_1 *a* $(w_1, \ldots, w_n)$ *donc la nouvelle liste est forcement linéairement dépendante. On utilise donc le Lemme 2.1 pour enlever un des* w. *En ittérant ainsi nous obtenons une liste de la forme* $(u_1, \ldots, u_m, w_{m+1}, \ldots, w_n)$. *Il y a donc au moins autant de vecteurs* w *que de vecteurs* u.

Proposition 2.1 *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.*

Démonstration Prenons V un espace-vectoriel de dimension finie et U un sous espace vectoriel de V. Pour montrer que U est de dimension finie nous allons procéder par étapes. Premiere étape : Si U = $\{0\}$ U est de dimension finie. Sinon, on choisi un vecteur $v_1 \in U$ non nul. J$^{\text{e}}$ étape : si $U = span(v_1, \ldots, v_{j-1})$ alors U est de dimension finie sinon on prends un vecteur v_{j+1} non nul tel que $v_{j+1} \notin span(v_1, \ldots, v_{j-1})$. Après chaque étape nous avons construit une liste de vecteurs linéairements indépendants et d'apres le Théoreme 2.1 il ne peut y avoir une liste de vecteurs linéairement indépendants plus longue que toute liste générant l'espace V donc le procédé doit s'arrêter.

2.2 Base

Définition 2.6 (Base) *Une* base *de l'espace vectoriel V est une liste de vecteur linéairement indépendants qui génère V.*

Proposition 2.2 *La liste de vecteurs $(v_1, \ldots, v_m)$ est une base de V si et seulement si tout vecteur v de V ne peut-être écrit que d'une unique façon de la forme :*

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$$

avec $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$

Démonstration

- **Sens Direct :** Supposons d'abord que $(v_1, \ldots, v_m)$ est une base de V et montrons qu'il n'existe qu'une unique façon d'écrire un vecteur u de V sous la forme $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$. $(v_1, \ldots, v_m)$ est une base de V donc il existe $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$ tel que quelque soit $u \in V$

  $$u = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \tag{2.1}$$

  Il nous faut maintenant montrer que cette représentation est unique. Supposons donc, par l'absurde qu'il existe $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{F}$ tel que :

  $$u = b_1 v_1 + \ldots + b_m v_m \tag{2.2}$$

  En soustrayant 2.2 à 2.1 on obtient :

  $$0 = (b_1 - a_1) v_1 + \ldots + (b_m - a_m) v_m$$

- **Sens indirect :** trivial.

Théoreme 2.2 ("du ballon qui dégonfle") *Tout liste de vecteur générant un espace vectoriel peut-être réduite pour en former une base.*

Démonstration *Procédons par étapes. Prenons une liste de vecteur* $B = (u_1, \dots, u_m)$ *générant* V*. Si le vecteur* u_1 *est nul on l'enlève de la liste. Ensuite pour chaque vecteur* v_j *on vérifie s'il appartient à* $span(v_1, \dots, v_{j-1})$*. Si c'est le cas on le supprime de la liste* B*, sinon on teste le suivant. Le procédé s'arrête lorsque tout les vecteurs on été testé. Il reste ainsi une liste de vecteur linéairement indépendants qui engendre* V *car tout les vecteurs enlevés appartenaient à* $span(v_1, \dots, v_m)$*.*

Corollaire 2.1 (Existence d'une base) *Tout espace vectoriel de dimension finie à une base.*

Démonstration *Par définition tout espace vectoriel de dimension finie possède une liste de vecteurs qui le génère. En appliquant le procédé de la démonstration du Théorème 2.2 on obtient donc une base de cet espace vectoriel.*

Théoreme 2.3 ("du ballon qui gonfle") *A toute liste de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel il est possible de rajouter des vecteurs pour en faire une base.*

Démonstration *Prenons une liste de vecteurs linéairement indépendants* $(v_1, \dots, v_m)$ *d'un espace vectoriel* V *et une liste de vecteurs générant* V $(u_1, \dots, u_n)$*. On procéde à la méthode suivante pour faire une base. Pour chaque vecteur* u_i *on vérifie s'il appartient à* $span(v_1, \dots, v_m)$ *si c'est le cas, on ne fait rien. Sinon on le rajoute à la lsite* $v_1, \dots, v_m$*. Ainsi, une fois tout les vecteurs* u_i *testé on a une liste de vecteurs linéairements indépendants (condition pour l'ajout) et une liste qui génère* V *car on a ajouté à la liste tout les vecteurs.*

Proposition 2.3 (Existence du complémentaire) *Soit* V *un espace vectoriel de dimesion finie et* U *un sous-espace vectoriel de* V*. Alors il existe un sous-espace vectoriel* W *de* V *tel que* $V = U \oplus W$*.*

Démonstration V *est de dimesion finie donc* U *est de dimesion finie. Il existe donc* $(u_1, \dots, u_m)$ *base de* U*. Il est donc possible d'étendre cette liste de vecteurs linéairement indépendans pour en faire une base de* V *ce qui donne* $(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n)$*. Posons* $W = span(w_1, \dots, w_n)$*. Pour montrer* $V = U \oplus W$ *nous allons montrer* $V = U + W$ *et* $U \cap W = \{0\}$*. Pour démontrer la première partie posons* $v \in V$*. Il existe donc*

$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$ *tel que :*

$$v = a_1u_1 + \ldots + a_mu_m + b_1w_1 + b_nw_n$$

donc clairement $v \in U + W$ *ce qui démontre la première partie. Pour démontrer* $U \cap W = \{0\}$ *prenons* $v \in U \cap W$*. Il existe donc* $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{F}$ *tel que :*

$$\begin{aligned} v &= a_1u_1 + \ldots + a_mu_m = b_1w_1 + \ldots + b_nw_n \\ \Leftrightarrow 0 &= a_1u_1 + \ldots + a_mu_m - b_1w_1 - \ldots - b_nw_n \end{aligned}$$

$(u_1, \ldots u_m, w_1, \ldots, w_n)$ *est lináirement indépendant donc par définition la seule manière d'avoir une combinaison linéaire nulle est d'avoir tout les* $u_i = w_j = 0$*. Donc* $v = 0$ *donc* $U \cap W = \{0\}$ *ce qui démontre la seconde partie de la preuve et termine la démonstration.*

2.3 Dimension

Définition 2.7 *La dimension d'un espace vectoriel V de dimension finie est définie comme le nombre de vecteurs de la base de cette espace et est noté* $dim(V)$*.*

Théoreme 2.4 *Deux bases d'un même espace vectoriel de dimension finie on même longueur.*

Démonstration *Prenons* B_1 *et* B_2 *deux bases de V.* B_1 *est un liste de vecteurs linéairement indépendants et* B_2 *une base donc* $dim(B_1) \leq dim(B_2)$*. En inverant les rôles on obtient la seconde inégalité ce qui implique* $dim(B_1) = dim(B_2)$*.*

Proposition 2.4 *Si V est une espace vectoriel de dimension et U un sous-espace vectoriel de V alors* $dimU \leq dimV$*.*

Démonstration Comme U est un sous-espace vectoriel de V qui est de dimension finie tout base de U est une liste de vecteurs linéairement indépendants dans V et donc peut-être étendue pour devenir une base de V. Ce qui démontre $dimU \leq dimV$

Proposition 2.5 ("du paresseux") *Si V est un espace vectoriel de dimension finie alors toute liste de vecteurs linéairement indépendants de V de longueur* $dimV$ *est une base de V.*

Théoreme 2.5 *Si U_1 et U_2 sont des sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel V de dimension finie alors :*

$$dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2)$$

Démonstration *Prenons $u_1, \ldots u_m$ base de $U_1 \cap U_2$. Alors $dim(U_1 \cap U_2) = m$. Cette liste de vecteur est linéairement indépendante (par définition). Il est donc possible d'y rajouter des vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ pour en faire une base de U_1. Ainsi $dim(U_1) = m + n$. Il est aussi possible de rajouter $(w_1, \ldots w_k)$ à $(u_1, \ldots, u_m)$ pour en faire une base de U_2. Donc $dim(U_2) = m + k$. Il nous reste donc à montrer que $(u_1, \ldots, u_m, \ldots, v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots, w_k)$ est une base de $U_1 + U_2$ car on aura :*

$$\begin{aligned} dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1 \cap U_2) &= m + k + m + n - m \\ &= m + k + n \\ &= dim(U_1 + U_2) \end{aligned}$$

Nous avons $span(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots, w_k)$ contient U_1 et U_2. Il faut donc montrer que $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots, w_k)$ est linéairement indépendants. Nous allons donc montrer que la seule manière d'écrire 0 comme combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots v_n, w_1, \ldots, w_k)$ implique que tout les scalaires soit nuls. Prenons des $a, b, c \in \mathbb{F}$ tels que

$$\begin{aligned} & a_1u_1 + \ldots + a_mu_m + b_1v_1 + \ldots b_nv_n + c_1w_1 + \ldots + c_kw_k = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & c_1w_1 + \ldots + c_kw_k = -a_1u_1 - \ldots a_mu_m - b_1v_1 - \ldots b_nv_n \qquad (2.3) \end{aligned}$$

donc $c_1w_1 + \ldots + c_kw_k \in U_1$. Or tout les $w_i \in U_2$ donc $c_1w_1 + \ldots + c_kw_k \in U_1 \in U_1 \cap U_2$ et il existe donc des $d \in \mathbb{F}$ tels que :

$$c_1w_1 + \ldots + c_kw_k = d_1u_1 + \ldots + d_mu_m$$

mais la liste de vecteurs $(w_1, \ldots w_k, u_1, \ldots u_m)$ est linéairement indépendante donc tout les c et d sont nuls. Donc 2.3 devient :

$$0 = a_1u_1 + \ldots + a_mu_m + b_1v_1 + \ldots + b_nv_n$$

Or les $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots v_n)$ est une liste de vecteurs linéairement indépendants. donc tout les a et b sont nécessairement nuls. On a donc le résultat désiré.

Proposition 2.6 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $U_1, \ldots, U_m$ des sous-espaces vectoriels de V tel que :*

1. $V = U_1 + \ldots + U_m$
2. $dimV = dimU_1 + \ldots + dimU_m$

alors $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$

Démonstration *Pour démontrer cette somme directe nous allons montrer que V est la somme des U_i (trivial car c'est une hypothese) et que la seule manière d'avoir 0 comme combinaison linéaire de tout les vecteurs de chaque U_i et de prendre chaque coefficient nul. Prenons donc une base de U_1 que nous ajoutons a une base de U_2 et ainsi de suite. Nous avons au final une liste de vecteurs qui span V (car $V = U_1 + \ldots + U_m$) qui est de dimension V. Donc cette liste est une base de V. Prenons maintenant des $u_i \in U_i$ tels que :*

$$0 = u_1 + \ldots + u_m$$

Chaque u_i peut-être exprimé dans la base construite ci-dessus. Nous avons donc exprimés 0 comme combinaison linéaire de cette base. Donc tout les scalaire de la combinaison linéaire doivent être nul ce qui achève la démonstration de la propriété.

Chapitre 3

Applications Linéaires

Définition 3.1 (Application Linéaire) *Une* application linéaire *de V dans W est une fonction (ou application) $T : V \to W$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *additivité :* $T(u+v) = T(u) + T(v)\, \forall u, v \in V$
2. *homogénéité :* $T(av) = aT(v)\, \forall a \in \mathbb{F}, v \in V$

Proposition 3.1 $\mathscr{L}(V,W)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{F}(V,W)$.

Démonstration

1. *clairement l'application* 0 *est linéaire.*
2. *soit* l_1 l_2 *deux applications linéaires, alors trivialement* $l_1 + l_2$ *est linéaire.*
3. *de même pour tout* $\alpha \in \mathbb{F}$ *et* $l \in \mathscr{L}(V,W)$, αl *est linéaire.*

3.1 Noyau et Image

Définition 3.2 (Noyau) *Si* $T \in \mathscr{L}(V,W)$ *le noyau de* T *noté* $null(T)$ *(ou* $Ker(T)$*) est le sous-ensemble de* V *(la Proposition 3.2 montre que c'est même un sous-espace vectoriel) dont l'image de tout les vecteurs par* T *est 0 :*

$$Ker(T) = null(T) = \{v \in V / Tv = 0\}$$

Proposition 3.2 *Si* $T \in \mathscr{L}(V,W)$ *alors* $Ker(T)$ *est un sous-espace vectoriel de* V.

Démonstration *Pour montrer que Ker(T) est un sous-espace vectoriel (en sachant que c'est un sous-ensemble de V) il ne nous reste plus qu'a démontrer que Ker(T) est fermé sous l'addition et la multiplication (et qu'il est non-vide). L'additivité de T implique*

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \Leftrightarrow T(0) = 0$$

donc $0 \in Ker(T)$. *Prenons maintenant* $u, v \in Ker(T)$ *on a donc :*

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0$$

donc $(u+v) \in Ker(T)$ *ce qui montre que* $Ker(T)$ *satisfait l'addition interne. Prenons maintenant* $u \in Ker(T)$ *et* $a \in \mathbb{F}$ *alors :*

$$T(au) = aT(u) = a0 = 0$$

donc $Ker(T)$ *est fermé sous la multiplication par un scalaire.*

Définition 3.3 (Injectivité) *Une application linéaire* $\mathscr{L}(V, W)$ *est* injective *si quelque soit* $u, v \in V$ *on a* $Tu = Tv$ *implique* $u = v$.

Proposition 3.3 *Soit* $T \in \mathscr{L}(V, W)$. *T est injective si et seulement si Ker(T) = {0}*

Démonstration

- ***Sens direct :*** *Supposons T injective et montrons* $Ker(T) = \{0\}$. *Trivialement* $0 \subset Ker(T)$ *il nous reste donc a montrer* $Ker(T) \subset 0$. *Prenons* $u \in Ker(T)$ *on a donc* $T(u) = 0 = T(0)$ *or T est injective donc* $u = 0$.
- ***Sens indirect :*** *Supposons maintenant* $Ker(T) = 0$ *et montrons que T est injective. Prenons donc* $u, v \in V$ *tels que* $T(u) = T(v)$. *On a donc* $0 = T(u) - T(v)$ *ce qui implique (par linéarité de T)* $T(u-v) = 0$. *Donc* $(u - v) \in Ker(T)$. *Or* $Ker(T) = \{0\}$ *(par hypothese) donc* $u - v = 0$ *donc* $u = v$ *ce qui complete la démonstration.*

Définition 3.4 (Image) *Soit* $T \in \mathscr{L}(V, W)$. *L'image de T, noté Im(T) (ou range(T)) est le sous-ensemble de W (nous allons montrer que c'est même un sous-espace vectoriel Proposition 3.4) dont tout les vecteurs sont de la forme T(v) pour un certain v dans V :*

$$Im(T) = range(T) = \{w \in W / \exists v \in V, w = T(v)\}$$

Définition 3.5 (Rang) *Le rang d'une application linéaire* $T \in \mathscr{L}(V, W)$ *est la dimension de son image.*

Proposition 3.4 *Si* $T \in \mathscr{L}(V, W)$ *alors* $Im(T)$ *est un sous-espace vectoriel de W.*

Démonstration *Soit* $T \in \mathscr{L}(V,W)$ *alors* $T(0) = 0$ *donc* $0 \in Im(T)$ *(par définition). Prenons maintenant* w_1 *et* w_2 *dans* W *et montrons que* $w_1 + w_2 \in W$*. Il existe donc* v_1 *et* v_2 *dans* V *tel que* $T(v_1) = w_1$ *et* $T(v_2) = w_2$*.*

$$T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2)$$

ce qui démontre la première partie. Montrons maintenant que $Im(T)$ *est fermé sous la multiplication par un scalaire* $a \in \mathbb{F}$*. Prenons* $w \in W$ *et* $v \in V\, /T(v) = w$*. On a donc :*

$$aT(v) = T(av)$$

ce qui termine la démonstration.

