Analyse 1
(résumé de cours)

Patrick Delorme / Yves Driencourt
(rédaction de Y. Driencourt)

Automne 2005

Avertissement : le présent résumé de cours s'inspire en partie des livres de F. Liret et D. Martinais : Analyse 1ère (2ème) année (Dunod éditeur). Les étudiants sont renvoyés à ces livres, présents en bibliothèque, pour de plus amples détails (les démonstrations ne sont pas toujours données ici, ou diffèrent de celles données par les auteurs...), ainsi que pour de nombreux exercices puisés dans ces ouvrages, pour lesquels est souvent donnée une solution abrégée.

1 Les nombres réels

1.1 Axiomes des nombres réels

1) **R** est un corps.

2) **R** est un corps totalement ordonné.

3) **R** est un corps ordonné archimédien : étant donnés 2 réels $x > 0, y \geq 0$, il existe un entier n tel que $y \leq nx$.

4) **R** satisfait à axiome des segments emboîtés : étant donnée une suite $([a_n, b_n])$ d'intervalles fermés tels que $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$ pour tout n, alors l'intersection de cette suite n'est pas vide.

1.2 Propriétés des nombres réels

1) Tout intervalle ouvert dans **R** contient une infinité de nombres rationnels (on dit que **Q** est dense dans **R**).

2) **R** n'est pas dénombrable, par contre **Q** l'est.

3) Tout sous-ensemble non vide de **R** qui est majoré (resp. minoré) possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbf{Q}$ où l'on peut construire par exemple un ensemble de nombres rationnels minoré, ne possédant pas de borne inf : considérer la suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) \quad \text{et} \quad u_0 = 2.$$

2 Suites

Dans ce qui suit, la lettre $\mathbf{K}$ désigne l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels ou $\mathbf{C}$ des nombres complexes.

2.1 Généralités

Définition 1 *: On appelle suite dans* $\mathbf{K}$ *toute application* $n \longmapsto x_n$ *de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{K}$.

Définition 2 *: Soit* (x_n) *une suite de nombres réels. On dit qu'elle est majorée (resp. minorée) s'il existe un nombre* M *tel que* $x_n \leq M$ *(resp.* $M \leq x_n$*) quel que soit* n*. Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée, ou, ce qui revient au même si la suite* $(|x_n|)$ *est majorée.*

Définition 3 *: On dit que la suite* (x_n) *a pour limite* $a \in \mathbf{K}$ *(ou converge vers* a*) si, pour tout nombre* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* N *tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

On notera $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *ou souvent* $x_n \to a$.

Définition 4 *: Soit* (x_n) *une suite de nombres réels. On dit que* (x_n) *tend vers* $+\infty$ *et l'on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ *si, pour tout nombre réel* $A > 0$*, il existe un entier* N *tel que*

$$n \geq N \Longrightarrow x_n > A.$$

Proposition 5 *: Si une suite converge, sa limite est unique.*

Proposition 6 *: Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$*, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n| = |a|$.

Définition 7 *: On dit que (x_n) est une suite de Cauchy si pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que*

$$p, q \geq N \Longrightarrow |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Proposition 8 *: Une suite convergente est une suite de Cauchy.*

Proposition 9 *: Toute suite de Cauchy (en particulier toute suite convergente) est bornée.*

2.2 Opérations sur les suites

Proposition 10 *: Soient (x_n) et (y_n) des suites de Cauchy (resp. convergentes) et $\alpha \in \mathbf{K}$, alors les suites $(x_n + y_n), (x_n y_n)$ et (αx_n) sont aussi des suites de Cauchy (resp. convergentes).*

Pour les suites convergentes, on montre aisément que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n \\
\lim_{n\to+\infty} (x_n y_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n \,.\lim_{n\to+\infty} y_n \\
\lim_{n\to+\infty} (\alpha x_n) &= \alpha. \lim_{n\to+\infty} x_n.
\end{aligned}$$

Proposition 11 *: Soient (x_n) une suite convergeant vers 0 et (y_n) une suite bornée, alors $(x_n y_n)$ converge vers 0.*

Proposition 12 *: Soient (x_n) et (x_n) des suites réelles convergentes vérifiant $x_n \leq y_n$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.*

Proposition 13 *: Soient $(x_n), (y_n)$ et (z_n) des suites de nombres réels.*
- si $x_n \leq y_n \leq z_n$ pour tout n et que les suites (x_n) et (z_n) sont convergentes de même limite, alors la suite (y_n) est converge également vers cette limite commune.
- si $x_n \leq y_n$ pour tout n et si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Théorème 14 *: Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et (x_n) une suite à valeurs dans I, convergeant vers a. Si f est continue en a, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Enfin, notons que l'étude des suites complexes peut (mais on n'y a pas toujours intérêt !) se ramener à l'étude des suites réelles. :

Proposition 15 *: Soit* (x_n) *une suite de nombres complexes convergeant vers*
$a = \alpha + i\beta$*. Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(x_n) = \alpha$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(x_n) = \beta$.

Noter que la réciproque est vraie d'après ce qui précède (opérations sur les suites).

2.3 Exemples

2.3.1 La suite géométrique (a^n)

1) si $a \in \mathbf{R}$ et $a > 1$, la suite $\lim a^n = +\infty$.
2) si $|a| < 1$, alors $\lim a^n = 0$.
3) si $a = 1$, alors $\lim a^n = 1$.
4) si $|a| > 1$, la suite (a^n) n'est pas convergente.

Corollaire 16 *: Si* $|a| < 1$, $\lim(1 + a + a^2 + ... + a^n) = \frac{1}{1-a}$.

2.3.2 La suite (u_n) où $u_n = \frac{a^n}{n^p}$, $a \in \mathbf{R}$ et p entier ≥ 1

1) si $|a| \leq 1$, $\lim u_n = 0$.
2) si $|a| > 1$, $\lim |u_n| = +\infty$.

2.4 Suites monotones de nombres réels

Théorème 17 *: Soit* (a_n) *une suite croissante (resp. décroissante). Pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée (resp. minorée).*

Définition 18 *: Soient* (a_n) *et* (b_n) *des suites de nombres réels. On dit qu'elles sont adjacentes si*
i) (a_n) *est croissante,*
ii) (b_n) *est décroissante,*
iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Théorème 19 *: Si deux suites sont adjacentes, elles convergent vers une même limite.*

Exemple 20 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ *et* $b_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$.

Exemple 21 $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ *et* $b_n = a_n + \frac{1}{n!}$.

2.5 Le critère de Cauchy

Théorème 22 *: Soit (x_n) une suite réelle. Pour qu'elle soit convergente, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.*

2.6 Suites récurrentes

Définition 23 *: Une suite récurrente consiste à se donner $u_0, u_1, ...u_k$ et une relation du type*

$$u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, ..., u_{n-k}, n).$$

Proposition 24 *: Soit (u_n) une suite récurrente définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction f continue. Supposons que $\lim u_n = a$ existe. Alors a vérifie $f(a) = a$.*

Proposition 25 *: Avec les mêmes hypothèses, on suppose que la fonction f est croissante. Alors (u_n) est croissante (resp. décroissante) si $u_0 < u_1$ (resp. $u_0 > u_1$).*

Exemple 26 *: (u_n) définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1)$.*

Proposition 27 *: Toujours avec les mêmes hypothèses, on suppose que la fonction $f \circ f$ est croissante. Alors les suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont monotones.*

Exemple 28 *: (u_n) définie par $u_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$.*

Théorème 29 *("du point fixe") : Soient I un intervalle fermé de $\mathbf{R}$ et $f : I \to I$ vérifiant la propriété suivante : il existe $k \in]0, 1[$ tel que*

$$\forall (x, y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,. \tag{1}$$

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors, il existe l unique dans I tel que $f(l) = l$ et (u_n) converge vers l. De plus

$$|u_n - l| \leq k^n \frac{|u_1 - u_0|}{1 - k}.$$

Remarque 30 *: si f est dérivable et vérifie $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, alors f vérifie la condition (1).*

Exemple 31 *: (u_n) définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$. On a*

$$|u_n - l| \leq (\sin 1)^n \frac{1}{1 - \sin 1}.$$

2.6.1 Exemples classiques de suites récurrentes

1) $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $u_0 \in \mathbf{R}$

On pose $u_n = v_n + \alpha$ et on cherche α pour que $v_{n+1} = av_n$, d'où $\alpha = \frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$ et dans ce cas $u_n = a^n(u_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}$ est une suite géométrique.

Si $a = 1$, on a facilement $u_{n+1} = u_0 + (n+1)b$.

2) $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$

Il faut également, comme on l'a vu, donner les 2 premiers termes, réels : u_0 et u_1.