Définition 3.6 (Surjectivité) *Une application linéaire* $T \in \mathscr{L}(V,W)$ *est dite surjective si et seulement si Im(T) = W.*

Théoreme 3.1 ("des dimensions" ou "du rang") *Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie et* $T \in \mathscr{L}(V,W)$ *alors Im(T) est un sous-espace vectoriel de W et :*

$$dim(V) = dim\big(Im(T)\big) + dim\big(Ker(T)\big)$$

Démonstration *Soit V un espace vectoriel de dimension finie et* $T \in \mathscr{L}(V,W)$*. Prenons* $(u_1, \ldots u_m)$ *une base de Ker(T). On a donc dim(Ker(T)) = m. Par le Théorème 2.3 on peut rajouter des vecteurs à cette base de Ker(T) pour former une base de V qui aura la forme* $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$*. Donc* $dim(V) = m + n$*. Il nous faut donc montrer* $dim(Im(T)) = n$*. Pour ce faire nous allons montrer que* $(Tw_1, \ldots, Tw_n)$ *est une base de Im(T). Prenons* $v \in V$*. Comme* $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ *est une base de V il existe* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$v = a_1u_1 + \ldots + a_mu_m + b_1w_1 + \ldots + b_nw_n$$

donc :

$$Tv = b_1Tw_1 + \ldots + b_nTw_n$$

car T est linéaire et $(u_1, \ldots, u_m) \in Ker(T)$. On a donc $Im(T) = span(b_1Tw_1 + \ldots + b_nTw_n)$. Il nous faut donc montrer que $(Tw_1, \ldots, Tw_n)$ est linéairement indépendant. Prenons donc des scalaires $c \in \mathbb{F}$ tels que :

$$\begin{aligned} & c_1Tw_1 + \ldots + c_nTw_n = 0 \qquad (3.1) \\ \Leftrightarrow \quad & T(c_1w_1 + \ldots + c_nw_n) = 0 \end{aligned}$$

donc $(c_1w_1 + \ldots + c_nw_n) \in Ker(T)$. Or $(u_1, \ldots, u_m)$ est une base de Ker(T) donc il existe des scalaires d tels que :

$$c_1w_1 + \ldots + c_nw_n = d_1u_1 + \ldots + d_nu_n$$
$$c_1w_1 + \ldots + c_nw_n - d_1u_1 - \ldots - d_nu_n = 0 \tag{3.2}$$

Or $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n)$ est une liste linéairement indépendante donc 3.2 implique que tout les scalaires sont nuls donc l'équation 3.1 implique que $Tw_1, \ldots Tw_n$ est linéairement indépendante.

Corollaire 3.1 *Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie vérifiant $dim(V) > dim(W)$ alors il n'existe pas d'application linéaire injective de V dans W.*

Démonstration *Le théorème 3.1 nous donne :*

$$dim(V) = dim(KerT) + dim(ImT)$$

et $Im(T) \in W$ donc $dim(ImT) < dimW$. Or $dimW < dimV$ donc $dim(ImT) < dimV$ donc $dim(KerT) \neq 0$.

Corollaire 3.2 *Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie vérifiant $dim(V) < dim(W)$ alors il n'existe pas d'application linéaire surjective de V dans W.*

Démonstration *Le théorème 3.1 nous donne :*

$$dim(V) = dim(KerT) + dim(ImT)$$

Ab absurdo : Supposons qu'il existe une application T surjective. On aurait donc $dim(ImT) = dimW$ ce qui nous donne $dim(V) = dim(KerT) + dim(W)$ donc $dim(V) \geq dim(W)$ ce qui contredit l'hypothèse $dimV < dimW$.

3.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 3.7 (Matrice) *Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Une matrice m-par-n est un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Soit $T \in \mathscr{L}(V, W)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V et $(w_1, \ldots, w_m)$ une base de W. Pour tout $k = 1, \ldots, n$ il existe une combinaison linéaire unique de w tels que :

$$Tv_k = a_{1,k}w_1 + \ldots + a_{m,k}w_m$$

avec tout les $a_{j,k} \in \mathbb{F} \, \forall j = 1, \ldots, n$. Les $a_{j,k}$ définissent la matrice puisqu'ils sont les coefficients par rapport aux bases choisies. Ainsi la matrice 3.3 est la matrice de l'application linéaire T par rapport aux bases $(v_1, \ldots, v_n)$ et $(w_1, \ldots, w_m)$ notée $M(T, (v_1, \ldots v_n), (w_1, \ldots, w_m))$. Cette matrice est construite en remplissant chaque colonne k avec les coefficient de $T(v_k)$.

Proposition 3.5 *$Mat(m, n, F)$ est un espace vectoriel.*

Proposition 3.6 *La multiplication d'une matrice A de termes $a_{j,k}$ par une matrice B de termes $b_{j,k}$ est la matrice AB de dimension m-par-n dont le terme de la j^e lignes et k^e colonne est donné par :*

$$\sum_{r=1}^{n} a_{j,r}b_{r,k}$$

Proposition 3.7 *Soit $T \in \mathscr{L}(V, W)$, $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V et $(w_1, \ldots, w_m)$ une base de W, alors :*

$$M(Tv) = M(T)M(v)$$

$\forall v \in V$.

Démonstration Soit $M(T)$ la matrice :

$$M(T) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

ce qui est équivalent a :

$$Tv_k = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k}w_j$$

Soit v un vecteur de V alors $T(v)$ est donné par :

$$\begin{aligned} Tv &= b_1 T v_1 + \ldots + b_n T v_n \\ &= b_1 \sum_{j=1}^{m} a_{j,1} w_j + \ldots + b_n \sum_{j=1}^{m} a_{j,n} w_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} (a_{j,1} b_1 + \ldots + a_{j,n} b_n) w_j \end{aligned}$$

donc

$$M(T(v)) = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_1 + \ldots + a_{1,n}b_n \\ \vdots \\ a_{m,1}b_1 + \ldots + a_{m,n}b_n \end{bmatrix}$$

Définition 3.8 (Système linéaire) *Un* système linéaire *de m équations à n inconnues est défini par m équations du type :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{F}$

Définition 3.9 (Solution) *$c = (c_1, \ldots, c_m)$ est une solution du système si et seulement si*

$$a_{i1}c_1 + \ldots + a_{in}c_n = b_i \qquad \forall 1 \leq i \leq m$$

Définition 3.10 (Système homogène) *Le système est dit* homogène *si $b_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$.*

Remarque 3.1 (Calcul de l'inverse d'une matrice) *Pour calculer l'inverse d'une matrice, il suffit d'y joindre la matrice identite puis d'effectuer une élimination de Gauss-Jordan.*

3.3 Inversibilité

Définition 3.11 (Application Inversible) *Une application linéaire $T \in \mathscr{L}(V, W)$ est inversible si il existe une application $S \in \mathscr{L}(W, V)$ tel que ST est l'identité sur V et TS l'identité sur W. On dit alors que S est l'inverse T.*

Proposition 3.8 *L'inverse d'une matrice est unique.*

Démonstration *Soit S et S' deux inverses de la matrice T. Alors*

$$S = SI = S(TS') = (ST)S' = IS' = S'$$

Proposition 3.9 *Une application linéaire est inversible si et seulement si elle est surjective et injective*

Démonstration

- ***Sens Direct*** *Supposons que l'application linéaire T est inversible et montrons qu'elle est surjective et injective. Soit $u, v \in V$ et $T(u) = T(v)$ alors :*

  $$u = T^{-1}(Tu) = T^{-1}(Tv) = v$$

  donc $Tu = Tv$ implique $u = v$ alors T est injective. Montrons maintenant que T est surjective. Soit w un vecteur de W. Alors $w = TT^{-1}(w)$ donc w est dans Im(T) donc $Im(T) = W$ ce qui revient a dire que T est surjective.
- ***Sens indirect :*** *Supposons donc que T est injective et surjective pour montrer que T est inversible. Pour tout w de W définissons $S(w)$ l'unique élément de V tel que T(S(w)) = w. TS est l'identité sur W, montrons que ST est l'identité sur V : soit $v \in V$ alors :*

  $$\begin{aligned} &T(ST(v)) = (TS)(Tv) = I(Tv) = Tv \\ &ST(v) = v \end{aligned}$$

  la dernière égalité vient du fait que T est injective. Il reste a montrer que S est linéaire (ce qui est trivial).

3.4 Isomorphisme

Deux espaces vectoriel sont dits *isomorphes* si et seulement si il existe une application linéaire inversible d'un espace dans l'autre.

Théoreme 3.2 *Deux espaces vectoriels sont dits isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.*

Démonstration

- ***Sens direct :*** *supposons que V et W sont des espaces vectoriels isomorphes de dimension finie. Il existe donc une application linéaire inversible T de V dans W. Comme T est inversible elle est injective, donc $Ker(T) = \{0\}$ et T est surjective donc $Im(T) = W$. De plus $dimV = dim(Im(T)) + dim(Ker(T))$ donc $dim(V) = dim(W)$.*

- ***Sens indirect :*** *supposons V et W des espaces vectoriels de dimension finie de même dimension et montrons qu'ils sont isomorphes. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de V et $(w_1, \dots, w_n)$ une base de W et T une application linéaire de V dans W définie par :*

  $$T(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1w_1 + \ldots + a_nw_n$$

  T est injective car $(w_1, \dots, w_n)$ est linéairement indépendant (ce qui implique que $Ker(T) = \{0\}$) et T est surjective car $(v_1, \dots, v_n)$ est linéairement indépendant. Donc T est inversible ce qui par définition revient à dire que V et W sont isomorphes.

Proposition 3.10 *Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de V et $(w_1, \dots, w_m)$ une base de W. Alors $\mathscr{M}$ est une application linéaire inversible de $\mathscr{L}(V,W)$ dans $Mat(m, n, \mathbb{F})$*

Démonstration *Montrons que $\mathscr{M}$ est inversible et commençons par montrer que $\mathscr{M}$ est injective. Soit $T \in \mathscr{L}(V,W)$ et $M(T) = 0$, on a donc $Tv_k = 0$ pour $k = 1, \dots, n$. Or $v_1, \dots, v_n$ est une base de V donc $T = 0$. Donc $\mathscr{M}(T) = 0$ impilque $T = 0$ ce qui revient a dire que $\mathscr{M}$ est injective. Montrons maintenant que $\mathscr{M}$ est surjective. Soit A un matrice de $Mat(m, n, \mathbb{F})$ et $T \in \mathscr{L}(V,W)$ tel que la matrice A soit celle de l'application T par rapport aux bases de V et W définie ci-dessus. Clairement $\mathscr{M}(T) = A$ donc $Im(\mathscr{M}) = Mat(m, n, F)$ ce qui revient a dire que $\mathscr{M}$ est surjective.*

Proposition 3.11 *Si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie alors $\mathscr{L}(V,W)$ est de dimension finie et*

$$dim\mathscr{L}(V,W) = dim(V)dim(W) \tag{3.4}$$

Démonstration *$dim(Mat(m, n, F)) = mn = dim(\mathscr{L}(V,W))$. Il suffit de poser $dim(V) = m$ et $dim(W) = n$.*

Définition 3.12 (Opérateur) *Une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même est un* opérateur.

Théoreme 3.3 ("pour les paresseux") *Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Si $T \in \mathscr{L}(V)$ alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est inversible*
2. *T est injective*
3. *T est surjective*

Démonstration *Si T est inversible alors, par définition T est injective et surjective. Montrons que T est injective implique T est surjective. Si T est injective alors $Ker(T) = \{0\}$ donc $dim(Im(T)) = dim(V) - dim(Ker(T)) = dim(V)$ donc T est surjective. Il ne nous reste plus qu'a montrer que T surjective implique T inversible. T est surjective implique $dim(V) = dim(Im(T))$ donc $dim(Ker(T)) = 0$ donc T est injective, donc T est inversible.*

Chapitre 4

Valeurs et Vecteurs Propres

4.1 Espaces invariants

Définition 4.1 (Espace invariant) *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et U un sous-espace vectoriel de V. Si pour tout $u \in U$, $T(u) \in U$ alors on dit que U est* invariant *sous T.*

Définition 4.2 (Valeur propre) *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{F}$ est une* valeur propre *de l'opérateur $T \in \mathscr{L}(V)$ si il existe un vecteur non-nul $v \in V$ tel que $Tu = \lambda u$. L'ensemble des valeurs propres est noté Spec(T) :*

$$Spec(T) = \{\lambda \in \mathbb{F}/\lambda \text{ est une valeur propre de } T\}$$

Définition 4.3 (Vecteur Propre) *Un vecteur $v \in V$ est un vecteur propre associé à la valeure propre $\lambda \in \mathbb{F}$ si $Tu = \lambda u$.*

Théoreme 4.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ des valeurs propres distinctes de T avec $v_1, \ldots, v_m$ les vecteurs propres associés. Alors $(v_1, \ldots, v_m)$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration ***Ab absurdo*** *Supposons $(v_1, \ldots, v_m)$ linéairement dépendants. Soit k le plus petit entier positif tel que $v_k \in span(v_1, \ldots, v_{k-1})$. Il existe donc des scalaires $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{F}$ tels que :*

$$v_k = a_1 v_1 + \ldots + a_{k-1} v_{k-1} \tag{4.1}$$

en appliquant T des deux côtés :

$$\lambda_k v_k = a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \tag{4.2}$$

en multipliant l'équation 4.1 par λ_k et en la soustrayant a 4.2 il vient :

$$0 = a_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \ldots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1}$$

or par hypothese $(v_1, \ldots, v_{k-1})$ est une liste de vecteur linéairement indépendants donc tout les a_i doivent être nuls ce qui revient à dire que $v_k = 0$ ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle tout les v sont non-nuls.

Corollaire 4.1 *Tout opérateur sur un espace vectoriel V admet au plus $dim(V)$ valeur propres distinctes.*

Démonstration *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ des valeures propres associées aux vecteurs propres $v_1, \ldots, v_m$. Le théoreme 4.1 implique $m \leq dim(V)$.*

4.2 Matrices Triangulaires Supérieurs

Théoreme 4.2 *Tout opérateur sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre.*

Démonstration *Soit V un espace vectoriel de dimension n et $T \in \mathscr{L}(V)$. En prenant $v \in V$ on a $(v, Tv, T^2v, \ldots, T^nv)$ une liste de vecteurs forcément linéairement dépendantes puisque la liste est de longueur $n+1$. Il existe donc $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que :*

$$0 = a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv \tag{4.3}$$

Soit m le plus grand entier tels que a_m est non-nul et prenons les a_i comme coéfficient d'un polynome de la forme :

$$a_0 + a_1z + \ldots + a_nz_n = c(z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_n)$$

avec $c \in \mathbb{C}$ non nul et $\lambda_i \in \mathbb{C}$. L'équation 4.3 devient donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv \\ &= (a_0I + a_1T + \ldots + a_nT^{n-1})v \\ &= c(z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_mI)v \end{aligned}$$

ce qui implique qu'au moins un $T - \lambda_iI$ n'est pas injective (sinon il serait impossible d'avoir $(T - \lambda_iI)v = 0\ldots$). Il existe donc un vecteur v tel que $(T - \lambda_iI)v = 0$ ce qui revient à dire que T a une valeure propre.

Proposition 4.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *la matrice de T par rapport à la base $(v_1, \ldots, v_n)$ est triangulaire supérieure.*
2. *$Tv_k \in span(v_1, \ldots, v_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.*
3. *$span(v_1, \ldots, v_k)$ est invariant sous T pour tout $k = 1, \ldots, n$.*

Démonstration *Par définition la d'une matrice triangulaire supérieure, les deux premières proposition sont équivalentes. Trivialement la troisième proposition implique la seconde. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que la seconde implique la troisième. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc $T(v_k) \in span(v_1, \ldots, v_k)$ donc si $v \in span(v_1, \ldots, v_k)$, $T(v) \in span(v_1, \ldots, v_k)$, donc $span(v_1, \ldots, v_k)$ est invariant sous T.*

Théoreme 4.3 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ avec V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Alors il existe une base de V tel que la matrice associée à l'application T soit triangulaire supérieure.*

Démonstration *Procédons à une démonstration par réccurence sur la dimension de V. Pour une dimension 1, le résultat tiens. Supposons $dim(V) > 1$ et qu'il existe une base par rapport à laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure. V étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, T admet au moins une valeure propre. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ cette valeur propre et posons*

$$U = Im(T - \lambda I)$$

$T - \lambda I$ n'est pas injective (par définition de la valeure propre) donc d'après le Théorème 3.3, $T - \lambda I$ n'est pas surjective, donc $dim(U) < dim(V)$. De plus on a :

$$Tu = Tu + \lambda u - \lambda u = (T - \lambda I)u + \lambda u$$

or $(T - \lambda I)u \in U$ et $\lambda u \in U$ donc $Tu \in U$. $T|_u$ est donc un opérateur sur U. Or d'après l'hypothèse de réccurence $(T - \lambda I)$ a une matrice triangulaire supérieure ce qui revient à écrire :

$$Tu_j \in span(u_1, \ldots, u_j)$$

en rajoutant des vecteurs à la liste $(u_1, \ldots, u_m)$ on obtient la liste $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$ base de V. Pour tout k on a donc :

$$Tv_k = (T - \lambda I)v_k + \lambda v_k$$

de par la définition de U, $(T-\lambda I)v_k \in span(u_1,\ldots,v_m)$ on a donc :

$$Tv_k \in span(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_k)$$

donc d'après la Proposition 4.1, T à une matrice triangulaire supérieure par rapport à la base $(u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n)$.

Proposition 4.2 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ ayant une matrice triangulaire supérieure par rapport à une certaine base de V. T est inversible si et seulement si tout les termes sur la diagonale de la matrice sont non-nuls.*

Démonstration

- ***Sens direct :*** *Démontrons d'abord que si une des valeurs de la diagonale, dison λ_k est nulle alors la matrice associée à l'application T n'est pas inversible. Si $\lambda_1 = 0$ alors clairement T n'est pas injective, donc pas bijective, donc pas inversible. Supposons maintenant $\lambda_k = 0$ avec $k = 2,\ldots,n$. On a donc $T(v_k) \in span(v_1,\ldots,v_{k-1})$. On peut donc définir une nouvelle application linéaire :*

$$S : span(v_1,\ldots,v_k) \to span(v_1,\ldots,v_{k-1})$$

  $span(v_1,\ldots,v_k)$ est de dimension k et $span(v_1,\ldots,v_{k-1})$ est de dimension $k-1$ donc S ne peut pas être injective. Elle n'est donc pas bijective donc pas inversible.
- ***Sens indirect :*** *Supposons T non-inversible et montrons que cette proposition implique un λ_k nul. Si T n'est pas inversible alors T n'est pas injective (car pour un opérateur injectivité, surjectivité et bijectivité sont équivalents, Théorème 3.3). Il existe donc un vecteur v non nul et des scalaires $a_1,\ldots,a_k$ tels que*

$$\begin{aligned} T(v) &= 0 \\ T(a_1v_1+\ldots,a_kv_k) &= 0 \\ (a_1Tv_1+\ldots+a_{k-1}Tv_{k-1})+a_kTv_k &= 0 \qquad (4.4) \end{aligned}$$

  avec $(v_1,\ldots,v_n)$ une base de V. Clairement le premier terme appartient à $span(v_1,\ldots,v_{k-1})$ et le second appartient aussi car l'équation 4.4 implique $(a_1Tv_1+\ldots+a_{k-1}Tv_{k-1}) = -a_kTv_k$ ce qui revient à dire $Tv_k \in span(v_1,\ldots,v_k)$. Donc le coefficient de v_k est nul lorsque de Tv_k est exprimé par rapport à la base $(v_1,\ldots,v_n)$. Ce qui démontre $\lambda_k = 0$.

Proposition 4.3 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ dont la matrice associée est triangulaire supérieure par rapport à une certaine base de V. Les valeurs propres de l'application T sont les entrées sur la diagonale de la matrice associée.*

Démonstration *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V alors la matrice de T par rapport à cette base est donnée par :*

$$M(T, (v_1, \ldots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

et pour un scalaire λ

$$M(T - \lambda I, (v_1, \ldots, v_n)) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$$

λ est une valeur propre de T si et seulement si $\lambda = \lambda_k$ pour un $k \in \{1, \ldots, n\}$

4.3 Matrice diagonale

Définition 4.4 (Matrice Diagonale) *Une matrice est dite* diagonale *si tout les termes en dehors de la diagonale sont nuls.*

Proposition 4.4 *Si $T \in \mathscr{L}(V)$ a dim(V) valeurs propres distinctes alors T admet une matrice diagonale par rapport à une certaine base de V.*

Démonstration *Puisque T a $dim(V)$ valeurs propres distinctes, T a $dim(V)$ vecteurs propres associés. Or les vecteurs associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. Donc cette liste de vecteurs fournit une base de V. Par rapport à cette base, la matrice de T est diagonale.*

Proposition 4.5 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des valeurs propres distinctes de T. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *T a une matrice diagonale par rapport à une base de V.*
2. *V a une base construites par les vecteurs propres de T.*
3. *il existe des espaces vectoriels V uni-dimensionels $U_1, \ldots, U_m$ invariants sous T tel que $V = U_1 + \ldots + U_m$.*
4. *$V = Ker(T - \lambda_1 I) \oplus \ldots \oplus Ker(T - \lambda_m I)$.*
5. *$dim(V) = dim(Ker(T - \lambda_1 I)) + \ldots + dim(Ker(T - \lambda_n I))$*

Démonstration

1. *La Proposition 4.5 démontre l'équivalence des deux premières propositions.*
2. *Supposons maintenant que V possède une base de vecteurs propres de T en posant $U_j = span(v_j)$ on a bien une somme directe d'espace vectoriels invariants sous T. Donc la proposition 2 implique la 3.*
3. *Supposons maintenant la proposition 3 et démontrons qu'elle implique la 2. On procéde à la même désmontration que précédement, mais dans "l'autre sens".*
4. *Supposons maintenant la proposition 2 et montrons la 4. On a donc tout vecteur $v \in V$ exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs propres de T, soit :*

$$V = Ker(T - \lambda_1 I) + \ldots + Ker(T - \lambda_n I) \tag{4.5}$$

Cette somme est directe car les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants. La définition de la somme directe et la proposition 4 implique la proposition 5.

5. *Démontrons finalement que la proposition 5 implique la 2. On a*

$$dim(V) = dim(Ker(T - \lambda_1 I)) + \ldots + dim(Ker(T - \lambda_n I))$$

Formons une liste de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ propres de T. Pour montrer que cette liste est linéairement indépendante prenons un vecteurs v de V et montrons que la seule manière d'avoir $v = 0$ lorsqu'il est exprimé dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$ et d'avoir tout les scalaires $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ nuls, soit :

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$$

or les v_k sont des vecteurs des espaces propres de T, donc la seule manière d'avoir $v = 0$ est de prendre tout les $a_k = 0$. Les $v_1, \ldots, v_n$ sont donc lináirement indépendants et forment donc une base de V.

4.4 Espaces invariants sur des $\mathbb{R}$-espaces Vectoriels

Théoreme 4.4 *Tout opérateur sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie a un sous-espace invariant de dimension 1 ou 2.*

Démonstration *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$ et $T \in \mathscr{L}(V)$. Soit $v \neq 0 \in V$ alors la liste de vecteurs $(v, Tv, T^2v, \ldots, T^nV)$ ne peut pas être linéairement indépendantes puisqu'elle est de longueur $n+1$. Il existe donc des scalaires $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :*

$$0 = a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv$$

Utilisons ces scalaires pour construire un polynôme de degré n que nous écrivons sous sa forme factorisée :

$$c(x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_m)(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)\ldots(x^2 + \alpha_Mx + \beta_M)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv \\ &= c(T - \lambda_1I)\ldots(T - \lambda_mI)(T^2 + \alpha_1T + \beta_1I)\ldots(T^2 + \alpha_MT + \beta_MI)v \end{aligned}$$

ce qui revient à dire qu'au moins un des $(T-\lambda_kI)$ ou un des $(T^2+\alpha_KT+\beta_KI)$ n'est pas injectif. Si $(T-\lambda_kI)$ n'est pas injectif alors T à un espace invariant de dimension 1 qui est l'espace propre associé à la valeur propre λ_k. En revanche si c'est un des $(T^2 + \alpha_KT + \beta_KI)$ qui n'est pas injectif alors on a $(T^2 + \alpha_KT + \beta_KI)v = 0$. On cherche à trouver un espace invariant sous T de dimension 1 ou 2. Prenons $span(u, Tu)$. Tout élément de $span(u, Tu)$ est de la forme $au + bTu$, on a donc :

$$T(au + bTu) = aTu + bT^2u$$

or $T^2u = -\alpha_KTu - \beta_Ku$, donc :

$$T(au + bTu) = aTu - b\alpha_KTu - b\beta_Ku$$

donc $T(au + bTu) \in span(u, Tu)$.

Définition 4.5 (Projection) *Soit U, V et W des espaces vectoriels tels que $V = U \oplus W$. $P_{U,W} \in \mathscr{L}(V)$ défini par $P_{U,W}v = u$ pour tout $v \in V$ est la projection de V sur U "parallèlement" à W.*

Proposition 4.6 (Importante ! ! !) *P est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.*

Théoreme 4.5 *Tout opérateur sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire a une valeur propre.*

Démonstration *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Procédons à une démonstration par réccurence sur la dimension de V. Pour une dimension de 1 le théroème tient. Supposons donc $dim(V)$ un impair supérieur à 1. Le résultat tiens donc pour un sous-espace vectoriel de V de dimension $dim(V)-2$. Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. Si T à une valeur propre la démonstration est finie, sinon on sait que T a un sous-espace vectoriel invariant U de V de dimension 2. Soit W un sous-espace vectoriel de V tel que $V = U \oplus W$. W est de dimension $dim(V)-2$, on peut donc appliquer l'hypothèse de réccurence. $T|_W$ n'est pas nécessairement un opérateur sur W, on pose donc $S \in \mathscr{L}(W)$ tel que $Sw = P_{W,U}(Tw)$ pour tout $w \in W$. L'hypothèse d'induction implique que S à une valeur propre λ. ll nous faut maintenant chercher une valeur propre de $T|_{U+span(w)}$. Prenons donc un vecteur $u + aw \in U + span(w)$ avec $u \in U$ et $a \in \mathbb{F}$, on a donc :*

$$
\begin{aligned}
(T-\lambda I)(u+aw) &= Tu - \lambda U + a(Tw - \lambda w) \\
&= Tu - \lambda u + a(P_{U,W}(Tw) + P_{W,U}(Tw) - \lambda w) \\
&= Tu - \lambda u + a(P_{U,W}(Tw) + Sw - \lambda w) \\
&= Tu - \lambda u + aP_{U,W}(Tw)
\end{aligned}
$$

donc $(T-\lambda I)(u+aw) \in U$ or $dim(U + span(w)) > dim(U)$ donc $(T-\lambda I)|_{U+span(w)}$ n'est pas injectif. Il existe donc un vecteur $v \in U + span(w) \in V$ tel que $(T-\lambda I)v = 0$ ce qui revient à dire que T à une valeur propre.

Chapitre 5

Produit scalaire

5.1 Produit scalaire

Définition 5.1 (Forme) *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Une* forme *sur V est une application*

$$\phi : V \times V \to \mathbb{F}$$

Définition 5.2 (Forme symétrique) *Une forme $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$ est dite symétrique si pour tout $u, v \in V$:*

$$\phi(u, v) = \overline{\phi(v, u)}$$

Définition 5.3 (Forme bilinéaire) *Une forme $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$ est dite* bilinéaire *si pour tout $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{F}$ et pour tout $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$:*

$$\phi(\alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1, \alpha_2 u_2 + \beta_2 v_2) = \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \phi(u_1, u_2) + \alpha_1 \bar{\beta}_2 \phi(u_1, v_2) + \beta_1 \bar{\alpha}_2 \phi(v_1, u_2) + \beta_1 \bar{\beta}_2 \phi(v_1, v_2)$$

Définition 5.4 (Forme définie positive) *Une forme $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$ est dite* définie positive *si pour tout $v \in V$:*

$$\phi(v, v) \geq 0 \qquad et \qquad \phi(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Définition 5.5 (Produit scalaire) *Un produit scalaire sur un espace vectoriel V est une forme symétrique, bilinéaire, définie positive qui à tout couple d'éléments $u, v \in V$ associe le nombre $\langle u, v \rangle \in \mathbb{F}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *positivité $\langle v, v \rangle \geq 0$ pour tout $v \in V$.*
2. *définitivité $\langle v, v \rangle = 0$ si et seulement si $v = 0$.*

3. *additivité du premier élément* $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *pour tout* $u, v, w \in V$.
4. *homogénéité du premier élément :* $\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle$ *pour tout* $a \in \mathbb{F}$ *et* $u, v \in V$
5. *symétrie conjuguée* $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ *pour tout* $v, w \in V$.

Définition 5.6 (Espace préhilbertien) *Un* espace vectoriel préhilbertien V *est un* $\mathbb{F}$*-espace vectoriel muni d'un produit-scalaire.* V *peut-être de dimension infinie !*

Définition 5.7 (Espace Euclidien) *Un* espace Euclidien *est un espace préhilbertien de dimension finie sur* $\mathbb{R}$.

Définition 5.8 (Espace Hermitien) *Un* espace Hermitien *est un espace préhilbertien de dimension finie sur* $\mathbb{C}$.