On pose $E = \{\text{suites } (u_n) \mid u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}\}$ et on suppose que a et b sont réels. E est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$ comme on le voit en considérant le morphisme $f : E \to \mathbf{R}^2$ donné par $(u_n) \longmapsto (u_0, u_1)$.

On recherche ensuite une base explicite en examinant s'il existe des solutions de la forme $u_n = r^n$, ce qui conduit à l'équation

$$r^2 - ar - b = 0.$$

Cas 1 : l'équation possède 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2. Les suites $u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ forment une base de E (système libre) et pour obtenir la suite $\lambda u_n + \mu v_n$ vérifiant les conditions initiales, on résout le système

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= u_0, \\ \lambda r_1 + \mu r_2 &= u_1, \end{aligned}$$

qui possède une solution et une seule.

Cas 2 : les racines sont complexes conjuguées (a et b sont réels). Il en est de même de la solution (λ_0, μ_0) du système ci-dessus et par conséquent la suite $(\lambda_0 r_1^n + \mu_0 r_2^n)$ est réelle.

Cas 3 : il y a une racine double $r = \frac{a}{2}$, on vérifie que la suite $v_n = nr^n$ est aussi solution, indépendante de $u_n = r^n$. La résolution du système

$$\begin{aligned} \lambda &= u_0, \\ (\lambda + \mu)r &= u_1 \end{aligned}$$

conduit à la solution unique cherchée.

3) $u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$

2.7 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition 32 *: Une suite extraite de la suite (u_n) est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})$ où ϕ est une bijection strictement croissante de $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$.*

Définition 33 *: $a \in \mathbf{R}$ est appelée valeur d'adhérence de la suite (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.*

Proposition 34 *: a est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 0, \exists n \geq N \quad \textit{tel que } |u_n - a| < \varepsilon.$$

Preuve : On prend $\varepsilon = 1, N = 1$ et on note $\phi(1)$ le nombre entier ≥ 1 vérifiant $\left|u_{\phi(1)} - a\right| < 1$, puis $\varepsilon = \frac{1}{2}, N = \phi(1) + 1$ et $\phi(2)$ le nombre $\geq N$ tel que $\left|u_{\phi(2)} - a\right| < \frac{1}{2}$ etc...

Inversement, la convergence de la sous-suite s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 : n \geq N \implies \left|u_{\phi(n)} - a\right| < \varepsilon.$$

Puisque ϕ est strictement croissante, pour tout $N > 0$, il existe n, par exemple N, tel que $\phi(n) \geq N$ (noter que $\phi(n) \geq n$ pour tout n en raison de l'hypothèse sur ϕ et que si $\phi \neq id$, on a même $\phi(n) > n$ à partir d'un certain rang). On a donc prouvé :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 0, \exists n (= \phi(N) \geq N \quad \text{tel que } |u_n - a| < \varepsilon.$$

■

Proposition 35 *: Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue. si a est une valeur d'adhérence de (u_n), alors $f(a)$ est valeur d'adhérence de la suite $(f(u_n))$.*

Proposition 36 *: Si (u_n) converge vers a, alors a est la seule valeur d'adhérence de (u_n).*

Théorème 37 *(de Bolzano-Weierstrass) : Toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.*

Preuve : Soit (u_n) une suite bornée. On pose

$$b_n = \sup_{m \geq n} u_m.$$

(noter que b_n existe pour tout n du fait que la suite (u_n) est bornée). Il en résulte que (b_n) est une suite décroissante et minorée, donc convergente. Notons l sa limite, qui n'est autre que sa borne inférieure.

Soient maintenant p un entier quelconque et ε un réel positif arbitraire. Il existe $N > 0$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow l \leq b_n < l + \varepsilon.$$

Posons alors $N_1 = \sup(N, p)$. Puisque $b_{N_1} = \sup\limits_{m \geq N_1} u_m$, il existe $m \geq N_1$ tel que $b_{N_1} - \varepsilon < u_m \leq b_{N_1}$. Il en résulte

$$l - \varepsilon < u_m < l + \varepsilon.$$

On a ainsi montré

$$\forall \varepsilon > 0, \forall p \geq 0, \exists m \geq p \quad \text{tel que} \quad |u_m - l| < \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration d'après la proposition 34. ∎

Exemple 38 *La suite* $(\sin n)_{n \geq 0}$ *admet au moins une valeur d'adhérence dans* $[-1, 1]$ *. En fait elle en admet une infinité comme on peut le vérifier (cf exercices).*

3 Séries numériques

3.1 Généralités et définitions

Définition 39 *: Soit* (u_n) *une suite. On appelle série de terme général* u_n *(et on note* $\sum u_n$*) la suite des sommes partielles* $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p$*. On dit que la série est convergente si la suite* (S_n) *possède une limite* S*. On pose alors* $S = \sum\limits_{p=0}^{\infty} u_p$*. La quantité* $R_n = S - S_{n-1}$ *s'appelle le reste d'indice* n *et se note* $\sum\limits_{p=n}^{\infty} u_p$*.*

Exemple 40 *:* $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$ *diverge car* $S_n = \ln(n+1)$*.*

Exemple 41 *:* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *converge car* $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *et* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} u_p = 1$*.*

3.2 Opérations sur les séries

L'ensemble des séries convergentesest un sous-espace vectoriel de l'espaces des séries, c'est une conséquence immédiate des théorèmes sur les limites de suites.

En particulier, une série complexe se ramène naturellement à l'étude de 2 séries réelles par la décomposition

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p = \sum_{p=0}^{\infty} \operatorname{Re} u_p + i \sum_{p=0}^{\infty} \operatorname{Im} u_p$$

avec le résultat analogue à celui obtenu sur les suites

$$\sum u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow (\sum \operatorname{Re} u_n \text{ converge et } \sum \operatorname{Im} u_n \text{ converge}).$$

La multiplication des séries s'effectue en généralisant la formule de multiplication des sommes partielles et en ordonnant comme dans le produit de 2 polynômes, à savoir

$$\sum u_n . \sum v_n = \sum w_n$$

où

$$w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j .$$

Dans ces conditions, on a le résultat suivant : si $\sum u_n$ et $\sum u_n$ sont deux séries convergentes à termes positifs, leur produit est également une série convergente et on a

$$\sum_{p=0}^{\infty} w_p = \sum_{p=0}^{\infty} u_p . \sum_{p=0}^{\infty} v_p,$$

ce résultat s'étendant d'ailleurs aux séries absolument convergentes (voir exercices).

3.3 Théorèmes généraux

Théorème 42 *: La série de terme général u_n converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que*

$$q \geq p \geq N \Longrightarrow |u_{p+1} + ... + u_q| < \varepsilon$$

Corollaire 43 *: Une condition nécessaire pour que la série de terme général u_n converge est que $\lim u_n = 0$.*

Cette condition n'est pas suffisante comme le montre l'exemple de la série harmonique.

3.4 Séries à termes positifs

Théorème 44 *: La série de terme général u_n est convergente si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée.*

Noter qu'on a alors : $\sum_{p=0}^{\infty} u_p = \sup_{n\geq 0} S_n$.

3.4.1 Les critères de comparaison

Dans ce qui suit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ désignent deux séries à termes positifs.

Proposition 45 *: Si, à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n$*
i) la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$,
ii) la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.

Corollaire 46 *: Il en est ainsi si à partir d'un certain rang : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ou encore, si $u_n = O(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.*

Corollaire 47 *: S'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que, à partir d'un certain rang : $v_n > 0$ et $\alpha \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \beta$, alors les séries sont de même nature. C'est le cas, en particulier, si $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$.*

3.4.2 Comparaison avec une série de Riemann

Définition 48 *: On appelle série de Riemann toute série de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.*

Proposition 49 *: La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve *: Pour $\alpha = 1$, il s'agit de la série harmonique, qui diverge comme on vient de le voir.*

Pour $\alpha \leq 1$, cela résulte de la comparaison avec la série harmonique puisque

$$\forall n \geq 1 : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Pour $\alpha > 1$, on étudie la série de terme général $a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$, pour $n \geq 1$. On a bien $a_n > 0$ et par ailleurs

$$\sum_{p=1}^{n} a_p = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

montrant que la $\sum a_n$ diverge. On écrit alors

$$a_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}(1-(1+\frac{1}{n})^{1-\alpha})$$

pour constater que $a_n \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$ et en déduire la convergence de la série de Riemann pour $\alpha > 1$ grâce au corollaire 47. ■

Corollaire 50 *: Soit $\sum u_n$ une série.*

i) On suppose que le terme général vérifie $u_n \sim kn^{-\alpha}$ pour un réel $k \neq 0$ et un $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors si $\alpha > 1$, la série converge, si $\alpha \leq 1$, la série diverge.

ii) S'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit bornée, alors la série est convergente.

iii) S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série est divergente.

3.4.3 Comparaison avec la série géométrique

Proposition 51 *: La série géométrique $\sum a^n$ diverge si $|a| \geq 1$ et converge vers $\frac{1}{1-a}$ si $|a| < 1$.*

Proposition 52 *(règle de Cauchy) : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, on pose $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$.*

i) Si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

ii) Si $\lambda > 1$, elle diverge.

iii) Si $\lambda = 1$, on ne peut rien dire a priori (toutefois, si la limite λ est atteinte par valeurs supérieures, on peut affirmer que la série diverge).

Preuve : Si $\lambda < 1$, on choisit μ tel que $\lambda < \mu < 1$, pour en déduire que $\sqrt[n]{u_n} \leq \mu$ à partir d'un certain rang n_0,*d'où*

$$u_n \leq \mu^n \quad \text{pour } n \geq n_0.$$

Si $\lambda > 1$, on a $\sqrt[n]{u_n} > 1$, et donc $u_n > 1$, à partir d'un certain rang. La série $\sum u_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0. Même argument pour $\lambda = 1$ atteint par valeurs supérieures. ■

Proposition 53 *(règle de d'Alembert) : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, on pose $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.*

i) Si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

ii) Si $L > 1$, elle diverge.

iii) Si $L = 1$, on ne peut rien dire a priori (toutefois, si la limite L est atteinte par valeurs supérieures, on peut affirmer que la série diverge).

Preuve : Si $L < 1$, on choisit k vérifiant $L < k < 1$. Il existe donc n_0 tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k \quad \text{pour } n \geq n_0,$$

ce que l'on écrit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{pour } n \geq n_0 \quad \text{avec } v_n = k^n.$$

On conclut grâce au corollaire 46.

Si $L > 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour $n \geq n_0$, donc $u_n \geq u_{n_0}$ pour $n \geq n_0$. La série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0. De même pour $L = 1$ atteint par valeurs supérieures.

Illustration du fait que l'on ne peut rien dire si $L = 1$: la série de Riemann pour $\alpha < 1$ et pour $\alpha > 1$. ■

3.5 Séries à termes quelconques

3.5.1 La convergence absolue

Définition 54 : *Une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes est dite absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème 55 : *Une série absolument convergente est convergente et vérifie*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Cauchy, il existe $n_0 > 0$ tel que

$$q \geq p \geq n_0 \Longrightarrow \sum_{k=p+1}^{q} |u_k| < \varepsilon,$$

d'où, *a fortiori*,

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| < \varepsilon.$$

Ensuite, on écrit

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|,$$

pour en déduire

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| = \left|\lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \lim \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|,$$

l'interversion de lim et $||$ étant autorisée par le théorème 14 puisque $x \mapsto |x|$ est une application continue $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. ■

3.5.2 Exemple des séries alternées

Définition 56 *: On appelle série alternée toute série de la forme* $\sum(-1)^n a_n$ *avec* $a_n \in \mathbf{R}_+$.

Théorème 57 *: Soit* (a_n) *une suite réelle décroissante et admettant 0 pour limite. Alors la série* $\sum(-1)^n a_n$ *est convergente, et sa limite* S *vérifie*

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &\leq S \leq S_{2n}, \\ |S - S_n| &\leq a_{n+1}, \end{aligned}$$

en posant comme d'habitude $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

Preuve : Pour tout n, on a

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_{2n+1} &= a_{2n+1} \geq 0, \\ S_{2n+2} - S_{2n} &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0, \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. On en déduit la convergence de $\sum(-1)^n a_n$ et la première inégalité.

Pour obtenir la seconde, on écrit que, pour tout n

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

d'où

$$\begin{aligned} S - S_{2n+1} &\leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}, \\ S_{2n} - S &\leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}. \end{aligned}$$

■

Exemple 58 *:* $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$

$\alpha > 1$ *: convergence absolue, donc convergence,*
$\alpha \leq 0$ *: divergente car le terme général ne tend pas vers 0,*
$0 < \alpha \leq 1$ *: convergente d'après le théorème 57.*

Plan d'étude d'une série quelconque à l'aide d'un exemple :

$$u_n = \frac{n + \ln n}{n^2 + 1} x^n \quad \text{où } x \in \mathbf{R}$$

1) Convergence absolue : $|u_n| \sim \frac{|x|^n}{n}$

$|x| > 1$: divergence absolue et divergence car le terme général ne tend pas vers 0.

$|x| < 1$: convergence absolue (d'Alembert) donc convergence.

2) Cas particuliers restant à traiter

$x = 1$: $u_n \sim \frac{1}{n}$: divergence.

$x = -1$: série alternée, on examine si le théorème sur les séries alternées s'applique.

4 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$

Nous nous intéressons ici aux fonctions définies et continues sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé borné de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Elles possèdent plusieurs propriétés remarquables, que nous allons énumérer maintenant.

Proposition 59 *: Soit f une fonction continue : $[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$.* Si *$f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires, alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Preuve : On suppose $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et on considère le milieu du segment $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si $f(m_0) = 0$, la démonstration est terminée. Si $f(m_0) < 0$, on pose $a_1 = m_0$ et $b_1 = b_0$. Si $f(m_0) > 0$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = m_0$. En itérant le processus (appelé *dichotomie*), on crée 2 suites adjacentes (a_n) et (b_n) vérifiant, à moins que le processus s'arrête auquel cas la démonstration est terminée : $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$. D'après le théorème 14, on a, pour la limite commune c des 2 suites : $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$, d'où le résultat. ■

Théorème 60 *("des valeurs intermédiaires") : Soit f une fonction continue : $[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Si $k \in]f(a), f(b)[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.*

Preuve : On applique la proposition précédente à g définie par $g(x) = f(x) - k$. ■

Corollaire 61 *: Tout polynôme à coefficients réels, de degré impair, possède au moins une racine.*

Théorème 62 *: Soit f une fonction continue : $[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors $f([a, b])$ est borné.*

Preuve : Montrons par l'absurde que $f([a, b])$ est majoré : si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout entier n, un élément de $[a, b]$ que l'on note u_n, vérifiant $f(u_n) > n$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, (u_n) possède une sous-suite $(u_{\phi(n)})$ convergeant vers un $l \in [a, b]$. On aurait alors

$$\begin{array}{lcll} \lim f(u_{\phi(n)}) & = & +\infty & \text{(car } f(u_{\phi(n)}) > \phi(n) \geq n \text{ pour tout } n) \\ \lim f(u_{\phi(n)}) & = & f(l) & \text{(par le théorème 14),} \end{array}$$

ce qui est impossible. ■

Théorème 63 *: Soit f une fonction continue : $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors f atteint ses bornes.*

Preuve : Notant $M = \sup f([a,b])$, dont l'existence est assurée par le théorème précédent, on met en évidence une suite (u_n) d'éléments de $[a,b]$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} : M - \frac{1}{n+1} < f(u_n) \leq M.$$

Toujours grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, (u_n) possède une sous-suite convergente $(u_{\phi(n)})$ vers un $c \in [a,b]$ pour lequel on a visiblement $f(c) = M$. ■

Corollaire 64 *: Soit f une fonction continue : $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. On a $f([a,b]) = [m,M]$ où m et M désignent respectivement les bornes inférieures et supérieures de l'ensemble $f([a,b])$.*

Définition 65 *: Soit I un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 : (x, y \in I \text{ et } |x-y| < \alpha) \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(Bien noter qu'ici le réel α ne dépend pas de la position du couple (x,y) sur l'intervalle I, pour bien le visualiser, représenter graphiquement les fonctions de $[0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R} : x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$, ensuite prendre l'image inverse d'un intervalle $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ pour x_0 proche de 0 (resp. x_0 grand), dans le but d'obtenir le réel α exigé par la continuité en x_0).

Théorème 66 *: Soit f une fonction continue : $[a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$. Alors f est uniformément continue.*

Preuve : Elle peut à nouveau faire appel au théorème de Bolzano-Weierstrass, de façon un peu plus technique ; elle est proposée en exercice. ■

Exemple 67 *: Les fonctions "k-contractantes" déjà rencontrées, vérifiant : $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$ pour tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, k étant un réel positif, sont uniformément continues.*

5 L'intégrale

5.1 L'intégrale d'une fonction étagée

Définition 68 *: Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est étagée s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < ..... < x_n = b$ de I telle que f soit constante m_i sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. Une telle subdivision est dite adaptée à f.*

Lemme 69 *: avec les notations qui précèdent, le nombre $(x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + ... + (x_n - x_{n-1})m_n$ ne dépend pas de la subdivision.*

Idée de la preuve : quand on raffine la subdivision, le nombre en question ne change pas. Pour passer d'une subdivision à une autre, on considère alors la réunion, qui raffine les deux. les nombres associés respectivement aux 2 subdivisions sont alors égaux à une valeur commune : le nombre associé à la réunion en question.