5.2 Norme

Définition 5.9 *Soit* $v \in V$. *La* norme *de* V *dénotée* $||v||$ *est donnée par :*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Définition 5.10 (Orthoganlité ou perpendicularité) *Soit* $u, v \in V$. u *et* v *sont dits* orthogonaux *(ou* perpendiculaires*) si et seulement si*

$$\langle u, v\rangle = 0$$

Théoreme 5.1 (de Pythagore) *Soit* $u, v \in V$ *deux vecteurs orthogonaux. Alors*

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Démonstration $u, v \in V$ *orthogonaux.*

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 \end{aligned}$$

Théoreme 5.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Si* $u, v \in V$ *alors :*

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$$

Démonstration *Considérons la décomposition orthogonale de u sur v et w :*

$$u = \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} v + w$$

d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} ||u||^2 &= \left\| \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} v \right\|^2 + ||w||^2 \\ &= \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2} + ||w||^2 \\ &\geq \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2} \end{aligned}$$

et en multipliant les deux côtés de l'inégalité par $||v||^2$ *on obtient le résultat.*

Théoreme 5.3 (Inégalité triangulaire) $u, v \in V$ $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Démonstration

$$\begin{aligned} ||v + w||^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= ||v||^2 + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + ||w||^2 \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} &= 2Re\langle v, w\rangle \\ &\leq 2|\langle v, w\rangle| \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} ||v + w||^2 &= ||v||^2 + 2|\langle v, w\rangle| + ||w||^2 \\ &\leq ||v||^2 + ||w||^2 \end{aligned}$$

5.3 Bases orthonormales

Définition 5.11 (liste de vecteurs orthogonaux) *Une liste de vecteur unitaires* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est dite* orthogonale *si et seulement si :*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j$$

Proposition 5.1 *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une liste orthonormale de vecteurs de* V*. Alors*

$$\|a_1e_1 + \ldots + a_me_m\|^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_m|^2$$

Corollaire 5.1 *Toute liste de vecteurs orthonormaux est linéairement indépendnante.*

Démonstration *Soit* $(e_1, \ldots, e_m)$ *une liste de vecteurs linéairement indépendants et* $a_1, \ldots a_m \in \mathbb{F}$ *des scalaires tels que* $a_1e_1 + \ldots + a_me_m = 0$*. On a donc* $|a_1|^2 + \ldots + |a_m|^2 = 0$ *ce qui implique que tout les* $a_i = 0$*.*

Définition 5.12 (Base othonormale) *Une base orthonormale de* V *est une base de* V *formée de vecteurs orthonormaux.*

Théoreme 5.4 *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormale de* V*, et* v *un vecteur de* V
Alors

$$\begin{aligned} v &= \langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_n\rangle e_n \\ \|v\|^2 &= |\langle v, e_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, e_n\rangle|^2 \end{aligned}$$

Démonstration $v \in V$ *donc il existe des scalaires* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ *tels que* $v = a_1e_1 + \ldots + a_nv_n$*. En prenant le produit scalaire des deux côtés de l'équation avec* e_j *on a* $\langle v, e_j\rangle = a_j$ *et avec (Proposition 5.1) on en déduit la seconde équation.*

Théoreme 5.5 (Gram-Schmidt) *Soit* $(v_1, \ldots, v_m)$ *une liste de vecteurs linéairements indépendants de* V*.*
Alors il existe une liste de vecteurs orthonormaux $(e_1, \ldots, e_m)$ *tel que*

$$span(v_1, \ldots, v_m) = span(e_1, \ldots, e_m)$$

Démonstration *Pour la démonstration utilisons le procédé de Gram-Schmidt.*
Pour construire le premier vecteur e_1 *normalisons* v_1*. Donc* $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ *Pour construire tout les autres vecteurs (récursivement) utilisons :*

$$e_j = \frac{v_j - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1} - \ldots - \langle v_j, e_1\rangle e_1}{\|v_j - \langle v_j, e_{j-1}\rangle e_{j-1} - \ldots - \langle v_j, e_1\rangle e_1\|}$$

Clairement la norme des e_j est 1, donc c'est bien une liste de vecteurs unitaires. De plus, pour tout $1 \leq k \leq j$

$$\begin{aligned}
\langle e_k, e_j \rangle &= \langle \frac{v_j - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1} - \ldots - \langle v_j, e_1 \rangle e_1}{\|v_j - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1} - \ldots - \langle v_j, e_1 \rangle e_1\|}, e_k \rangle \\
&= \frac{\langle v_j, e_k \rangle - \langle v_j, e_k \rangle}{\|v_j - \langle v_j, e_{j-1} \rangle e_{j-1} - \ldots - \langle v_j, e_1 \rangle e_1\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc la liste est aussi orthogonale.

Corollaire 5.2 *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base orthonormale.*

Démonstration *Il suffit d'utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une telle base à partir de n'importe quelle base de cette espace vectoriel.*

Corollaire 5.3 *Tout liste de vecteurs orthonormaux de V peut-être étendue pour devenir une base orthonormale de V.*

Démonstration *Il suffit de rajouter à la liste de vecteurs orthonormaux suffisament de vecteurs linéairement indépendants pour former une base de V, puis appliquer le procédé de Gram-Schmidt à cette base.*

Corollaire 5.4 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. Si T admet une matrice triangulaire supérieure par rapport à une certaine base de V alors T admet une matrice triangulaire supérieure par rapport à une certaine base orthonormale de V.*

Démonstration *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. Si T admet une matrice triangulaire par rapport à cette base alors*

$$T(v_k) \in span(v_1, \ldots, v_k)$$

En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(v_1, \ldots, v_k)$ il vient $(e_1, \ldots, e_k)$ vérifiant :

$$span(e_1, \ldots, e_k) = span(v_1, \ldots, v_k)$$

donc T est invariant par rapport à $(e_1, \ldots e_k)$ pour tout $k < dim(V)$ ce qui revient à dire que T admet une matrice triangulaire supérieure par rapport à une base orthonormale.

Corollaire 5.5 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$. Alors T admet une matrice triangulaire supérieure par rapport à une certaine base orthonormale de V.*

Démonsatration *D'apres le Théorème 4.3 chaque opérateur sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel admet une matrice triangulaire supérieure et d'après le Corrollaire 5.4 l'opérateur admet une matrice triangulaire par rapport à une base orthonormale.*

5.4 Projection orthogonale et probème de minimisation

Définition 5.13 (Complément orthogonal) *Soit S un sous-espace vectoriel de V. Le* complément orthogonal *de S, noté $S^\perp$ est le sous-ensemble défini par :*

$$S^\perp = \{v \in V / v \perp w, \forall w \in S\}$$

Théoreme 5.6 *Soit U un sous-espace vectoriel de V,*
alors

$$V = U \oplus U^\perp$$

Démonstration *Soit U un sous-espace vectoriel de V.*
Commençons par montrer que $V = U + U^\perp$.
Soit $(e_1, \dots, e_m)$ une base orthonormale de U et $v \in V$.
Alors

$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m\rangle e_m + v - \langle v, e_1\rangle e_1 - \dots - \langle v, e_m\rangle e_m$$

et posons $u = \langle v, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m\rangle e_m$ et $w = v - \langle v, e_1\rangle e_1 - \dots - \langle v, e_m\rangle e_m$.
$u \in U$ et $w \in U^\perp$ car pour tout $1 \leq k \leq m$

$$\langle w, e_k\rangle = \langle v, e_k\rangle - \langle v, e_k\rangle = 0$$

De plus, si $v \in U \cap U^\perp$ alors v est normal à tout vecteur de U dont lui-même, donc $\langle v, v\rangle = 0$ ce qui implique $v = 0$ et finalement $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Corollaire 5.6 *Si U est un sous-espace vectoriel de V alors $(U^\perp)^\perp = U$*

Démonstration

- $\supset$: *Montrons d'abord* $U \subset (U^\perp)^\perp$
  Soit $u \in U$ *alors* $\langle u, v\rangle = 0$ *pour tout* $v \in U^\perp$. *Or* u *est normal a tout vecteur de* $U^\perp$ *donc* $u \in (U^\perp)^\perp$.

- $\subset$: *Supposons maintenant* $v \in (U^\perp)^\perp$. *Il existe donc* $u \in U$ *et* $w \in U^\perp$ *tel que* $v = u + w$. *Donc* $w = v - u \in U^\perp$. *Or* $v \in (U^\perp)^\perp$ *et* $u \in U \subset (U^\perp)^\perp$ *donc* $v - u = w \in (U^\perp)^\perp$. *Donc* $v - u \in U^\perp \cap (U^\perp)^\perp$ *donc* $\langle v - u, v - u\rangle = 0$ *donc* $v = u$. *Ainsi* $v \in (U^\perp)^\perp$ *implique* $v \in U$.

Théoreme 5.7 (de la meilleur approximation) *Soit* U *un sous-espace vectoriel de* V *et* $v \in V$.*Alors*

$$\|v - P_U v\| \leq \|v - u\|$$

pour tout $u \in U$ *avec* $P_U v$ *la projection orthogonale de* v *sur* U.

Démonstration *Soit* $u \in U$ *alors*

$$\|v - P_U v\|^2 \leq \|v - P_U v\|^2 + \|P_U v - u\|^2$$

et d'après le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned} \|v - P_U v\|^2 &= \|v - P_U v + P_U v - u\|^2 \\ &= \|v - u\|^2 \end{aligned}$$

Proposition 5.2 (Méthode des moindres carrés) *Pour trouver la meilleur approximation d'un système linéaire qui n'a pas de solutions, il faut :*

1. *calculer* $P_{Im(A)}b$
2. *trouver* $v \in \mathbb{F}^n$ *tel que* $Av = P_{Im(A)}b$.

Définition 5.14 (Système normal) *Le* système normal *associé au système* $Ax = b$ *est* $A^t Ax = A^t b$.

5.5 Fonctionnels linéaires et adjoints

Définition 5.15 (Fonctionnel Linéaire) *Soit* V *un* $\mathbb{F}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*
Un fonctionnel linéaire *sur* V *est une application linéaire* $T \in \mathscr{L}(V, \mathbb{F})$.

Proposition 5.3 *Soit* $T \in \mathscr{L}(V, \mathbb{F})$.
Alors il existe un unique vecteur v *tel que*

$$T(u) = \langle u, v\rangle$$

Démonstration *Commençons par montrer qu'il existe un vecteur $v \in V$ tel que pour tout $u \in V$, $T(u) = \langle u, v\rangle$.*
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de V, alors

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\langle u, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle u, e_n\rangle e_n) \\ &= \langle u, e_1\rangle T(e_1) + \ldots + \langle u, e_n\rangle T(e_n) \\ &= \langle u, \overline{T(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{T(e_n)} e_n\rangle \end{aligned}$$

En posant $v = \overline{T(e_1)} e_1 + \ldots + \overline{T(e_n)} e_n$ on a donc montrer qu'il existe un vecteur $v \in V$ tel que $T(u) = \langle u, v\rangle$. Montrons maintenant, par l'absurde que ce vecteur est unique. Soit $v_1, v_2 \in V$ tels que pour tout $u \in V$:

$$T(u) = \langle u, v_1\rangle = \langle u, v_2\rangle$$

on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u, v_1\rangle - \langle u, v_2\rangle \\ &= \langle u, v_1 - v_2\rangle \end{aligned}$$

cette relation est vraie pour tout vecteur $u \in V$, en particulier pour $u = v_1 - v_2$, ce qui implique $v_1 - v_2 = 0$ et finalement $v_1 = v_2$.

Définition 5.16 (Adjoint) *Soit $T \in \mathscr{L}(V, W)$.*
L'adjoint de T *est l'application $T^*(W, V)$ tel que pour tout $w \in W$*

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$$

pour tout $v \in V$.

Proposition 5.4 (Importante !) *Soit $T \in \mathscr{L}(V, W)$ et $\alpha \in \mathbb{F}$.*

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$
2. $(\alpha S)^* = \bar{\alpha} S^*$
3. *si $T \in \mathscr{L}(V)$, alors $T^* \in \mathscr{L}(V)$ et $(T^*)^* = T$.*
4. $(Id_v)^* = Id_v$
5. *si $S \in \mathscr{L}(W, U)$, $T \in \mathscr{L}(V, W)$ alors $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$*

Proposition 5.5 *Soit $T \in \mathscr{L}(V, W)$. Alors*

$$\begin{aligned} Ker(T^*) &= Im(T)^{\perp} \\ Im(T^*) &= Ker(T)^{\perp} \\ Ker(T) &= (Im(T)^*)^{\perp} \\ Im(T) &= Ker(T^*)^{\perp} \end{aligned}$$

Démonstration *Si $w \in W$, alors :*

$$\begin{aligned} w \in Ker(T^*) &\Leftrightarrow T^* w = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle v, T^* w\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle T(v), w\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow w \in Im(T)^{\perp} \end{aligned}$$

Définition 5.17 (Conjuguée Transposée) *La* conjuguée-transposée *d'une matrice m par n A est la matrice n par m, notée A^*, obtenue en échangeant les colonnes et les lignes puis en prenant le conjugué complexe de chaque élément de la matrice.*

Définition 5.18 (Matrice symétrique et hermitienne) *Si*

1. *$A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ et $A = A^*$ alors A est* symétrique*.*
2. *$A \in Mat(n, n, \mathbb{C})$ et $A = A^*$ alors A est* hermitienne*.*

Proposition 5.6 *Soit $T \in \mathscr{L}(V, W)$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de V et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base orthonormale de W.*
Alors

$$M(T^*, (f_1, \ldots, f_m), (e_1, \ldots, e_n))$$

est la conjuguée transposée de

$$M(T, (e_1, \ldots, e_n), (f_1, \ldots, f_m))$$

Démonstration *Soit $T \in \mathscr{L}(V, W)$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de V et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base orthonormale de W. La k^{e} colonne de $M(T)$ est donnée par l'expression des $T(e_k)$ par rapport à la base $(f_1, \ldots, f_m)$. Comme $(f_1, \ldots, f_m)$ est une base orthonormale les coefficients des $T(e_k)$ sont donnés par :*

$$T(e_k) = \langle Te_k, f_1\rangle f_1 + \ldots + \langle Te_k, f_m\rangle f_m$$

donc le k^{e} élément de la ligne j est donné par $\langle T(e_k), f_j\rangle$.

De même en prenant T^* au lieu de T et en inversant les les roles des e_j et f_k on a lélèment de la j^{e} ligne et de la k^{e} colonne de $M(T^*)$ donné par $\langle T^*(f_k), e_j\rangle = \langle f_k, T(e_j)\rangle = \overline{\langle T(f_k), e_j\rangle}$ qui est égal au conjugué de l'élèment de la k^{e} ligne et de la j^{e} colonne de $M(T)$.

Chapitre 6

Opérateur sur espace vectoriel muni d'un produit scalaire

6.1 Opérateur auto-adjoint et Normal

Définition 6.1 (Auto-adjoint) *Une application T est dite* auto-adjointe *si et seulement si $T = T^*$.*

Proposition 6.1 *Toute valeur propre d'un opérateur auto-adjoint est réelle.*

Démonstration *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur auto-adjoint. Soit $\lambda \in \mathbb{F}$ une valeure propre associée au vecteur v. On a donc :*

$$\begin{aligned} \lambda\|v\|^2 &= \langle \lambda v, v\rangle \\ &= \langle Tv, v\rangle \\ &= \langle v, T^*v\rangle \\ &= \langle v, Tv\rangle \\ &= \langle v, \lambda v\rangle \\ &= \bar{\lambda}\langle v, v\rangle \end{aligned}$$

donc $\bar{\lambda} = \lambda$ ce qui revient à dire que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 6.2 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ avec V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire vérifiant :*

$$\langle Tv, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in V.$$

alors $T = 0$.

Démonstration

$$\begin{aligned}\langle Tu, w\rangle &= \frac{\langle T(u+w), u+w\rangle - \langle T(u-w), u-w\rangle}{4} \\ &+ i\frac{\langle T(u+iw), u+iw\rangle - \langle T(u-iw), u-iw\rangle}{4} \quad \forall u, w \in V\end{aligned} \tag{6.1}$$

si $\langle Tv, v\rangle = 0$ *alors pour tout* $v \in V$ *l'équation* 6.1 *implique* $\langle Tu, w\rangle = 0$, *donc* $T = 0$.

Définition 6.2 (Normal) *Un opérateur* $T \in \mathscr{L}(V)$ *est normal s'il commute avec son adjoint, c'est-à-dire*

$$TT^* = T^*T$$

L'appélation "normal" pour de tels opérateurs découle du Corollaire 6.2.

Proposition 6.3 (Importante) *Un opérateur* $T \in \mathscr{L}(V)$ *est normal si et seulement si* $\|T^*v\| = \|Tv\|$ *pour tout* $v \in V$.

Démonstration *Soit* $T \in \mathscr{L}(V)$. T *est normal ce qui est équivalent à*

$$\begin{aligned} & T^*T - TT^* = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \langle T^*T - TT^*v, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in V \\ \Leftrightarrow\ & \langle T^*Tv, v\rangle = \langle TT^*v, v\rangle \\ \Leftrightarrow\ & \|Tv\| = \|T^*v\| \end{aligned}$$

Corollaire 6.1 *Soit* $T \in \mathscr{L}(V)$ *normal et* v *un vecteur propre de* T *associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{F}$. *Alors* v *est un vecteur propre de* T^* *associé à la valeur propre* $\bar{\lambda}$.