Définition 70 *: Le nombre en question, qui ne dépend que de la fonction f, s'appelle l'intégrale de f sur I et se note $\int_a^b f(t)dt$.*

Remarque 71 *: Si f est positive ou nulle, i.e. tous les $m_i \geq 0$, ce nombre représente l'aire limitée par la fonction, l'axe des abscisses d'une part, les verticales $x = a$ et $x = b$ d'autre part.*

Remarque 72 *: Si f est nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est nulle (f est en effet étagée et les points en question forment une subdivision adaptée).*

Proposition 73 *: Soient f et g deux fonctions étagées sur I.*

1) La fonction $f + g$ est étagée et l'on a $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

2) Pour tout réel λ, la fonction λf est étagée et l'on a $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.

3) Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

4) Deux fonctions étagées qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont la même intégrale.

5) pour tout $c \in]a,b[$, on a $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (relation de Chasles).

Preuve : Pour 1) on utilise la même technique que dans le lemme qui précède en considérant une subdivision adaptée pour f, une autre pour g. la réunion des 2 est adaptée aux 3 fonctions f, g et $f+g$. Elle permet alors de calculer les intégrales de ces 3 fonctions, et la relation cherchée en résulte immédiatement.

2) est clair, 3) résulte de 1) et 2) ainsi que de la remarque 71.

4) résulte de 1) et 2) ainsi que de la remarque 72.

Pour 5) on utilise 1) en écrivant : $f = f_1 + f_2$ où f_1 vaut f sur $[a,c]$ et 0 sur $[c,b]$ et f_2 vaut 0 sur $[a,c]$ et f sur $[c,b]$. ■

5.2 Fonction intégrable

Définition 74 *: Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite intégrable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions étagées u et U, définies sur I, vérifiant*

$$u \leq f \leq U \quad et \quad \int_a^b (U-u)(t)dt \leq \varepsilon.$$

On note

$$A = \left\{ \int_a^b u(t)dt \mid u \text{ étagée et } u \leq f \right\}$$

et

$$B = \left\{ \int_a^b U(t)dt \mid U \text{ étagée et } f \leq U \right\}$$

.

Par définition, A est un ensemble non vide, de même que B. A est majoré par tout élément de B, donc il admet une borne supérieure, de même B une borne inférieure. On en déduit : $\sup A \leq \inf B$. Si f est intégrable, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, $\alpha \in A$ et $\beta \in B$ tels que $0 \leq \inf B - \sup A \leq \beta - \alpha \leq \varepsilon$. On a donc l'égalité $\sup A = \inf B$ et celle valeur commune est par définition l'intégrale de f, qui se note toujours $\int_a^b f(t)dt$.

Remarque 75 *: Si f est une fonction intégrable et u, U des fonctions étagées vérifiant $u \leq f \leq U$, alors*

$$\int_a^b u(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b U(t)dt.$$

Proposition 76 *: Soient f et g deux fonctions définies et intégrables sur I.*

1) La fonction $f+g$ est intégrable et l'on a $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

2) Pour tout réel λ, la fonction λf est intégrable et l'on a $\int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.

3) Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

4) Deux fonctions étagées qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont la même intégrale.

5) pour tout $c \in \left]a, b\right[$, on a $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (relation de Chasles).

Preuve : La démonstration de 1) est proposé en exercice.

2) se démontre de la même façon.

Pour 3), on écrit $0 \leq g - f$ et, puisque la fonction nulle est étagée, on a

$$0 = \int_a^b 0dt \leq \int_a^b (g-f)(t)dt = \int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)dt.$$

Pour 4) et 5) on reprend la méthode utilisée pour les fonctions étagées.

■

Corollaire 77 *: Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction intégrable. Si m et M sont des réels vérifiant $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$, alors*

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M$$

Théorème 78 *: Toute fonction continue sur I est intégrable.*

Preuve : On utilise le fait que toute fonction continue sur I est uniformément continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un $\alpha > 0$ tel que

$$|x - x'| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Prenons un entier n vérifiant $\frac{b-a}{n} < \alpha$ et considérons la subdivision de I en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$.On la note $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$. On définit alors u (resp. U) sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ par

$$u(x) = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \quad (\text{ resp. } U(x) = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \ ).$$

u et U sont des fonctions étagées encadrant f. On a de plus

$$\int_a^b (U-u)(t)dt = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \ ) \leq \varepsilon(b-a).$$

■

Proposition 79 *("propriété de la moyenne") : Si f est continue sur I, il existe $c \in I$ tel que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$.*

Preuve : C'est une conséquence du corollaire 77 et du théorème des valeurs intermédiaires. ■

Théorème 80 *: Toute fonction monotone sur I est intégrable.*

Preuve Soit (x_i) une subdivision de I de pas $\frac{b-a}{n}$. On pose, en supposant f croissante

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & f(x_i) \quad \text{si} \quad x \in [x_i, x_{i+1}[\quad \text{et} \quad u(b) = f(b) \\ U(x) & = & f(x_{i+1}) \quad \text{si} \quad x \in]x_i, x_{i+1}] \quad \text{et} \quad U(a) = f(a). \end{array}$$

On a $\int_a^b (U-u)(t)dt = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$. ■

Corollaire 81 *: La suite $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$ a pour limite $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.*

Preuve : Avec les notations du théorème, on écrit

$$\int_a^b u(t)dt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b U(t)dt = u_n(b-a)$$

qu'on ré-écrit sous la forme

$$\int_a^b f(t)dt \leq u_n(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

■

Exemple 82 : $\lim \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + ... + n^2) = \frac{1}{3}$.

Proposition 83 *: Si la fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est intégrable, il en est de même de la fonction $|f|$ et on a l'inégalité*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt.$$

Preuve : exercice. ■

Définition 84 *: Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction. On appelle primitive de f toute fonction F continue et dérivable vérifiant $F'(x) = f(x)$.*

Si $I = [a, b]\,, [a, b[$ ou $]a, b]\,$, la fonction F doit être dérivable sur $]a, b[$ et la relation $F'(x) = f(x)$ vraie sur ce dernier intervalle.

Proposition 85 *: Si F et G sont les primitives d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$, la fonction $F - G$ est constante sur I.*

Théorème 86 *("théorème fondamental du calcul intégral") : Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour tout $a \in I$, la fonction $F : I \to \mathbf{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f.

Preuve : f est intégrable sur $[a, x]$ puisque cet intervalle est contenu dans I. On calcule alors la quantité $\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x))$ à l'aide de la relation de Chasles. On obtient

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt,$$

et grâce à la formule de la moyenne

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

où $c \in [x, x+h]$. Il est clair que si $h \to 0$, cette expression tend vers $f(x)$ (f est continue !). ■

Corollaire 87 *: Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Si $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui prend la valeur 0 en a. Par ailleurs, si F est une primitive de f, alors*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

pour tous a et x dans I.

Preuve : $U(x) = \int_a^x f(t)dt$ vérifie les propriétés en question et si F en désigne une autre, la fonction $F - U$ est constante et vaut $F(a)$, d'où le résultat annoncé et la formule. ■

Notation 88 *: pour désigner "une" primitive F d'une fonction continue f, on emploie la notation simplifiée (et abusive !) : $F = \int f(t)dt$.*

5.3 Recherche de primitives

5.3.1 Intégration par parties

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I, les fonctions u' et v' étant elles-mêmes continues, le théorème fondamental du calcul intégral permet d'écrire

$$\begin{aligned} uv &= \int (uv)'(t)dt \\ &= \int (u'v)(t)dt - \int (uv')(t)dt \end{aligned}$$

5.3.2 Changement de variable

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue et $u : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable, strictement monotone et telle que $u'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Soit $v : u(I) = J \to I$ la bijection réciproque de u.

Posons $g = (f \circ v)v'$ et supposons que l'on dispose d'une primitive G de g dans J. Alors $(G \circ u)' = f$, autrement dit $G \circ u$ est une primitive de f. On a donc

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = G(u(b)) - G(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(v(t))v'(t)dt.$$

6 La formule de Taylor

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et f une fonction dérivable sur I, dont la dérivée f' est elle-même continue. Le théorème fondamental du calcul intégral permet d'écrire

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

pour tout $x \in I$. Une telle fonction est dite de classe C^1 sur I, plus généralement, une fonction f de classe C^p sur I est une fonction dont les dérivées $f', f'', ..., f^{(p)}$ existent et pour laquelle $f^{(p)}$ est continue. On va voir que la formule précédente peut se généraliser à une fonction de classe C^p : c'est ce qu'on appelle la formule de Taylor avec reste intégral.

On définit également les fonctions de classe C^∞ sur I : ce sont les fonctions dont les dérivées successives existent toutes sur l'intervalle I.

Proposition 89 *: Les fonctions de classe C^p sur I forment un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies et continues sur I. Le produit et la composée de deux fonctions de classe C^p sont également de classe C^p.*

Exemple 90 *: Si f est de classe C^p sur I et ne s'y annule pas, $\frac{1}{f}$ est de classe C^p.*

Théorème 91 *: Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^n sur un intervalle ouvert I. Pour tous nombres a et b de I, on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt.$$

Preuve *: Récurrence sur k où $1 \leq k < n$. La formule est vraie pour $k = 1$ (théorème fondamental). On suppose*

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+......+\frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)dt.$$

On écrit

$$\int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

avec $u(t) = -\frac{(b-t)^{k-1}}{k!}$ de classe C^∞ (c'est un polynôme) et $v(t) = f^{(k)}(t)$ de classe C^1 ($f^{(k+1)}$ est continue d'après l'hypothèse de récurrence). On peut donc intégrer par parties, pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)dt &= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt \\ &= \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt \end{aligned}$$

■

En pratique, on utilisera plus volontiers la version suivante de la formule de Taylor, le reste étant plus facile à évaluer.

Théorème 92 *: Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^{n-1} sur un intervalle ouvert I. On suppose que la dérivée n-ième de f existe sur I. Pour tous nombres a et b de I, on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c),$$

avec un nombre c strictement compris entre a et b.

Preuve : On pose

$$\phi_n(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)$$

et

$$\psi_n(t) = \phi_n(t) - \alpha \frac{(b-t)^n}{n!}$$

où α est choisi de telle sorte que $\psi_n(a) = 0$.On a par ailleurs $\psi_n(b) = 0$. Le théorème de Rolle fournit donc un point c compris entre a et b (strictement) tel que $\psi_n'(c) = 0$, ce qui donne $\alpha = f^{(n)}(c)$. Le résultat s'ensuit en écrivant que $\psi_n(a) = 0$. ■

Corollaire 93 *("formule de Mac-Laurin") : Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^{n-1} sur un intervalle ouvert I contenant* 0. *On suppose que la dérivée n-ième de f existe sur I. Pour tout x de I, on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x),$$

où $\theta \in \left]0,1\right[$.

Corollaire 94 *: Avec les mêmes hypothèses, s'il existe M tel que $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M$ pour tout $t \in I$, alors, pour tout $x \in I$*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq M \frac{|x|^n}{n!}.$$

Exemple 95 *: le lien entre plusieurs définitions de e^x.*

On a vu en étudiant les séries, la convergence absolue pour tout réel x, de la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$. On a ainsi donné une nouvelle définition de e^x sous la forme

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

La formule de Taylor permet de faire le lien avec la définition traditionnelle de l'exponentielle (comme bijection inverse de la fonction logarithme). En effet, en supposant $x > 0$, le corollaire précédent permet de montrer que les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$ convergent vers e^x (ancienne définition !) puisque la différence est majorée par $e^x \frac{x^n}{n!}$, suite tendant vers 0 avec n comme on l'a déjà vu.

7 Retour sur les développements limités

7.1 Les notations de Landau

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a où $a \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

7.1.1 La notation O

Définition 96 *: On note $f = O(g)$, ou $f(x) = O(g(x))$, ou encore $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ s'il y a ambiguité, s'il existe $M > 0$ indépendant de x tel que l'on ait $|f(x)| \leq M\,|g(x)|$ pour x voisin de a (ou pour x grand s'il s'agit de ∞).*

7.1.2 La notation $\asymp$

Définition 97 *: On note $f \asymp g$, s'il existe $m > 0$ et $M > 0$ indépendants de x tel que l'on ait $m\,|g(x)| \leq |f(x)| \leq M\,|g(x)|$ pour x voisin de a (ou pour x grand s'il s'agit de ∞).Il revient au même de dire que l'on a simultanément $f = O(g)$ et $g = O(f)$. Cette relation est clairement symétrique.*

7.1.3 La notation $\sim$

Définition 98 *: On note $f \sim g$, si le rapport $f(x)/g(x)$ tend vers 1 au voisinage du point a.*

7.1.4 La notation o

Définition 99 *: On note $f = o(g)$, si le rapport $f(x)/g(x)$ tend vers 0 au voisinage du point a.*

Exemple 100 *: Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x^2 - x + 1$. On a $f \underset{+\infty}{=} O(g)$ et $g = O(f)$, donc $f \asymp g$.*

Exemple 101 *: $\sum_{i=1}^{n} i = n^2/2 + O(n)$.*

Exemple 102 *: Soient $f(x) = 1000x^2$ et $g(x) = x^3$. Alors $f \underset{+\infty}{=} o(g)$, mais $g \underset{0}{=} o(f)$.*

Remarque 103 *: Si on étudie des fonctions de la variable $n \in \mathbf{N}$, il n"y a pas d'ambiguité, c'est que $n \to +\infty$.*

Exemple 104 *: On note $l(n)$ la longueur de l'entier n en bits, on a alors $l(n) = O(\ln n)$.*

7.2 Développements limités

7.2.1 Existence et propriétés

Définition 105 *: Soient I un intervalle contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en 0. On dit que f possède un développement limité (DL) à l'ordre n en 0, s'il existe un polynôme $P(X)$, de degré $\leq n$, tel que*

$$f(x) = P(x) + o(x^n).$$

Par translation, on dira que f possède un développement limité à l'ordre n au point a si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ possède un DL à l'ordre n en 0. cela s'écrit

$$f(x+a) = P(x) + o(x^n)$$

ou encore, après changement de variable

$$f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n).$$

Dans le cas de l'infini, on prend comme nouvelle variable $u = \frac{1}{x}$ pour se ramener en zéro. Ce genre de développement est très utilisé pour l'étude des branches infinies des courbes planes.

Par souci de simplicité, on traitera le cas du point 0.

Proposition 106 *: Si f possède un DL à l'ordre n en 0, ce DL est unique.*

Corollaire 107 *: Si $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$ est un DL de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $p \leq n$, f possède en 0 le DL d'ordre p*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p + o(x^p).$$

Corollaire 108 *: Si f est paire (resp. impair), le polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ est pair (resp. impair).*

L'existence d'un DL pour la fonction f est réglée par la formule suivante, dite de "Taylor-Young" :

Proposition 109 *: Si f possède une dérivée n-ième en 0, elle possède un DL à l'ordre n en 0 donné par la formule*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n).$$

Preuve : Elle repose sur l'application itérée du théorème de Rolle à une fonction bien choisie (cf exercices). ■

Remarque 110 *: La condition précédente n'est pas nécessaire, comme l'illustre l'exemple suivant*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0. \end{cases}$$

Remarque 111 *: Cette formule est à mettre en parallèle avec celle qui est donnée par le corollaire 94. Elle paraît paradoxalement plus forte avec pourtant des hypothèses plus faibles : il n'en est rien en y regardant de plus près, car cette dernière formule est de caractère local, elle affirme simplement que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)) = 0,$$

tandis que celle du corollaire 94 a un caractère global (majoration de $f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ *sur tout l'intervalle* I*).*

7.2.2 DL et notations de Landau

Le DL de la fonction sin à l'ordre 3 en 0 est donné par la formule

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Les formules suivantes sont également valables

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5). \end{aligned}$$

La dernière est celle qui contient le plus d'information : en effet la seconde nous dit qu'il n'y a pas de terme en x^4 dans le développement, alors que la dernière nous informe du fait qu'il y a effectivement un terme en x^5.

7.2.3 Rappel des opérations sur les développements limités

1) Combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$: le DL du résultat est à l'ordre du "moins bon" des DL des fonctions considérées, au même point cela va sans dire.

2) Produit fg : le DL du résultat est d'ordre également le moins bon des ordres des DL de f et g.

3) Quotient f/g avec $g(0) \neq 0$ évidemment : si les DL sont respectivement $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$, le DL à l'ordre n du quotient s'ecrit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = R(x) + o(x^n)$$

où R est le quotient à l'ordre n de la division de P par Q suivant les puissances croissantes.