Démonstration *Comme* $\lambda \in \mathbb{F}$ *est une valeur propre de* T *associée au vecteur propre* v, $(T - \lambda I)v = 0$, *donc* $\|(T - \lambda I)v\| = 0$. *Or* T *est normal, donc d'après la (Proposition* 6.3*)*, $0 = \|(T - \lambda I)v\| = \|(T - \lambda I)^*v\| = \|(T^* - \bar{\lambda} I)v\|$ *donc* $\bar{\lambda}$ *est une valeur propre de* T *associé à* v.

Corollaire 6.2 *Si* $T \in \mathscr{L}(V)$ *est normal, alors les vecteurs propres de* T *associé à des valeurs propres distinctes sont normaux.*

Démonstration *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur normal avec α, β des valeurs propres de vecteurs propres associés u, v. Par définition, $T(u) = \alpha u$ et $T(v) = \beta v$ et d'après le Corollaire 6.1 $T^*(v) = \bar{\beta} v$, d'où :*

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)\langle u, v\rangle &= \langle \alpha u, v\rangle - \langle u, \bar{\beta} v\rangle \\ &= \langle Tu, v\rangle - \langle u, T^* v\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

or $\alpha \neq \beta$ donc 6.2 implique u normal à v.

Théoreme 6.1 (Spectral Complexe) *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$.*
Alors V à une base orthonormale formée par les vecteurs propres de T si et seulement si T est normal.

Démonstration

- ***Sens direct :*** *Supposons que V à une base orthonormale de vecteurs propres de T. Par rapport à cette base, la matrice de T est diagonale. La matrice de T^* est obtenue en prenant le conjugué des termes de la transposée de la matrice de T, donc la matrice de T^* est aussi diagonale. Les deux matrices étant diagonales elles commutent, donc T doit être normal.*

- ***Sens indirect :*** *Supposons maintenant T normal. D'après le Corollaire 5.5 il existe donc une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de V par rapport à laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure donc :*

  $$M\big(T, (e_1, \ldots, e_n)\big) = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  Montrons maintenant que cette matrice est en fait diagonale. Clairement

  $$\|Te_1\|^2 = |a_1|^2$$

  et

  $$\|T^* e_1\|^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2$$

  et d'après la Proposition 6.3 $\|T^* e_1\| = \|Te_1\|$ donc $|a_{12}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2 = 0$ ce qui est équivalent à $a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$. En procédant ainsi pour tout les Te_i il vient que tout les termes en dehors de la diagonale sont nuls.

Lemme 6.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur auto-adjoint. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifient $\alpha^2 < 4\beta$ alors $T^2 + \alpha T + \beta I$ est inversible*

Démonstration *Soit v un vecteur non-nul de V, on a donc :*

$$\begin{aligned}
\langle (T^2 + \alpha T + \beta I)v, v\rangle &= \langle T^2 v, v\rangle + \alpha\langle Tv, v\rangle + \beta\langle v, v\rangle \\
&= \langle Tv, Tv\rangle + \alpha\langle Tv, v\rangle + \beta\|v\|^2 \\
&\geq \|Tv\|^2 + |\alpha|\|Tv\|\|v\| + \beta\|v\|^2 \\
&= \left(\|Tv\| - \frac{|\alpha|\|v\|}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)\|v\|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Lemme 6.2 *Soi $T \in \mathscr{L}(V)$ auto-adjoint. Alors T a une valeur propre.*

Démonstration *Supposons V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $dim(V) = n$. La liste de vecteurs $(v, Tv, \ldots, T^n v)$ ne peut pas être linéairement indépendante puisqu'elle est de longueur $n + 1$. Il existe donc des scalaires $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$0 = a_0 v + \ldots + a_n T^n v$$

Supposons maintenant que les a_i sont les coefficients d'un polynôme donc :

$$\begin{aligned}
& a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \\
= \; & c(x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_m)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)\ldots(x^2 + \alpha_M x + \beta_M)
\end{aligned}$$

avec $c \neq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}
0 &= a_0 v + \ldots + a_n T^n v \\
&= (a_0 + \ldots + a_n T^n)v \\
&= c(T - \lambda_1)\ldots(T - \lambda_m)(T^2 + \alpha_1 T + \beta_1)\ldots(T^2 + \alpha_M T + \beta_M)v
\end{aligned}$$

or T est auto-adjoint donc d'après le Lemme 6.1 tout les $T^2 + \alpha_j x + \beta_j$ sont inversibles (donc $(T^2 + \alpha_j T + \beta_j)v \neq 0$) donc

$$(T - \lambda_1)\ldots(T - \lambda_m)v = 0 \tag{6.3}$$

donc pour au moins un $1 \leq j \leq m$ $(T - \lambda_j)v = 0$, ce qui revient à dire T à une valeur propre.

Théoreme 6.2 (Spectral Réel) *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $T \in \mathscr{L}(V)$. V à une base orthonormale formée par les vecteurs propres de T si et seulement si T est auto-adjoint.*

Démonstration

- ***Sens direct :*** *Supposons V muni d'une base orthonormale de vecteurs propres de V. Par rapport à cette base la matrice de T est diagonale. De plus tout les termes sont réels donc cette matrice est égale à sa conjuguée transposée. Donc $T = T^*$, ce qui revient à dire, par définition, T est auto-adjoint.*

- ***Sens indirect :*** *Supposons maintenant T auto-adjoint et montrons par réccurence sur la dimension de V que V possède une base orthonormale de vecteurs propres de T. Le résultat tiens trivialement pour $dim(V) = 1$. Supposons donc $dim(V) > 1$ et que le résultat tiens pour tout dimension inférieure. Soit λ une valeur propre de T et u le vecteur propre associé que l'on rend unitaire (le Lemme 6.2 garantit l'existence de cette valeur propre). Soit $U = span(u)$. $v \in U^\perp$ si et seulement si $\langle u, v\rangle = 0$. Supposons $v \in U^\perp$. Comme T est auto-adjoint :*

  $$\langle u, Tv\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = 0$$

  donc $v \in U^\perp$ implique $Tv \in U^\perp$, donc $U^\perp$ est invariant sous T. On définit donc $S = T|_{U^\perp}$. Prenons $v, w \in U^\perp$:

  $$\langle Sv, w\rangle = \langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle = \langle v, Sw\rangle$$

  donc S est auto-adjoint. Notre hypothèse d'induction nous permet donc de d'affirmer qu'il existe une base orthonormale de $U^\perp$ formée de vecteurs propres de S. Or les vecteurs propres de S sont des vecteurs propres de T donc en rajoutant u à une base orthonormale de $U^\perp$ de vecteurs propres de S donne une base orthonormale de V formée de vecteurs propres de T.

Corollaire 6.3 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur auto-adjoint (ou V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et T normal). Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de T. Alors*

$$V = Ker(T - \lambda_1) \oplus \ldots \oplus Ker(T - \lambda_m)$$

De plus, tout vecteur d'un des $Ker(T - \lambda_j)$ est normal à tout les vecteurs de toute les autres décompositions.

Démonstration *Le théorème spectral (6.2 ou 6.1) implique que V à une base orthonormale de vecteurs propres de T.*

6.2 Opérateurs Normaux sur $\mathbb{R}$-espaces vectoriels muni d'un produit scalaire

Lemme 6.3 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $T \in \mathscr{L}(V)$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est normal mais pas auto-adjoint.*
2. *la matrice de T par rapport à toute base orthonormale de V est de la forme*
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
avec $b \neq 0$.
3. *la matrice de T par rapport à une certaine base de V est de la forme*
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
avec $b > 0$.

Démonstration

1. *Supposons T normal mais pas auto-adjoint et (e_1, e_2) une base orthonormale de V avec :*
$$Mat\big(T, (e_1, e_2)\big) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$\|Te_1\|^2 = a^2 + b^2$ et $\|T^*e_1\|^2 = a^2 + c^2$. Or T est normal, donc $\|T^*e_1\| = \|Te_1\|$ soit $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ ou encore $b^2 = c^2 \Leftrightarrow (b = c)$ ou $(b = -c)$. Mais $b = c$ implique T auto-adjoint, donc $b = -c$. En effectuant le produit de $Mat\big(T, (e_1, e_2)\big)$ sous la condition $c = -b$ avec ça conjuguée transposée (donc $Mat(TT^*)$) puis en identifiant avec $Mat(T^*T)$ (les deux matrices sont égales car T est normal) il vient la condition $d = a$.

2. *Supposons maintenant le deuxième point. Si $b > 0$ l'implication est triviale. Si $b < 0$ alors par rapport à la base $(e_1, -e_2)$ la matrice de T est donnée par :*
$$Mat\big(T, (e_1, -e_2)\big) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & d \end{bmatrix}$$
avec $-b > 0$ donc l'implication est aussi démontrée.

3. *Supposons maintenant la troisième proposition. En effectuant le produit TT^* et T^*T on constate on remarque qu'ils sont égaux. De plus T n'est pas auto-adjoint donc T est normal.*

Proposition 6.4 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ normal et U un sous-espace invariant sous T. Alors :*

1. *$U^{\perp}$ est invariant sous T.*
2. *U est invariant sous T^*.*
3. *$(T|_U)^* = (T^*)|_U$*
4. *$T|_U$ est un opérateur normal sur U.*
5. *$T|_{U^{\perp}}$ est un opérateur normal sur $U^{\perp}$.*

Démonstration

1. *Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormale de U. Il est possible de rajouter $(f_1, \ldots, f_n)$ pour que $(e_1, \ldots, f_n)$ soit une base orthonormale de V. Comme U est invariant sous T, $Te_j \in span(e_1, \ldots, e_m)$ pour tout $1 \leq j \leq m$. La matrice de T est donc donnée par :*

$$Mat\big(T, (e_1, \ldots, f_n)\big) = \begin{bmatrix} A & B \\ & C \end{bmatrix}$$

   avec $A \in Mat(m, m, \mathbb{R})$, $B, C \in Mat(n, n, \mathbb{R})$. T étant normal, pour tout $1 \leq j \leq m$ $\|Te_j\| = \|T^*e_j\|$ donc $B = 0$. Ainsi $Tf_k \in span(f_1, \ldots, f_m)$ pour tout $1 \leq k \leq m$ ce qui revient à dire que $(f_1, \ldots, f_m)$ qui est une base de $U^{\perp}$ est invariant sous T.

2. *De même U est invariant sous T^*.*

3. *Soit $S = T|_U$ et $v \in U$, alors pour tout $u \in U$:*

$$\langle Su, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle$$

   or $T^*v \in U$ donc $S^*v = T^*v$, ce qui revient à dire $(T|_U)^* = T^*|_U$.

4. *T est normal, donc T commute avec T^* et $(T|_U)^* = T^*|_U$ donc $T|_U$ commute avec son adjoint donc $T|_U$ est normal.*
5. *$U^{\perp}$ est invariant sous T et la restriction de T à un espace invariant sous T est normal donc $T|_{U^{\perp}}$ est normal.*

Théoreme 6.3 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et $T \in \mathscr{L}(V)$. T est normal si et seulement si il existe une base orthonormale de V par rapport à laquelle T à une matrice diagonale par bloc, où chaque bloc est de dimension 1, ou 2 vérifiant :*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $b > 0$.

Démonstration *Supposons une base de V telle que la matrice de T par rapport à cette base vérifie l'énoncé du théorème. Par rapport à cette base la matrice de T commute avec sa conjuguée transposée, donc T commute avec T^* ce qui revient à dire que T est normal.*
Supposons maintenant T normal et montrons par récccurence sur la dimension de V que la matrice de T par rapport à une base orthonormée de V prends la forme énoncée par le théorème. Le résultat tiens trivialement pour $dim(V) = 1$ et pour $dim(V) = 2$ il suffit d'invoquer le Lemme 6.3. Supposons maintenant $dim(V) > 2$ et que le résultat tiens pour toute dimension inférieure. D'après le théorème 4.4 il existe un sous-espace vectoriel U invariant sous T de dimension 1 ou 2.

1. *si $dim(U) = 1$ alors il suffit de prendre un vecteur de U de norme 1. Ce vecteur forme une base orthonormale de U et donc la matrice de $T|_U$ est carrée de dimension 1*
2. *si $dim(U) = 2$ alors d'après la Proposition 6.4 $T|_U$ est normal et d'après le Lemme 6.3 la matrice $T|_U$ à la forme énoncée dans le théorème.*

$U^\perp$ est invariant (par l'hypothèse d'induction) donc d'après la Proposition 6.4 $T|_{U^\perp}$ est normal et d'après le Lemme 6.3 la matrice $T|_U$ à la forme énoncée dans le théorème. Ainsi en ajoutant la base de $U^\perp$ à celle de U il vient une base orthonormale par rapport à laquelle la matrice de T à la forme demandée.

6.3 Isométrie

Définition 6.3 (Isométrie) *Un opérateur $T \in \mathscr{L}(V)$ est une* isométrie *si et seulement si pour tout $v \in V$*

$$\|Sv\| = \|v\|$$

Théoreme 6.4 *Soit $S \in \mathscr{L}(V)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *S est une isométrie*
2. *$\langle Su, Sv\rangle = \langle u, v\rangle$ pour tout $u, v \in V$.*
3. *$S^*S = I$*
4. *$(Se_1, \dots, Se_n)$ est une liste de vecteurs orthonormaux de V si $(e_1, \dots, e_n)$ est une liste de vecteurs orthonoraux de V.*
5. *il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de V telle que $(Se_1, \dots, Se_n)$ est orthonormale.*
6. *S^* est une isométrie*
7. *$\langle S^*u, S^*v\rangle = \langle u, v\rangle$ pour tout $u, v \in V$.*
8. *$SS^* = I$*
9. *$(S^*e_1, \dots, S^*e_n)$ est une liste de vecteurs orthonormaux de V si $(e_1, \dots, e_n)$ est une liste de vecteurs orthonoraux de V.*
10. *il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de V telle que $(S^*e_1, \dots, S^*e_n)$ est orthonormale.*

Démonstration

1. *Supposons S une isométrie. Pour tout $u, v \in V$:*

$$\begin{aligned} \langle Su, Sv\rangle &= \frac{\|Su + Sv\|^2 - \|Su - Sv\|^2}{4} \\ &= \frac{\|S(u+v)\|^2 - \|S(u-v)\|^2}{4} \\ &= \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4} \\ &= \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

2. *Supposons maintenant $\langle Su, Sv\rangle = \langle u, v\rangle$ on a pour tout $u, v \in V$:*

$$\langle (S^*S - I)u, v\rangle = \langle Su, Sv\rangle - \langle u, v\rangle$$

ce qui d'après l'hypothèse donne 0. En prenant $v = (S^*S - I)u$ on a bien $S^*S - I = 0$.

3. *Supposons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de V, on a donc :*

$$\langle Se_j, Se_k\rangle = \langle (S^*S - I)e_j, e_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle$$

donc $(Se_1, \dots, Se_n)$ est orthonormal

4. *trivialement le 4e énoncé implique le 5e.*
5. *Supposons maintenant la 5e proposition et démontrons la 1re. Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* V *telle que* $(Sv_1, \ldots, Sv_n)$ *est orthonormale et* $v \in V$*, alors :*

$$\begin{aligned} \|Sv\|^2 &= \|S(\langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_n\rangle)\|^2 \\ &= \|\langle v, e_1\rangle Se_1 + \ldots + \langle v, e_n\rangle Sv_n\|^2 \\ &= |\langle v, e_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, e_n\rangle|^2 \\ &= \|v\|^2 \end{aligned}$$

6. *on sait que* $SS^* = I \Leftrightarrow S^*S = I$ *donc il suffit de remplacer* S *par* S^* *dans les démonstrations ci-dessus pour obtenir les démonstration des propositions restantes.*

Théoreme 6.5 *Soit* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $S \in \mathscr{L}(V)$*.* S *est une isométrie si et seulement si il existe une base de* V *orthonormale de vecteurs propres de* S *dont les valeurs absolues des valeur propres valent 1.*

Démonstration

- ***Sens direct*** *Soit* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ *les valeurs propres de* $S \in \mathscr{L}(V)$*. On a donc :*

$$v = \langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v, e_m\rangle e_m \tag{6.4}$$
$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle v, e_m\rangle|^2$$

En appliquant S *à 6.4 il vient :*

$$\begin{aligned} Sv &= \langle v, e_1\rangle Se_1 + \ldots + \langle v, e_m\rangle Se_m \\ &= \lambda_1\langle v, e_1\rangle e_1 + \ldots + \lambda_m\langle v, e_m\rangle Se_m \end{aligned}$$

Ce qui nous donne donc la condition $\lambda_j = 1$ *pour que* S *soit une isométrie*

- ***Sens indirect*** *D'après le théorème spectral complexe il existe une base de* V *formée de vecteurs propres de* S*. Soit* λ_i *la valeur propre associée à* e_i *:*

$$|\lambda_i| = \|\lambda_i e_i\| = \|Se_i\| = \|e_i\| = 1$$

donc toute les valeurs propres de S *vallent 1.*

Théoreme 6.6 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. S est une isométrie si et seulement si il existe une base orthonormale de V par rapport à laquelle la matrice de S est diagonale par bloc avec :*

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

comme blocs, $\theta \in [0; \pi]$.