(rappel : si P et Q sont deux polynômes tels que $Q(0) \neq 0$ et n un entier naturel, il existe un couple unique de polynômes R et S tels que

$$P = QR + X^{n+1}S \quad).$$

et $\deg R \leq n$).

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{Q(x)R(x) + x^{n+1}S(x) + o(x^n)}{Q(x) + o(x^n)} \\ &= R(x) + \frac{x^{n+1}S(x) + o(x^n) - R(x)o(x^n)}{Q(x) + o(x^n)} \\ &= R(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

comme on peut le vérifier facilement : le second terme du membre de gauche, divisé par x^n, tendant vers 0 quand $x \to 0$. ■

Exercise 112 *: Donner le DL à l'ordre 4 au point* 0 *de la fonction*

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1 - e^x \sin x}.$$

4) Composition $f \circ g$: il faut supposer évidemment $g(0) = 0$, la nouvelle variable $u = g(x)$ devant tendre vers 0*, puisque c'est là qu'on considère le DL de f.*

On pose donc

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + o(x^n) \\ g(x) &= b_1x + ... + b_nx^n + o(x^n) \end{aligned}$$

et le calcul montre, après substitution de x dans le DL de f par $g(x)$, que

$$\begin{aligned} f(x) = {} & a_0 + a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 + ... \\ & ..... + (a_1b_n + ... + a_nb_1^n)x^n + o(x^n). \end{aligned}$$

Exercise 113 *: Donner le DL au point* 0 *et à l'ordre 5, de la fonction* $\ln \frac{\sin x}{x}$.

Exercise 114 *: Partant du DL de* $\sin x$ *en* 0 *et de la relation* $\arcsin(\sin x) = x$*, donner le DL de la fonction* arcsin *en* 0*, à l'ordre* 5*, à supposer qu'il existe.*

7.2.4 Intégration et dérivation des développements limités

Proposition 115 *: On suppose f dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0. Si sa dérivée f' admet un DL à l'ordre n en 0*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots.. + a_n x^n + o(x^n),$$

f admet un DL à l'ordre $n+1$, obtenu par intégration terme à terme, en prenant soin de ne pas oublier la constante $f(0)$

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots.. + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Preuve : On considère la fonction

$$\phi(x) = f(x) - f(0) - a_0 x - \frac{a_1}{2} x^2 - \ldots.. - \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

On a $\phi'(x) = o(x^n)$ par hypothèse. On peut appliquer à ϕ le théorème des accroissements finis :

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(\theta x)$$

avec $\theta \in \,]0,1[$. Reste à voir, par exemple en posant $\theta x = y$, que $x\phi'(\theta x) = o(x^{n+1})$. ■

Par contre, il se peut que f possède un DL au voisinage de 0 alors que f' n'en admet aucun. On a toutefois le résultat suivant, un peu plus faible :

Corollaire 116 *: Supposons que f possède un DL en 0 à l'ordre n*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots.. + a_n x^n + o(x^n)$$

et que f' en admette aussi un, à l'ordre $n-1$. Alors ce dernier est obtenu par dérivation terme à terme du premier

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots.. + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

En combinant la proposition 109 et ce dernier corollaire, on obtient le résultat suivant

Proposition 117 *: Si f possède une dérivée n-ième en 0, et que son DL à l'ordre n en 0 est donné par la formule*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \ldots.. + a_n x^n + o(x^n),$$

alors f' en admet un en 0 à l'ordre $n-1$, donné par la dérivation terme à terme de ce dernier

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots.. + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Preuve : En effet, f admet un DL à l'ordre n en 0 d'après la proposition 109 et de même f' en admet un à l'ordre $n-1$ en 0 puisque sa dérivée $(n-1)$-ième existe en 0, toujours d'après la proposition 109. Reste alors à appliquer le corollaire. ■

Faculté des Sciences de Luminy | Automne 2005
Département de Mathématiques
Licence 2ème année, semestre 3

Analyse 1

Liste d'exercices

1. Soit a un nombre réel > 0 et x un nombre réel.

a) Montrer qu'il existe un unique entier $k \in \mathbf{Z}$ vérifiant $ka \leq x < (k+1)a$ (distinguer suivant le signe de x et appliquer la propriété d'Archimède).

En posant $a = 1$, on définit ainsi la fonction $E(x)$ ("partie entière de x").

b) Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$ et s un nombre réel vérifiant l'inégalité $0 < s < b - a$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $ns \in \,]a, b[$.

c) En appliquant ce résultat, montrer que tout intervalle non vide de $\mathbf{R}$ contient une infinité de nombres rationnels.

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x \cos x$. Calculer $f(n\pi)$ pour en déduire que f n'est ni majorée, ni minorée.

3. Soient f et g des fonctions numériques définies sur un intervalle I. Pour tout nombre $x \in I$, on pose $M(x) = \max(f(x), g(x))$ et $m(x) = \min(f(x), g(x))$. Montrer que si les fonctions f et g sont croissantes, il en est de même des fonctions m et M.

4. Soient $E = \left\{p + q\sqrt{2} \in \mathbf{R} \mid p, q \in \mathbf{Z}\right\}$ et $u = \sqrt{2} - 1$.

a) Montrer que si $n \in \mathbf{Z}$, alors $nv \in E$ pour tout $v \in E$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1, u^n \in E$.

c) Montrer que $0 < u < 1/2$ et en déduire que $0 < u^n < 1/n$.

d) Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant $0 < u^n < b-a$. En déduire qu'il existe un élément de E appartenant à l'intervalle $]a, b[$.

5. La suite géométrique (a^n). Montrer successivement que

1) si $a \in \mathbf{R}$ et $a > 1$, la suite $\lim a^n = +\infty$ (on pourra utiliser l'inégalité : $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, en la justifiant)

2) si $|a| < 1$, alors $\lim a^n = 0$.

3) si $a = 1$, alors $\lim a^n = 1$.

4) si $|a| > 1$, la suite (a^n) n'est pas convergente.

5) En déduire que si $|a| < 1$, $\lim(1 + a + a^2 + ... + a^n) = \frac{1}{1-a}$.

6. La suite (u_n) où $u_n = \frac{a^n}{n^p}$, $a \in \mathbf{R}$ et p entier ≥ 1. Montrer successivement que

1) si $|a| \leq 1$, $\lim u_n = 0$.

2) si $a > 1$, $\lim u_n = +\infty$ (on traitera d'abord le cas $p = 1$ en utilisant, pour $n \geq 2$, l'inégalité : $(1 + h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2$, dans le cas général, on posera $a = b^p$).

3) si $a < -1$, la suite (u_n) n'est pas convergente.

7. Montrer à l'aide de suites bien choisies que la fonction $x \longmapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

8. Soit (u_n) une suite telle que, à partir d'un certain rang

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < L < 1$$

où L est un nombre réel fixé. Montrer que $\lim u_n = 0$.

Application : pour tout nombre complexe a, on a : $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

9. Pour tout $a > 0$, montrer que $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ (examiner successivement les cas $a = 1, a > 1$ et $0 < a < 1$ en posant dans le second cas $a = 1 + h$ et en montrant l'inégalité $1 \leq \sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{h}{n}$)).

10. Approximation décimale d'un réel.

Soit a un nombre réel, on pose $u_n = \frac{E(10^n a)}{10^n}$ pour tout $n \geq 0$, où E désigne la partie entière.

Montrer que

$$a - \frac{1}{10^n} < u_n \leq a,$$

pour en déduire que $\lim u_n = a$ et que $0 \leq a - u_n < 1/10^n$. Montrer enfin que la suite (u_n) est croissante.

11. On pose, pour $n \geq 1$

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times .... \times (2n-1)}{4^n n!}.$$

Démontrer l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

12. On pose, pour $n \geq 1$

$$u_n = \sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}.$$

a) Montrer par récurrence que $u_n \geq \frac{n\sqrt{n}}{2}$ et en déduire $\lim \frac{n}{u_n}$.

b) On pose $v_n = u_{2n} - u_n$. Prouver l'inégalité $n\sqrt{n+1} \leq v_n \leq n\sqrt{2n}$. En déduire $\lim \frac{v_n}{n}$ et $\lim \frac{v_n}{n^2}$.

13. Soit a un nombre réel tel que $0 \leq a < 1$.
a) Montrer que l'on a $\frac{1-a^n}{1-a} \leq n$ pour tout $n \geq 1$.
b) En déduire que $1 - (1 - \frac{1}{n^2})^n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
c) Calculer $\lim(1 - \frac{1}{n^2})^n$.

14. Soit a un nombre réel non nul.
a) Calculer la limite de la suite $(\frac{2^n+3^n}{a^n})$.
b) Calculer la limite de la suite $(\frac{1+ina}{|1+ni|})$.

15. On définit la suite récurrente (u_n) par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}).$$

a) Après avoir tracé le graphe de la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$, reporter approximativement les valeurs $u_1, u_2, u_3, ...$
b) Prouver les égalités

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

c) En déduire que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

16. Soient A et B deux sous-ensembles non vides et bornés de R, tels que $A \subset B$.
a) Montrer que

$$\begin{aligned} \sup A &\leq \sup B, \\ \inf A &\geq \inf B. \end{aligned}$$

b) Montrer que $M = \sup A$ (resp. $m = \inf A$) si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a \leq M.$$

(resp. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : m \leq a < m + \varepsilon$).

17. (réciproque du critère de Cauchy) Soit (u_n) une suite de Cauchy réelle. On pose

$$\begin{aligned} a_n &= \inf_{m \geq n} u_m \\ b_n &= \sup_{m \geq n} u_m \end{aligned}$$

a) Montrer successivement que (a_n) est une suite croissante, (b_n) une suite décroissante, $a_n \leq b_n$.

b) Le critère de Cauchy dit que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$n, p \geq N \Longrightarrow |u_p - u_n| < \varepsilon.$$

En fixant $n \geq N$, montrer que $u_n - \varepsilon \leq a_N \leq b_N \leq u_n + \varepsilon$).

c) En déduire que (a_n) et (b_n) ont une limite commune l et que celle-ci constitue la limite de la suite (u_n).

18. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (Justifier par une brève démonstration ou infirmer par un contre-exemple)

(u_n) est une suite de nombres réels strictement positifs.

a) Si (u_n) est croissante et $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors (u_n) converge.

b) Si (u_n) est décroissante, alors $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

c) Si (u_n) est décroissante et $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors (u_n) converge vers un nombre réel >0.

19. Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 1, u_1 = 2$, et pour $n \geq 2$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{2}$$

a) Montrer par récurrence que $u_n > (\sqrt{2})^n$ et en déduire la nature de la suite (u_n).

b) Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^{n+1}. \tag{3}$$

c) On pose $v_n = u_n / u_{n-1}$. En utilisant (2), montrer que la suite (v_n), si elle converge, possède une limite non nulle. Montrer, toujours à l'aide de (2), que les sous-suites (v_{2p}) et (v_{2p+1}) ont des sens de variation opposés.

d) A l'aide de (3), montrer que $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. En déduire la limite de la suite (v_n).

20. En utilisant la suite récurrente donnée par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et (2), montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\in\mathbf{N}$$

pour tout $k\geq 1$.

21. On considère la suite (u_n) définie par $u_0\in\mathbf{R}$ et

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2}{2}+\frac{1}{4}.$$

a) Montrer qu'on peut se ramener à $u_0>0$.
b) Trouver les limites l possibles.
c) Montrer que $u_{n+1}-l=(u_n^2-l^2)/2$. Que peut-on en déduire ?
d) Etudier $u_{n+1}-u_n$ et conclure quant à la convergence de (u_n) suivant u_0.

22. Montrer que si $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$, alors $\frac{1}{\sqrt{x}}\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ et $\frac{1+x}{x^2}\geq\frac{10}{9}$.
Soit (u_n) définie par $u_0\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ et $u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{u_n}}$.
a) Montrer que $|u_{n+1}-1|=|u_n-1|\,\frac{u_{n+1}^2}{1+u_{n+1}}$.
b) En déduire que $|u_{n+1}-1|<k\,|u_n-1|$ avec $k\in\left]0,1\right[$ et que (u_n) converge.

23. Calculer $\sin(n+2)-\sin n$ puis $\cos(n+2)-\cos n$.
Montrer que si la suite $\sin n$ converge, alors sa limite est 0, de même que la suite $\cos n$.
Que peut-on en conclure ?

24. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. On note G^+ le sous-ensemble des éléments strictement positifs G et $a=\inf G^+$.
a) Montrer que si $a\in G^+$, alors $G=a\mathbf{Z}$.
b) Montrer que dans le cas contraire, $a=0$.
c) Dans ce dernier cas, prouver que tout intervalle non vide de $\mathbf{R}$ contient toujours un élément de G (on dit que G est dense dans $\mathbf{R}$).
d) Application : le groupe $\mathbf{Z}+2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$ avec comme conséquence que la suite $(\sin n)$ est dense dans $\left]-1,1\right[$ (utiliser la bijection croissante de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\left]-1,1\right[$ donnée par $x\mapsto\sin x$).

25. Soit (u_n) définie par $u_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1}=\cos u_n$
Montrer que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.

26. Etudier les séries de terme général $u_n = (ch\frac{1}{n})^{-n^3}$, $v_n = \frac{n!}{n^n}$, $w_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n}$.

27. Calculer la somme $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!}$(on pourra décomposer x^3 sur la base : $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ du sous-espace vectoriel des polynômes réels de degré 3).

28. Calculer $\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n}{n-1})$. en déduire la somme $\sum_{n\geq 2} \ln(1-\frac{1}{n^2})$.

29. a) On suppose x et y réels positifs. Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

b) En déduire que si $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente, $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ l'est également.

30. Utiliser la comparaison avec la série de Riemann pour étudier la convergence des séries de terme général :

i) $\frac{\sqrt[n]{n}}{n^a}$ ii) $1 - cos\frac{1}{n}$ iii) $\ln\cos\frac{1}{n}$ iv) $\frac{\ln(n^2+1)}{n^a \ln n}$

31. Les séries des terme général $u_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ et $v_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ sont-elles convergentes ? (en fait la première est une série alternée dont le terme général croît en valeur absolue, elle se traite en groupant 2 termes consécutifs).

32. On considère la série de terme général $u_n = \ln(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}})$. Quel est le signe de u_n? La série est-elle convergente ?

33. On suppose que $u_n > 0$ pour tout n. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

34. Soit $u_n \in \mathbf{R}$.

a) Montrer que si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n^2$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

b) Donner un exemple de série convergente $\sum u_n$ telle que la série $\sum u_n^2$ diverge.

35. Discuter (fournir une démonstration ou un contre-exemple) les affirmations suivantes

a) Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite strictement plus petite que 1.

b) Si $u_n > 0$ et $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

c) Si $\lim(-1)^n n u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

d) Si $\lim(-1)^n n^2 u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.

36. Dicuter suivant $x > 0$ la nature des séries de terme général
i) $(\frac{2n-1}{n+1})^{2n} x^n$ ii) $\frac{1.4.7....(3n+1)}{(n+1)!} x^n$ iii) $n!(\frac{x}{n})^n$

37. Quelle est la nature d'une série $\sum u_n$ à termes positifs, dans laquelle à partir d'un certain rang

$$\sqrt[n]{u_n} \leq 1 - \frac{1}{n^\alpha} \qquad (\alpha \in]0,1[).$$

38. Déterminer un polynôme P tel que $u_n = \sqrt[4]{n^4 + 2n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$ soit le terme général d'une série à termes positifs convergente.

39. Soit (u_n) la suite donnée par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \frac{1+u_n}{1+2u_n}$.
a) Montrer que cette suite converge et donner sa limite.
b) En déduire la nature de $\sum u_n^2$ (aide : calculer $u_{n+1} - u_n$).
c) Quelle est la nature de la série $\sum \ln(\frac{1+2u_n}{1+u_n})$?
d) En déduire la nature de $\sum u_n$.

40. Pour n entier ≥ 2, on pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times .... \times (2n-3)}{2 \times 4 \times ...... \times 2n} \quad et \quad v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times .... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times ...... \times 2n}$$

a) Calculer $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\lim \frac{v_{n+1}}{v_n}$ puis $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

b) En déduire que pour $\alpha < 3/2$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}$ et que la série de terme général u_n est convergente.

c) Par contre, vérifier que la suite (nv_n) est croissante et en déduire que la série de terme général v_n est divergente .

41. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries et $\sum c_n$ la série produit. On rappelle que $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ et on note A_n, B_n, C_n les sommes partielles d'indice n des 3 séries.

1) On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont à termes positifs et convergentes. Montrer que l'on a

$$C_n \leq A_n B_n \leq C_{2n},$$

en déduire que $\sum c_n$ converge et l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n. \tag{4}$$

2) On suppose maintenant que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes. Montrer à l'aide de 1) que la série de terme général $|c_n|$ converge. Prouver ensuite l'égalité 4 en remarquant par exemple que $|A_n B_n - C_n| \leq A'_n B'_n - C'_n$ où on note $A'_n = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ (resp. B'_n, C'_n).