Démonstration

– ***Sens direct :*** *Supposons S une isométrie. D'après le Théorème 6.3 S admet une matrice diagonale par blocs de dimension 1 ou 2 vérifiant :*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $b > 0$ par rapport à une certaine base orthonormale de V.

1. *Soit λ_i les termes des blocs de dimension 1. Il existe donc e_i tel que $Se_i = \lambda e_i$ or S est une isométrie donc $\|Se_i\| = \|\lambda e_i\| = \|e_i\| = 1$. Donc pour tout i $\lambda_i = \pm 1$.*
2. *Si le bloc est une matrice 2×2 comme décrite ci-dessus, alors il existe e_j et e_{j+1} par rapport auxquels :*

$$Se_j = ae_j + be_j$$

or S est une isométrie donc

$$\|Se_j\|^2 = \|ae_j\|^2 + \|be_{j+1}\|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

en supposant $\theta \in [0, \pi]$ on a donc $a = cos(\theta)$ et $b = sin(\theta)$, ce qui fini la démonstration dans le sens direct.

– ***Sens indirect :*** *Supposons maintenant qu'il existe une base orthonormale de V par rapport à laquelle la matrice de S à la forme énoncée par le théorème. Il est donc possible d'écrire V comme :*

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

avec les U_i les sous-espaces vectoriels de V de dimension 1 ou 2. Comme la base est orthonormale, toute paire de vecteurs u_1, u_2 appartenant à des U_i distincts sont orthogonaux. La forme de la matrice *implique aussi que $S|_{U_i}$ est une isométrie pour tout i. Si $v \in V$ il est donc possible d'écrire :*

$$\begin{aligned}
\|Sv\|^2 &= \|Su_1 + \ldots + Su_m\|^2 \\
&= \|Su_1\|^2 + \ldots + \|Su_m\|^2 \\
&= \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_m\|^2 \\
&= \|v\|^2
\end{aligned}$$

ce qui démontre que S est une isométrie

Définition 6.4 (Homothétie) *Une homothétie $T \in \mathscr{L}(V)$ est une application qui vérifie :*

$$T = \lambda Id \qquad \lambda \in \mathbb{F}$$

Chapitre 7

Opérateurs sur $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

7.1 Vecteurs propres généralisés

Définition 7.1 (Vecteur propre généralisé) *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de T. Un* vecteur propre généralisé *v est défini par :*

$$(T - \lambda I)^j v = 0$$

pour un $j \in \mathbb{N}$.

Proposition 7.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $Ker(T^m) = Ker(T^{m+1})$ alors*

$$Ker(T^0) \subset Ker(T^1) \subset \ldots \subset Ker(T^m) = Ker(T^{m+1}) = Ker(T^{m+2}) = \ldots$$

Démonstration

$\subset$ **:** *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $Ker(T^m) = Ker(T^{m+1})$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et montrons :*

$$Ker(T^{m+k}) = Ker(T^{m+k+1})$$

D'après l'hypothèse de départ, on sait que $Ker(T^{m+k}) \subset Ker(T^{m+k+1})$.

$\supset$ **:** *Pour montrer l'inclusion dans l'aurte sens, prenons $v \in Ker(T^{m+k+1})$ alors*

$$0 = T^{m+k+1}v = T^{m+1}(T^k v)$$

donc $T^k v \in Ker(T^{m+1}) = Ker(T^m)$ donc $v \in Ker(T^{m+k})$ ce qui démontre donc l'inclusion $Ker(T^{m+k+1}) \subset Ker(T^{m+k})$.

Proposition 7.2 *Si $T \in \mathscr{L}(V)$ alors*

$$Ker\big(T^{dim(V)}\big) = Ker\big(T^{dim(V)+1}\big) = Ker\big(T^{dim(V)+2}\big) = \dots$$

Démonstration *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. Démontrons $Ker\big(T^{dim(V)}\big) = Ker\big(T^{dim(V)+1}\big)$ par l'absurde, soit :*

$$\{0\} = Ker(T^0) \subsetneq Ker(T^1) \subsetneq \dots \subsetneq Ker(T^{dim(V)}) \subsetneq Ker(T^{dim(V)+1})$$

Pour chaque inclusion la dimension du sous-espace doit augmenter d'au moins 1, donc la dimension de $Ker\big(T^{dim(V)+1}\big) \geq dim(V+1)$ ce qui est une contradiction avec la taille maximale d'un sous-espace qui est $dim(V)$.

Corollaire 7.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et λ une valeur propre de T. Alors l'ensemble des vecteurs propres généralisés associés à λ est égal à $Ker(T - \lambda I)^{dim(V)}$.*

Démonstration *Si $v \in Ker(T - \lambda I)^{dim(V)}$ alors par définition d'un vecteur propre généralisé λ est la valeur prorpre associée.*
Si $v \in V$ est un vecteur propre généralisé de T correspondant à λ alors il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $v \in Ker(T - \lambda I)^j$.

Définition 7.2 (Opérateur Nilpotent) *Un opérateur $N \in \mathscr{L}(V)$ est dit nilpotent s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $N^j v = 0$ pour tout $v \in V$.*

Corollaire 7.2 *Soit $N \in \mathscr{L}(V)$ nilpotent. Alors $N^{dim(V)} = 0$.*

Démonstration *Comme V est nilpotent alors tout vecteur de V est un vecteur propre généralisé associé à la valeur propre 0. Donc d'après le Corrolaire 7.1 $Ker(T^{dim(V)}) = V$.*

Proposition 7.3 *Si $T \in \mathscr{L}(V)$ alors :*

$$Im\big(T^{dim(V)}\big) = Im\big(T^{dim(V+1)}\big) = \dots$$

Démonstration *Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq dim(V)$, alors d'après le Théorème 3.1 :*

$$\begin{aligned} dim(Im(T^m)) &= dim(V) - dim(Ker(T^m)) \\ &= dim(V) - dim(Ker(T^{dim(V)})) \\ &= dim(Im(T^{dim(V)})) \end{aligned}$$

7.2 Polynôme caractéristique

Théoreme 7.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $\lambda \in \mathbb{F}$. Pour toute base de V par rapport à laquelle T à une matrice triangulaire supérieur, λ apparait*

$$dim\big(Ker(T - \lambda I)^{dim(V)}\big)$$

fois sur la diagonale de la matrice de T.

Démonstration *Supposons $\lambda = 0$ (Il est facile de généraliser la démonstration à $\lambda \neq 0$ en remplaçant T par $T - \lambda I$). Posons $dim(V) = n$ et démontrons le théorème par réccurence sur la dimension de V. Le résultat tiens pour $dim(V) = 1$, supposons donc $dim(V) = n > 1$ et montrons que le résultat tiens pour pour $dim(V) = n + 1$.*
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V par rapport à laquelle T a une matrice triangulaire supérieure de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1} & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Posons $U = span(v_1, \ldots, v_{n-1})$. U est invariant sous T. D'après notre hypothèse d'induction 0 apparait $dim\big(Ker(T|_U)^{n-1}\big)$ fois. Or $Ker(T|_U)^{n-1} = Ker(T|_U)^n$ car $dim(U) = n - 1$, donc 0 apparait $dim\big(Ker(T|_U)^n\big)$ fois. Considérons maintenant λ_n. Soit

1. *$\lambda \neq 0$ alors on a :*

$$M(T^n) = M(T)^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{n-1}^n & \\ 0 & & & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

donc il existe $u \in U$ tel que $T^n v_n = u + \lambda_n^n v_n$. Prenons $u \in Ker(T^n)$ on a donc $v = \tilde{u} + a v_n$ avec $\tilde{u} \in U$ et $a \in \mathbb{F}$, donc :

$$0 = T^n v = T^n \tilde{u} + a T^n v_n = T^n \tilde{u} + au + a\lambda_n^n v_n$$

or $T^n \tilde{u}, au \in U$ mais $v_n \notin U$ donc $a\lambda_n^n = 0$. Or $\lambda_n \neq 0$ donc $a = 0$ donc $v = \tilde{u} \in U$ et $Ker(T^n) \subset U$.

2. $\lambda = 0$ *et montrons* $dim(Ker(T^n)) = dim(Ker(T|_U)^n + 1)$. *En utilisant le théorème 2.5 il vient :*

$$\begin{aligned} dim(Ker(T^n)) &= dim(U \cap Ker(T^n)) + dim(U + Ker(T^n)) - dim(U) \\ &= dim(Ker(T|_U)^n) + dim(U + Ker(T^n)) - (n-1) \end{aligned}$$

Soit $w = u - v_n$ *avec* $u \in U$ *alors* $T^n(u - v_n) = T^n u - T^n v_n$. *Pour que* $u - v_n \in Ker(T^n)$ *il faut donc prendre* $T^n u = T^n v_n$, *or :*

$$T^n v_n = T^{n-1}(T v_n) \in Im(T|_U)^{n-1} = Im(T|_U)^n$$

donc il existe bien $u \in U$ *tel que* $u - v_n \in Ker(T^n)$ *et*

$$n = dim(V) \geq dim(U + Ker(T^n)) > dim(U) = n - 1$$

donc $dim(U + Ker(T^n)) = n$

Définition 7.3 (Multiplicité) *Soit* $T \in \mathscr{L}(V)$. *La multiplicité de la valeur propre* λ *est définie comme étant la dimension de l'espace propre généralisé associé à* λ.

Proposition 7.4 *Si* V *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $T \in \mathscr{L}(V)$ *alors la somme des multiplicités de toute les valeurs propres de* T *vaut* $dim(V)$.

Démonstration *Soit* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $T \in \mathscr{L}(V)$. *Alors d'après le Théorème 4.3 il existe une base de* V *par rapport à laquelle la matrice de* T *est triangulaire supérieure. D'après le Théorème 7.1 la multiplicité de* λ *vaut le nombre de fois que* λ *apparaît sur la diagonale de cette matrice, or la matrice est de dimension* n *donc elle a* $dim(V)$ *valeurs propres donc la somme des multiplicités des valeurs propres de* T *vaut* $dim(V)$.

Définition 7.4 (Polyôme caractéristique) *Soit* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel,* $T \in \mathscr{L}(V)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ *les valeurs propres distinctes de* T *et* $d_j \in \mathbb{N}$ *la multiplicité de la valeur propre* λ_j, *alors*

$$(z - \lambda_1)^{d_1} \ldots (z - \lambda_m)^{d_m}$$

est le polynôme caractéristique de T.

Théoreme 7.2 (Cayley-Hamilton) *Soit* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel,* $T \in \mathscr{L}(V)$ *et* q *le polynôme caractéristique de* T, *alors*

$$q(T) = 0$$

Démonstration *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V par rapport à laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure. Montrer $q(T) = 0$ est équivalent à montrer $q(T)v_j = 0$ pour $j = 1, \ldots, n$ ou encore :*

$$(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_j)v_j = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, n$$

Trivialement $Tv_1 - \lambda_1 v_1 = 0$. Supposons donc que le résultat tiens pour $j - 1 > 1$. Comme la matrice de T est triangulaire supérieure on a :

$$(T - \lambda_j)v_j \in span(v_1, \ldots, v_{j-1})$$

donc d'apres l'hypothèse d'induction

$$\Big((T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_{j-1} I)\Big)(T - \lambda_j)v_j = 0$$

7.3 Décomposition d'un opérateur

Proposition 7.5 *Si $T \in \mathscr{L}(V)$ et $p \in P(\mathbb{F})$ alors $p(T)$ est invariant sous T.*

Démonstration *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$, $p \in P(\mathbb{F})$ et $v \in Ker(p(T))$. Alors $p(T)v = 0$, donc :*

$$(p(T))(Tv) = T(p(T)v) = T(0) = 0$$

donc $Tv \in Ker(p(T))$ donc $p(T)$ est invariant sous T.

Théoreme 7.3 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ des valeurs propres distinctes de T et $U_1, \ldots, U_m$ les sous-espaces correspondants aux vecteurs propres généralisés associés. Alors :*

1. *$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$*
2. *U_j est invariant sous T pour tout $1 \leq j \leq m$.*
3. *$(T - \lambda_j I)|_{U_j}$ est nilpotent pour tout $1 \leq j \leq m$.*

Démonstration

1. *la multiplicité de λ_j vaut $dim(U_j)$ (par définition 7.3) et la somme des multiplicités vaut $dim(V)$(7.4), donc :*

$$dim(V) = U_1 + \ldots + U_m \tag{7.1}$$

Posons $U = U_1 + \ldots + U_m$ alors U est invariant sous T donc il est légitime de poser $S \in \mathscr{L}(U)$ avec $S = T|_U$. S à les mêmes valeurs propres que T avec les même multiplicités, donc

$$dim(U) = dim(U_1) + \ldots + dim(U_m) \tag{7.2}$$

ce qui avec l'équation 7.1 donne $dim(U) = dim(V)$, or U est un sous-espace vectoriel de V, donc $U = V$ et $V = U_1 + \ldots + U_m$ ce qui avec 7.2 permet de conclure.

2. *Soit $U_j = Ker(T - \lambda_j I)^{dim(V)}$ pour tout $1 \leq j \leq m$. D'après la Proposition 7.5 on a $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.*
3. *découle de la définition d'un opérateur nilpotent (7.2).*

Corollaire 7.3 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$. Alors il existe une base de V formée par les vecteurs propres généralisés de T.*

Démonstration *Il suffit de prendre une base de chaque espace propre et de faire une base avec tout ces vecteurs à l'aide du Théorème 7.3.*

Lemme 7.1 *Soit $N \in \mathscr{L}(V)$ nilpotent. Alors il existe une base de V par rapport à laquelle la matrice de T est donnée par :*

$$\begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

(tout les termes sur la diagonale et en-dessous sont nuls).

Démonstration *Prenons une base de $Ker(N)$ puis étendons là en une base de $Ker(N^2)$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir une base de V. Au moins la première colonne ne contient que des 0 puisqu'elles sont constituées de vecteurs de $Ker(N)$. Les quelques colonnes d'après sont les images de vecteurs de $Ker(N^2)$, donc en appliquant N à un de ces vecteurs on obtient un vecteur de $Ker(N)$ donc ces vecteurs ne peuvent pas contenir autre chose que des 0 sur la diagonale. De proche en proche, on démontre le lemme.*

Théoreme 7.4 (Important) *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $T \in \mathscr{L}(V)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de T. Alors il existe une base de V*

par rapport à laquelle la matrice de T est diagonale par blocs avec chaque bloc de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Démonstration *Pour $j = 1, \ldots, m$ supposons U_j l'espace propre généralisé correspondant λ_j. D'après 7.3 $(T - \lambda_j I)|_{U_j}$ est nilpotent. Prenons une base pour chaque U_j. La matrice de $T|_{U_j}$ par rapport à cette base est donc de la forme évoquée dans le théorème. En ajoutant tout les bases des U_j il vient donc une matrice diagonale par blocs comme énoncé par le théorème.*

7.4 Polynôme minimal

Définition 7.5 (Polynôme minimal) *Le polynôme minimal p est le polynôme normalisé de plus petit degré qui vérifie $p(T) = 0$.*

Théoreme 7.5 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $q \in P(\mathbb{F})$. Alors $q(T) = 0$ si et seulement si le polynome minimal de T divise q.*

Démonstration *Soit p le polynôme minimal de T.*

- ***Sens direct*** *Supposons $q(T) = 0$. Il existe donc $s, r \in P(\mathbb{F})$ tel que :*

  $$q = sp + r \tag{7.3}$$

  avec $deg(r) \leq deg(p)$, d'où :

  $$0 = q(T) = s(T)p(T) + r(T) = r(T)$$

  or p est le polynôme minimal de T et $deg(r) \leq deg(p)$ donc $r = 0$. Donc l'équation 7.3 devient $q = sp$.
- ***Sens indirect*** *Supposons que p divise q. Il existe donc un polynôme s tel que $q = sp$, donc :*

  $$q(T) = S(T)p(T) = s(T)0 = 0$$

Théoreme 7.6 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. Alors les solutions du polynôme minimal sont précisement les valeurs propres de T.*

Démonstration *Soit*

$$p(z) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1}z^{m-1} + z^m$$

le polynôme minimal de T. Supposons $\lambda \in \mathbb{F}$ un racine de p. Alors le polynôme minimal de T peut s'écrire sous la forme :

$$p(z) = (z - \lambda)q(z)$$

avec q un polynôme normalisé. Or $p(T) = 0$, donc :

$$0 = (T - \lambda I)(q(T)v) \qquad \forall v \in V$$

Or le degré de q est inférieur de un au degré de p, donc il existe un vecteur $v \in V$ tel que $q(T)v \neq 0$, donc λ est une valeur propre.
Supposons maintenant $\lambda \in \mathbb{F}$ une valeur propre de T et $v \in V$ le vecteur propre associé à λ, donc $Tv = \lambda v$. En appliquant j fois T aux deux côtés on obtient $T^j v = \lambda^j v$, d'où :

$$\begin{aligned} 0 = p(T)v &= (a_0 + a_1 T + \ldots + a_{m-1}T^{m-1} + T^m)v \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m)v \\ &= p(\lambda)v \end{aligned}$$

or $v \neq 0$ donc $p(\lambda) = 0$.

7.5 Forme de Jordan

À défaut de pouvoir diagonaliser toutes les matrices, il est possible de les "Jordaniser" et ainsi de se rapprocher le plus possible de matrices diagonales (donc avec autant de 0 que possible).

Lemme 7.2 *Soit $N \in \mathscr{L}(V)$ nilpotent alors il existe $v_1, \ldots, v_k \in V$ tel que :*

1. *$(v_1, Nv_1, \ldots, N^{m(v_1)}v_1, \ldots, v_k, Nv_k, \ldots, N^{m(v_k)}v_k)$ est une base de V*
2. *$(N^{m(v_1)}v_1, \ldots, N^{m(v_k)}v_k)$ est une base de $Ker(N)$.*

avec $m(v_i)$ le plus grand entier tel que $N^{m(v_i)}v_i$ soit non nul.

Définition 7.6 (Base de Jordan) *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. Une base de V est dite* base de Jordan *de T si par rapport à cette base, la matrice de T est diagonale par blocs avec chaque bloc de la forme :*

$$\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Théoreme 7.7 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si $T \in \mathscr{L}(V)$ alors il existe une base de Jordan pour T.*

Démonstration *Soit $N \in \mathscr{L}(V)$ nilpotent et $v_1, \ldots, v_k \in V$ la base inversée de celle défini par l'énoncé du Lemme 7.2. Alors pour tout j N l'image de v_j est v_{j+1} donc la matrice de N par rapport à cette base est de la forme :*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Si $T \in \mathscr{L}(V)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des valeurs propres de T avec $U_1, \ldots, U_m$ les espaces propres associés.

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$$

et d'après le Théorème 7.3 chaque $(T - \lambda_j I)|_{U_j}$ est nilpotent. U_j a donc une base de Jordan et il suffit d'ajouter chacune de ses bases.

Chapitre 8

Opérateurs sur $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

8.1 Valeurs propres de matrices carrées

Définition 8.1 *$\lambda \in \mathbb{F}$ est une valeur propre de la matrice $A \in Mat(n, n, \mathbb{F})$ si il existe un vecteur v tel que $Ax = \lambda x$.*

Proposition 8.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$ et $A \in Mat(n, n, \mathbb{F})$ la matrice de T par rapport à une certaine base de V. Alors les valeurs propres de A sont les mêmes que les valeurs propres de T.*

Démonstration *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V par rapport à laquelle la matrice de T est A et $\lambda \in \mathbb{F}$. Montrons que λ est une valeur propre de T si et seulement si elle est une valeur propre de A.*

- ***Sens Direct*** *Supposons λ une valeur propre de T et $v \in V$ le vecteur propre associé, soit :*

  $$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

  avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$. Soit x la matrice associée au vecteur v (par rapport à la base $(v_1, \ldots, v_n)$).

  $$Ax = M(T)M(v) = M(Tv) = M(\lambda v) = \lambda M(v) = \lambda x$$

  donc λ est une valeur propre de A.
- ***Sens Indirect*** *Supposons maintenant $\lambda \in \mathbb{F}$ une valeur propre de A et x la matrice du vecteur associé (donc $Ax = \lambda x$). Définissons donc*

$v \in V$ par

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

avec a_i les termes de la matrice de x, donc :

$$M(Tv) = M(T)M(v) = Ax = \lambda x = M(\lambda x)$$

donc $Tv = \lambda v$, ce qui revient à dire que λ est une valeur propre de T.

8.2 Valeurs propres de matrice triangulaires supérieures

Définition 8.2 (Matrice Triangulaire Supérieur par Blocs) *Une* matrice triangulaire supérieure par blocs *est une matrice qui ne contient que des matrices carrées sur la diagonale et des zéros en dessous.*

Théoreme 8.1 (Important) *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$. Alors il existe une base de V par rapport à laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure par blocs où chaque bloc est :*

1. *de dimension 1*
2. *de dimension 2 sans valeurs propres.*

Démonstration *Trivialement le résultat tiens pour $dim(V) = 1$. Supposons donc $dim(V) > 1$ et démontrons par réccurence sur $dim(V)$ le résultat.*
Si T a une valeur propre alors U est un sous-espace de V invariant sous T, sinon posons U un espace invariant de dimension 2.
Posons A la matrice de $T|_U$, A n'a pas de valaeur propres. Posons donc W un sous-espace de V tel que $V = U \oplus W$. Pour utiliser l'hypothèse d'induction sur W il faudrait que W soit invariant sous T ce qui n'est pas garanti, posons donc $S \in \mathscr{L}(W)$ avec $Sw = P_{W,U}(Tw)$ pour tout $w \in W$. Par l'hypothès d'induction il existe une base de W par rapport à laquelle S à une matrice triangulaire supérieure comme dans l'énoncé. En ajoutant à cette base, celle de U il vient une base par rapport à laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure par blocs.

8.3 Polynôme caractéristique

Définition 8.3 (Polynôme caractéristique d'une matrice 2×2) *Le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 :*

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

est donné par :

$$p(x) = (x-a)(x-d) - bc$$

Proposition 8.2 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et $T \in \mathscr{L}(V)$ sans valeurs propres. Soit $p \in P(\mathbb{R})$ un polynôme normal de degré 2 et A la matrice de T par rapport à une certaine base de V.*

1. *si p est égal au polynôme caractéristique de A, alors $p(T) = 0$*
2. *si p n'est pas le polynôme caractéristique de A, alors $p(T)$ est inversible.*

Démonstration

1. *si p est égal au polynôme caractérsitique alors*

$$p(x) = (x-a)(x-d) - bc$$

donc

$$\begin{aligned} & (T-aI)(T-dI)v_1 = (T-dI)(T-aI)v_1 = (T-dI)(bv_2) = bcv_1 \\ \Leftrightarrow\ & (T-aI)(T-dI) - bcI = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-a)(x-d) - bc \end{aligned}$$

qui est bien le polynôme caractéristique.

2. *Soit q le polynôme caractéristique de A et supposons $p \neq q$. Écrivons :*

$$p(x) = x^2 + \alpha_1 x + \beta_1 \qquad q(x) = x^2 + \alpha_2 x + \beta_2$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. On a :

$$p(T) = p(T) - q(T) = (\alpha_1 - \alpha_2)T + (\beta_1 - \beta_2)I$$

si $\alpha_1 = \alpha_2$ alors $\beta_1 \neq \beta_2$ (sinon p=q) et $p(T)$ est un multiple de l'identité, donc A est inversible. Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$ alors :

$$p(T) = (\alpha_1 - \alpha_2)\left(T - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2} I\right)$$

qui est inversible car T n'a pas de valeurs propres.

Théoreme 8.2 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$. Supposons que la matrice de T par rapport à une base de V a la forme :*

$$\begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{bmatrix}$$

avec les A_j des matrices 1×1 ou 2×2 mais sans valeurs propres.

1. *si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors précisement $dim\big(Ker(T - \lambda I)^{dim(V)}\big)$ des blocs A_j sont de dimension 1.*
2. *si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifie $\alpha^2 < 4\beta$ alors précisement $\frac{dim\left(Ker(T^2+\alpha T+\beta I)^{dim(V)}\right)}{2}$ des martices A_j ont comme polynôme caractéristique $x^2 + \alpha x + \beta$.*

Démonstration

1. *Soit $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ avec $\alpha^2 < 4\beta$ et $p \in P(\mathbb{R})$ défini par :*

$$p(x) = \begin{cases} x - \lambda & \textit{pour démontrer la première partie} \\ x^2 + \alpha x + \beta & \textit{pour démontrer la seconde partie} \end{cases}$$

Soit $deg(p) = d$ et $dim(V) = n$. Soit $m \in \mathbb{N}$ le nombre de blocs sur la diagonale de la matrice. Si $m = 1$ le résultat tiens trivialement, supposons donc $m > 1$ et supposons que la matrice à la forme désirée pour $m - 1$. Soit U_j l'espace engendré par la base de A_j. Posons $U = U_1 + \ldots + U_{m-1}$. Clairement U est invariant sous T et la matrice de $T|_U$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

donc par l'hypothèse d'induction, précisement $\frac{dim(Ker(p(T|_U))^N)}{d}$ des matrices $A_1, \ldots, A_{m-1}$ ont un polynôme caractéristique p. Supposons $u_m \in U_m$. Soit $S \in \mathscr{L}(U_m)$ l'opérateur dont la matrice est donnée par A_m. En particulier, $Su_m = P_{U_M,U}Tu_m$, donc :

$$\begin{aligned} Tu_m &= P_{U,U_m}Tu_m + P_{U_m,U}Tu_m \\ &= v_U + Su_m \end{aligned} \tag{8.1}$$

avec v_U un vecteur de U. $Su_m \in U_m$ donc en appliquant T à l'équation 8.1 il vient :

$$T^2u_m = w_U + S^2u_m$$

avec $w_U \in U$*, donc :*

$$p(T)u_m = w_U + p(S)u_m$$

avec $w_U \in U$ *ce qui par ittération donne :*

$$p(T)^n u_m = w_U + p(S)^n u_m \tag{8.2}$$

Supposons $v \in Ker(p(T)^n)$*. Il est possible de décomposer* v *comme* $v = u + u_m$ *avec* $u \in U$ *et* $u_m \in U_m$ *avec 8.2 donne :*

$$0 = p(T)^n v = p(T)^n u + p(T)^n u_m = p(T)^n u + w_U + p(S)^n u_m$$

avec $w_U \in U$*. Or* $p(T)^n u, w_U \in U$ *et* $p(S)^n u_m \in U_m$ *alors* $p(S)^n u_m = 0$*.* $p(S)$ *est inversible, donc* $u_m = 0$ *et* $v = u \in U$ *ce qui prouve que* $Ker\big(p(T)^n\big) \in U$*.*

2. *Supposons maintenant que* p *est le polynôme caractéristique de* A_m*, donc* $dim(U_m) = d$*, montrons*

$$dim(Ker(p(T)^n)) = dim(Ker(p(T|_U)^n)) + d$$

Nous avons

$$\begin{aligned} dim(Ker(p(T)^n)) &= dim(U \cap Ker(p(T)^n)) \\ &\quad + dim(U + ker(p(T)^n)) - dim(U) \\ &= dim(Ker(p(T|_U)^n)) + \\ &\quad dim(U + Ker(p(T)^n))) - (n-d) \end{aligned}$$

Il nous reste donc à montrer $u + Ker(p(T)^n) = V$*. Prenons* $u_m \in U_m$*. Comme le polynôme caractéristique de* S *est égal à* p*,* $p(S) = 0$ *donc* $p(T)u_m \in U$ *et :*

$$p(T)^n u_m = p(T)^{-1}(p(T)u_m) \in Im(p(T|_U)^{n-1}) = Im(p(T|_U)^n)$$

donc il est possible de prendre $u \in U$ *tel que* $p(T)^n u_m = p(T|_U)u$*.*

$$\begin{aligned} p(T)^n(u_m - u) &= p(T)^n u_m - p(T)^n u \\ &= p(T)^n u_m - p(T|_U)^n u \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $u_m - u \in Ker(p(T)^n)$ *et* $u_m = u + (u_m - u) \in U + Ker(p(T)^n)$*. Donc* $U_m \in U + Ker(p(T)^n)$ *alors* $V = U + U_m \in U + Ker(p(T)^n)$ *et* $U + Ker(p(T)^n) = V$*.*

Définition 8.4 (Paire propre) *Soit V un ℝ-espace vectoriel, $T \in \mathscr{L}(V)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Le couple (α, β) est une* parie propre *de T si*

1. $\alpha^2 < 4\beta$
2. $T^2 + \alpha T + \beta I$ *n'est pas injectif.*

Définition 8.5 (Multiplicité d'une paire propre) *La multiplicité d'une paire propre (α, β) est définie par :*

$$\textit{Multiplicité de } (\alpha, \beta) = \frac{dim\big(Ker(T^2 + \alpha T + \beta I)^{dim(V)}\big)}{2}$$

Proposition 8.3 *Si V est un ℝ-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$ alors la somme des multiplicité de toutes les valeurs propres plus la somme de toutes les paires propres de T est égal à $dim(V)$.*

Démonstration *Soit V un ℝ-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$. Il existe une base de V par rapport à laquelle la matrice de T à la forme énoncée dans le Théorème 8.2. La multiplicité de la valeur propre λ est donnée par le nombre de fois qu'elle apparaît sur cette diagonale et la multiplicité de la paire propre (α, β) est donnée par le nombre de fois que $x^2 + \alpha x + \beta$ apparaît comme polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 sur la diagonale. Étant donné que la diagonale à pour longueur $dim(V)$ la somme des multiplicités de toutes les valeurs propres et la somme du double des multiplicités des paires propres doit être égal à $dim(V)$.*

Définition 8.6 (Polynôme caractéristique) *Le polynôme caractéristique de T est défini par le produit des polynômes caractéristiques des matrices sur la diagonale de la matrice de T.*

Théoreme 8.3 (Cayley-Hamilton) *Soit V un ℝ-espace vectoriel, $T \in \mathscr{L}(V)$ et q le polynôme caractéristique de T, alors $q(T) = 0$.*