42. (Une autre démonstration du thm des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue : $[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$, avec $f(a) < f(b)$. On suppose $y_0 \in [f(a), f(b)]$ et on définit $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y_0\}$.

a) Montrer que A admet un borne supérieure x_0 et que $x_0 \in [a, b]$.

b) Montrer que l'hypothèse $f(x_0) > y_0$ conduit à une contradiction (vérifier que dans ce cas on peut trouver $x_1 < x_0$, avec x_1 majorant A).

c) Montrer que l'hypothèse $f(x_0) < y_0$ conduit à une contradiction (vérifier que dans ce cas on peut trouver $x_1 > x_0$, avec $x_1 \in A$).

43. Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est une fonction uniformément continue de $[0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ (montrer que si $x > y$, alors $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 < x - y$).

44. Soit f une fonction continue : $[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$, on veut montrer que f est uniformément continue à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

a) Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$, et deux suites (u_n) et (u'_n) dans $I = [a, b]$, vérifiant, pour tout $n \geq 1$

$$|u_n - u'_n| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(u'_n)| > \varepsilon.$$

b) En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass successivement aux suites (u_n) et (u'_n), montrer qu'il existe une suite extraite (v_n) de (u_n) (resp. (w_n) de (u'_n)), de même limite, vérifiant

$$|f(v_n) - f(w_n)| > \varepsilon \ .$$

(idée : $v_n = u_{\psi\circ\phi(n)}$ et $w_n = u'_{\psi\circ\phi(n)}$ où ϕ et ψ sont des bijections strictement croissantes de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$).

c) Conclure.

45. On définit $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ pour $n \geq 1$ par $f_n(x) = x - \cos \frac{x}{n}$.

a) Montrer que f_n est strictement croissante et en déduire qu'il existe un réel $x_n \in]0, 1[$ unique vérifiant $x_n = \cos \frac{x_n}{n}$.

b) Montrer que si $x \in]0, 1[$: $\cos \frac{x}{n} < \cos \frac{x}{n+1}$, pour en déduire que la suite (x_n) est strictement croissante.

c) Montrer que $\lim x_n = 1$.

46. (Formule de Stirling)

a) On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$. Montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ puis que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (remarquer que I_n décroît).

b) Montrer que $C_{2n}^n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ (calculer $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$).

c) On pose $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$. Montrer que (u_n) est une suite décroissante, puis calculer $\frac{u_n^2}{u_{2n}}$ pour obtenir la formule de Stirling

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

47. Montrer, en utilisant le théorème de la moyenne, que la suite

$$u_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}dx$$

converge vers 0 (on pourra également utiliser, à condition de la justifier, l'inégalité : $(1+\frac{1}{n})^n \le e$ pour $n \ge 1$).

48. Pour $n \ge 2$, on pose $u_n = \frac{1}{n}(\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + ... + \ln\frac{n-1}{n})$.

a) Calculer $\int \ln t dt$ et prouver l'encadrement

$$-1 + \frac{1}{n} \le u_n \le -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

b) Calculer la limite de la suite (u_n).

c) Montrer que $u_n = \ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. En déduire $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

49. Montrer que la fonction $x \mapsto x + \sin x$ est croissante. En déduire que la fonction $\sin x$ est différence de 2 fonctions croissantes et calculer

$$\lim \frac{1}{n}(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{n\pi}{n}).$$

50. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $I = [a, b]$.

a) Montrer que $f + g$ est intégrable (utiliser la définition 74).

b) Soient u et U (resp. v et V) les fonctions étagées pour f (resp. pour g) données par la définition 74. Montrer que

$$\int_a^b u(t)dt + \int_a^b v(t)dt \le \int_a^b (f+g)(t)dt \le \int_a^b U(t)dt + \int_a^b V(t)dt$$

(utiliser la remarque 75).

c) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$-\varepsilon \leq \int_a^b (f+g)(t)dt - \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \leq \varepsilon$$

et conclure.

51. On définit, pour une fonction $f : I \to \mathbf{R}$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \; f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \; f(x) < 0 \end{cases}$$

et

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } \; f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } \; f(x) > 0 \end{cases} .$$

On veut montrer que si f est intégrable, il en est de même de $|f|$. Pour cela , on part de l'encadrement $u \leq f \leq U$ de f par des fonctions étagées vérifiant de plus

$$\int_I (U-u)(t)dt \leq \varepsilon.$$

a) Montrer les inégalités

$$u^+ \leq f^+ \leq U^+ \quad \text{et} \quad U^- \leq f^- \leq u^-$$

d'une part (examiner suivant le signe de $f(x)$), et

$$U^+ - u^+ \leq U - u \quad \text{et} \quad u^- - U^- \leq U - u$$

d'autre part (examiner les 3 cas possibles suivant les signes respectifs de $u(x)$ et $U(x)$).

b) En déduire que les fonctions f^+, f^- et $|f|$ sont intégrables.

52. Exemple d'une fonction non intégrable.

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

Soit u (resp. U) une fonction étagée qui minore (resp. qui majore) f sur un intervalle non vide $]a,b[$ .Montrer qu'alors $u = 0$ (resp. $U = 1$) sur l'intervalle en question. Conclure que f n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

53. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

54. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$

$$\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

c) En déduire l'inégalité $\cos x - \sqrt{1-x^2} \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

d) En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction $\sqrt{1-x}$, prouver que si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8(1-\frac{\pi}{4})^{3/2}} \leq \sqrt{1-x^2}.$$

e) Trouver un nombre $M > 0$ tel que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$0 \leq \cos x - \sqrt{1-x^2} \leq Mx^4.$$

55. Montrer que la fonction f de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est C^∞ (on pourra montrer par récurrence que pour $x > 0$, la dérivée n-ième est donnée par $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$ où P_n est un polynôme). Quel est son DL à l'ordre n en 0 ?

56. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue et dérivable en 0.Est-elle dérivable deux fois en 0 ?

b) Montrer que f possède un DL en 0 à l'ordre 1, mais aussi à l'ordre 2. Conclusion ?

57. (preuve de la formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ où I est un intervalle ouvert contenant 0. On suppose que $f^{(n)}(0)$ existe, ce qui signifie que f est dérivable $(n-1)$ fois sur un intervalle ouvert contenant 0. On choisit x_0 tel que f soit dérivable $(n-1)$ fois sur $]0, x_0[$ et on pose

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0).$$

On définit alors la fonction g par

$$g(x) = \frac{1}{x^n}(f(x) - P(x)).$$

L'objectif est donc de montrer que

$$g(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(1).$$

On considère pour cela

$$\phi(x) = f(x) - P(x) - g(x_0)x^n.$$

a) En appliquant le théorème de Rolle à ϕ, montrer qu'il existe un réel $x_1 \in]0, x_0[$ tel que $\phi'(x_1) = 0$.

b) En effectuant $(n-1)$ fois cette opération, montrer qu'il existe un nombre réel x_{n-1} vérifiant

$$0 < x_{n-1} < ..... < x_1 < x_0 \quad \text{et} \quad \phi^{(n-1)}(x_{n-1}) = 0.$$

c) En déduire que

$$n!g(x_0) = \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{x_{n-1}},$$

puis, en faisant tendre x_0 vers 0, que

$$g(x_0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(1).$$

58. Mettre dans l'ordre les fonctions suivantes, de telle sorte que 2 fonctions consécutives f et g vérifient $f = O(g)$. indiquer de plus si $f = o(g)$, $f \sim g$ et $g = O(f)$: $x^3, e^x x^2, 1/x, x^2(x+100)+1/x, x+\sqrt{x}, \log_2 x, \log_3 x, 2x^2, x, e^{-x}, 2x^{2-10x+4}, e^{x+\sqrt{x}}, 2^x, 3^x, x^{-2}, x^2(\ln x)^{1000}$.

59. Prouver les assertions suivantes
a) $f = o(g)$ implique $f = O(g)$ et $g \neq O(f)$,
b) $f = O(g)$ et $g = O(h)$ impliquent $f = O(h)$.
b) $f = O(g)$ et $g = o(h)$ impliquent $f = o(h)$.
b) $f = o(g)$ et $g = O(h)$ impliquent $f = o(h)$.

60. Soient f et g des fonctions positives pour x grand. On suppose que f/g tend vers une limite l quand $x \to +\infty$. Montrer que
a) si $l = 0$, alors $f = o(g)$,
b) si $0 < l < +\infty$, alors $f \asymp g$,
c) si $l = +\infty$, alors $g = o(f)$.

61. Soient f et g des fonctions positives pour x grand. montrer que si $f \sim g$, alors $\ln f = \ln g + o(1)$. Si de plus, pour x grand, on a $\ln f(x) \geq c$ avec une constante positive c, alors $\ln f \sim \ln g$.