Démonstration *Travaillons avec une base de V par rapport à laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure par bloc comme énoncé dans le Théorème 8.2. Soit U_j un sous-espace prorpre de dimension 1 ou 2 engendré par la base correspondant à A_j et définissons q(j) par :*

$$q_j(x) = \begin{cases} x - \lambda & \textit{si } A_j \textit{ est égal à } [\lambda_j] \\ (x-a)(x-d) - bc & \textit{si } A_j \textit{ est égal à } \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \end{cases}$$

Pour montrer $q(T) = 0$, montrons $q(T)|_{U_j} = 0$ pour $j = 1, \ldots, m$ ce qui revient à montrer $q_1(T) \ldots q_j(T)|_{U_j} = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, m$. Pour $j = 1$ le résultat tiens, alors supposons le vrai pour $1 \leq j \leq n$ soit :

$$\begin{aligned} 0 &= q_1(T)|_{U_1} \\ 0 &= q_1(T)q_2(T)|_{U_2} \\ &\vdots \\ 0 &= q_1(T) \ldots q_{j-1}(T)|U_{j-1} \end{aligned}$$

donc $v \in U_j$ implique $q_j(T)v = u + q_j(S)v$ avec $u \in U_1 + \ldots + U_{j-1}$ et $S \in \mathscr{L}(U_j)$ de polynôme caractéristique q_j. Comme $q_j(S) = 0$ $q_j(T)v \in U_1 + \ldots + U_{j-1}$ pour $v \in U_j$, donc par l'hypothèse d'induction $q_1(T) \ldots q_j(T)|_{U_j} = 0$

Théoreme 8.4 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $T \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ les valeurs propres distinctes de T et $U_1, \ldots, U_m$ les espace propres associés. Soit $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_M, \beta_M)$ les paires propres distinctes de T et $V_j = Ker\big((T^2 + \alpha_j T + \beta_j I)^{dim(V)}\big)$. Alors :*

1. *$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_M$*
2. *les U_j et V_j sont invariants sous T.*
3. *chaque $(T - \lambda_j I)|_{U_j}$ et chaque $(T^2 + \alpha_j T + \beta_j I)|_{V_j}$ est nilpotent.*

Démonstration *$dim(U_j)$ est égal à la multiplicité de λ_j valeur propre de T et $dim(V_j)$ est égal au double de le multiplicité de (α_j, β_j) comme paire propre de T. Donc :*

$$dim(V) = dim(U_1) + \ldots + dim(U_m) + dim(V_1) + \ldots + dim(V_M)$$

Posons $U = U_1 + \ldots + U_m + V_1 + \ldots + V_M$. U est invariant sous T. Soit $S \in \mathscr{L}(U)$. Les valeurs propres et paires propres de S sont les mêmes que T, donc :

$$dim(U) = dim(U_1) + \ldots + dim(U_m) + dim(V_1) + \ldots + dim(V_M)$$

donc $dim(V) = dim(U)$ or U est un sous-espace de V donc $U = V$ où encore

$$V = U_1 + \ldots + U_m + V_1 + \ldots + V_M$$

Chapitre 9

Trace et déterminant

9.1 Changement de Base

Définition 9.1 (Matrice identité) *La* matrice identité notée I *n'a que des* 1 *sur la diagonale.*

Définition 9.2 (Matrice Inversible) *Une matrice A est* inversible *s'il existe une matrice carrée B de même dimension tel que*

$$AB = BA = I$$

B est dit l'inverse de A.

Proposition 9.1 *Si $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ deux bases de V, alors $M(I, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))$ est inversible et :*

$$M(I, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))^{-1} = M(I, (v_1, \ldots, v_n), (u_1, \ldots, u_n))$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & M(ST, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) \\ = \; & M(S, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) M(T, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) \end{aligned}$$

donc

$$I = M(I, (v_1, \ldots, v_n), (u_1, \ldots, u_n)) M(I, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))$$

et échangeant le rôle des u et v il vient :

$$I = M(I, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) M(I, (v_1, \ldots, v_n), (u_1, \ldots, u_n))$$

Théoreme 9.1 (du changement de base) *Soit* $T \in \mathscr{L}(V)$. *Soit* $(u_1, \ldots, u_n)$ *et* $(v_1, \ldots, v_n)$ *des bases de* V. *Soit* $A = M(I, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))$. *Alors :*

$$M(T, (u_1, \ldots, u_n)) = A^{-1} M(T, (v_1, \ldots, v_n)) A$$

Démonstration

$$\begin{aligned} M(T, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) &= M(T, (v_1, \ldots, v_n)) M(I, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) \\ &= M(T, (v_1, \ldots, v_n)) A \qquad (9.1) \end{aligned}$$

de même

$$M(T, (u_1, \ldots, u_n)) = A^{-1} M(T, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n)) \qquad (9.2)$$

En substituant 9.1 dans 9.2 il vient le résultat désiré.

9.2 Trace

Définition 9.3 (Trace d'une matrice carrée) *La* trace d'une matrice carrée *A, notée trace(A), est définie comme la somme des termes sur la diagonale.*

Définition 9.4 (Trace d'une application) *la* trace d'une application $T \in \mathscr{L}(V)$ *est l'opposé du coefficient de* x^{n-1} *du polynôme caractéristique.*

Proposition 9.2 *Si A et B sont des matrices carrées de même dimension, alors :*

$$trace(AB) = trace(BA) \qquad (9.3)$$

Démonstration *Soit*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Le j^e terme sur la diagonale de la matrice AB est donné par :

$$(ab)_{jj} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{kj} \qquad (9.4)$$

donc

$$\begin{aligned} trace(AB) &= \sum_{j=1}^{n} (ab)_{jj} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{jk} \\ &= trace(BA) \end{aligned}$$

Corollaire 9.1 *Soit* $T \in \mathscr{L}(V)$. *Si* $(u_1, \ldots, u_n)$ *et* $(v_1, \ldots, v_n)$ *sont des bases de* V, *alors :*

$$trace\big(M(T,(u_1,\ldots,u_n))\big) = trace\big(M(T,(v_1,\ldots,v_n))\big)$$

Démonstration *Soit* $(u_1, \ldots, u_n)$ *et* $(v_1, \ldots, v_n)$ *des bases de* V. *Soit* $A = M(I,(u_1,\ldots,u_n),(v_1,\ldots,v_n))$ *alors :*

$$\begin{aligned} trace\big(M(T,(u_1,\ldots,u_n))\big) &= trace\big(A^{-1}M(T,(v_1,\ldots,v_n))A\big) \\ &= trace\big(M(T,(v_1,\ldots,v_n)A)A^{-1}\big) \\ &= trace\big(M(T,v_1,\ldots,v_n)\big) \end{aligned}$$

Théoreme 9.2 *Si* $T \in \mathscr{L}(V)$ *alors* $trace(T) = trace\big(M(T)\big)$

Démonstration *Soit* $T \in \mathscr{L}(V)$. *La trace de la matrice de* T *est indépendante de la base de* V *choisie et pour une matrice triangulaire supérieure (ou triangulaire supérieur par blocs) l'équation est vérifiée.*

Corollaire 9.2 *Soit* $S, T \in \mathscr{L}(V)$, *alors :*

$$trace(ST) = trace(TS) \text{ et } trace(S+T) = trace(S) + trace(T)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} trace(ST) &= trace\big(M(ST)\big) \\ &= trace\big(M(S)M(T)\big) \\ &= trace\big(M(TS)\big) \\ &= trace\big(TS)\big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} trace\big(S+T\big) &= trace\big(M(S+T)\big) \\ &= trace\big(M(S)+M(T)\big) \\ &= trace\big(S\big)+trace\big(T\big) \end{aligned}$$

9.3 Détérminant d'un opérateur

Définition 9.5 (Inversion) *Une paire d'élèments* (p_i, p_j) *est une* inversion *dans une permutation* p *si* $i < j$ *et* $p_i > p_j$.

Définition 9.6 *Soit* $T \in \mathscr{L}(V)$. *Définissons le déterminant de* T, *noté* $det(T)$, *comme* $(-1)^{dim(V)}$ *fois le terme constant du polynôme caractéristique.*

1. *sur un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel le dértminant est le produit des valeurs propres*

$$det(T) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

   avec λ_i *une valeur propre et* m *le nombre de valeurs propres.*

2. *sur un* $\mathbb{R}$*-esapce vectoriel le déterminant est donné par le produit des valeurs propres fois le produits des seconds coéfficients des paires propres, soit :*

$$det(T) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i \prod_{j=1}^{M} \beta_j$$

   avec m *le nombre de valeurs propres,* M *le nombre de paires propres,* λ_i *une valeur propre et* β_j *le second terme d'une paire propre.*

Proposition 9.3 *Un opérateur est inversible si et seulement si son déterminant est non-nul.*

Démonstration

1. *Supposons* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $T \in \mathscr{L}(V)$. T *est inversible si et seulement si* 0 *n'est pas une valeur propre de* T *ce qui revient dire que* T *est inversible si et seulement si le produit des valeurs propres de* T *n'est pas nul, où encore* $det(T) \neq 0$.

2. *Supposons maintenant V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De nouveau T est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre. Pour toute paire propre $\alpha_j < 4\beta_j$ donc $\beta_j > 0$ donc $\lambda_i \neq 0$ si et seulement si $det(T) \neq 0$.*

Lemme 9.1 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $T \in \mathscr{L}(V)$ et $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ avec $\alpha^2 < 4\beta$. (α, β) est une paire propre de T si et seulement si $(-2x - \alpha, x^2 + \alpha x + \beta)$ est une paire propre de $xI - T$. De plus ces paires propres ont même multiplicité.*

Démonstration

$$T^2 + \alpha T + \beta I = (xI - T)^2 - (2x + \alpha)(xI - T) + (x^2 + \alpha x + \beta)I$$

donc (α, β) est une paire propre si et seulement si $(-2x - \alpha, x^2 + ax + \beta)$ est une paire propre de $xI - T$.

Théoreme 9.3 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$. Le polynôme caractéristique de T est donné par $det(xI - T)$.*

Démonstration

1. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ les valeurs propres de T. Les valeurs propres de $zI - T$ sont donc $z - \lambda_1, \ldots, z - \lambda_m$ donc par la définition*

$$det(zI - T) = (z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_n)$$

2. *si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ les valeurs propres et $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_M, \beta_M)$ les paires propres de T. Les valeurs propres de $xI - T$ sont donc x_{λ_i} et les paires propres $(-2x - \alpha_j, x^2 + \alpha_j + \beta_j)$, et le déterminant, par définition est donné par :*

$$de(xI - T) = \prod_{i=1}^{m}(x - \lambda_i) \prod_{j=1}^{M}(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)$$

9.4 Déterminant d'une matrice

Définition 9.7 (Permutation) *Une permutation d'un ensemble X est une bijection $B : X \to X$, qui consiste à "changer l'ordre" des élèments de X. Pour un ensemble de n éléments il existe $n!$ permutations possibles.*

Définition 9.8 (Nombre d'inversion) *Soit σ une permutation. Le* nombre d'inversions *de σ est :*

$$NI(\sigma) = \#\{(i,j), i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\} \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

Définition 9.9 (Déterminant d'une matrice) *Si A est une matrice $n \times n$ définie par :*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

alors le déterminant de la matrice A *est donné par :*

$$detA = \sum_{m_i \in perm(n)} (sign(m_i)) a_{m_1,1} \dots a_{m_n n}$$

Lemme 9.2 *Soit A une matrice carrée. Si B est la matrice obtenue en échangeant deux colonnes de A, alors :*

$$det(A) = -det(B)$$

Démonstration *Le $det(B)$ est obtenu en interchangeant deux éléments de la permutation du calcul de $det(A)$, donc le $sign(det(B)) = -sign(det(A))$ et $det(B) = -det(A)$.*

Lemme 9.3 *Si A est une matrice carrée avec deux colonnes égales, alors $det(A) = 0$.*

Démonstration *En interchangeant les deux colonnes égales de A, il vient la matrice A et la relation $det(A) = -det(A)$ donc $det(A) = 0$.*

Lemme 9.4 *Soit $A = [a_1, \dots, a_n]$ une matrice $n \times n$ et $(m_1, \dots, m_n)$ une permutation, alors*

$$det[a_{m1} \dots a_{m_n}] = \big(sign(m_1, \dots, m_n)\big) det(A)$$

Démonstration *La matrice A est obtenue par une suite de permutations de colonnes de $[a_{m_1}, \dots, a_{m_n}]$. A chaque étape le signe du déterminant est inversé, donc le $sign(m_1, \dots, m_n)$ est paire si le nombre de permutations est paires, impair sinon.*

Théoreme 9.4 *Si A et B sont des matrices carrées de même taille alors :*

$$det(AB) = det(BA) = det(A)det(B)$$

Démonstration *Soit $A = [a_1, \ldots, a_n]$ avec les a_k des colonnes et*

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix} = [b_1, \ldots, b_n]$$

par la définition de la multiplication de deux matrices $AB = [Ab_1, \ldots, Ab_n]$, soit

$$\begin{aligned}
det(AB) &= det[Ab_1 \ldots Ab_n] \\
&= det[A(\sum_{m_1}^{n} b_{m,1}e_{m1} \ldots \sum_{m_1}^{n} b_{m,n}e_{mn})] \\
&= det[\sum_{m_1}^{n} b_{m_1 1}Ae_{m_1} \ldots \sum_{m_1}^{n} b_{m_n n}Ae_{m_n}] \\
&= \sum_{m_1=1}^{b} \ldots \sum_{m_n=1}^{n} b_{m_1 1} \ldots b_{m_n n} det[Ae_{m_1} \ldots Ae_{m_n}] \\
&= \sum_{m_1,\ldots,m_n \in permn} b_{m_1,1} \ldots b_{m_n n}\big(sign(m_1, \ldots, m_n)\big)det(A) \\
&= (detA) \sum_{m_1,\ldots,m_n \in perm(n)} \big(sign(m_1, \ldots, m_n)\big)b_{m_1 1} \ldots b_{m_n n} \\
&= (detA)(detB)
\end{aligned}$$

Corollaire 9.3 *Soit $T \in \mathscr{L}(V)$, $(u_1, \ldots, u_m)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ des bases de V alors :*

$$det(M(T, (u_1, \ldots, u_n))) = det(M(T, (v_1, \ldots, v_n)))$$

Démonstration *Soit $(u_1, \ldots, u_m)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ des bases de V. Soit $A = M(I, (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))$, alors :*

$$\begin{aligned}
det(M(T, (u_1, \ldots, u_n))) &= det(A^{-1}(M(T, (v_1, \ldots, v_n)))A) \\
&= det((M(T, (v_1, \ldots, v_n)))A^{-1}A) \\
&= det((M(T, (v_1, \ldots, v_n)))
\end{aligned}$$

Théoreme 9.5 *Si $T \in \mathscr{L}(V)$ alors $det(T) = det(M(T))$*

Démonstration *Le déterminant d'une application est indépendant de la base. Par rapport à une certaine base, la matrice de T est triangulaire supérieure (dans le cas d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) ou triangulaire supérieure par blocs (dans le cas d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et le determinant de l'application est le même que celui de la matrice.*

Corollaire 9.4 *Si $S, T \in \mathscr{L}(V)$ alors :*

$$det(ST) = det(TS) = \big(det(S)\big)\big(det(T)\big)$$

Démonstration *Soit $S, T \in \mathscr{L}(V)$ alors pour n'importe quelle base de V*

$$\begin{aligned} det(ST) &= det\big(M(ST)\big) \\ &= det\big(M(S)M(T)\big) \\ &= det\big(M(S)\big)det\big(M(T)\big) \\ &= det(S)det(T) \end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Katherine Hess-Belwald : *Algèbre Linéaire I & II* Notes de Cours 2006-2007

[2] Sheldon Axler : *Linear Algebra Done Right*, Springer, Second Edition (1997)