2008/2009
Durée : 02 heures

Université A. Mira – Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques/M.I.

Examen D'Analyse 2

Exercice 1. : (**06 pts**)
1) *Calculer en utilisant la limite de la somme de Darboux inférieure les intégrales suivantes*

$$I_1 = \int_3^{10} (2+x)dx, \ I_2 = \int_0^a x^2 dx \ \text{ où } a > 0$$

2) *Calculer en utilisant l'intégrale définie, la limite de la somme suivante*

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}}, \ \text{ avec } p > 0$$

Indication *: utiliser une subdivision régulière des intervalles d'intégration et sachant que* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Exercice 2. : (**08 pts**)
a) *Trouver les primitives de la fonction suivante*

$$f(x) = \frac{x^5}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

b) *Résoudre l'équation différentielle suivante*

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{x^5}{(x^2-x+1)}$$

c) *Montrer que la fonction* $g(x) = x^3 - 1$ *est une solution de l'équation*

$$y' - \frac{y}{x-1} = 2x^2 - x - 1$$

Trouver la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 0$.

Exercice 3. : (**06 pts**)
Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x . \cos x + \cos 2x$$

Corrigé

Solution exercice 1 :

1. Si f est une fonction croissante sur $[a,b]$ et d une subdivision régulière de pas $h = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$ et de points $x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k = 0, ..., n$, alors la somme de Darboux inférieure associée à cette subdivision régulière d est définie par

$$S = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \Rightarrow S = \Big(\frac{b-a}{n}\Big)\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Calcul de I_1 et I_2 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{7}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(5 + \frac{7k}{n}) = \lim_{n\to+\infty}\Big(35 + \frac{49}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\Big) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(35 + \frac{49}{n^2}\frac{n}{2}(n-1)) = \frac{119}{2} \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{ak}{n})^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k)^2 \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) = \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

2. On a

$$\frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p$$

Cette somme est une somme de Rimeann associée à une subdivision régulière de l'intervalle $[0,1]$ pour la fonction $f : x \mapsto x^p$. Comme f est integrable sur $[0,1]$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p \\ &= \int_0^1 x^p dx \\ &= \frac{1}{1+p} \end{aligned}$$

Solution exercice 2 :

a) Effectuons la division euclidienne de la fraction rationnelle suivante

$$f(x) = \frac{x^5}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

On obtient

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 + \frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x^2-x+1)}.$$

En utilisant la décomposition en éléments simples

$$\begin{aligned}
\tfrac{x^2-2x+2}{(x-1)(x^2-x+1)} &= \tfrac{a}{(x-1)} + \tfrac{bx+c}{(x^2-x+1)} \\
&= \tfrac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2-x+1)} \\
&= \tfrac{(a+b)x^2+(-a-b+c)x+a-c}{(x-1)(x^2-x+1)}
\end{aligned}$$

Par identification on obtient

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a-b+c=-2 \\ a-c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{x^2-2x+2}{(x-1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x^2-x+1)}$$

En integrant

$$\int \tfrac{x^2-2x+2}{(x-1)(x^2-x+1)}dx = \int \tfrac{dx}{x-1} - \int \tfrac{dx}{(x^2-x+1)}$$

Calcul de

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-x+1} &= \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{1+t^2} \quad \texttt{avec} \quad t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + K = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + K
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int (x^2+2x+2)dx + \int \tfrac{dx}{x-1} - \tfrac{4}{3}\int \tfrac{dx}{1+(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2} \\
&= \tfrac{x^3}{3} + x^2 + 2x + \ln|x-1| - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C
\end{aligned}$$

b) La résolution de l'équation différentielle suivante

$$y' - \frac{y}{x-1} = \frac{x^5}{(x^2-x+1)} \tag{E1}$$

On cherche avant tout, la solution générale de l'équation sans second membre (H1) "homogène"

$$y' - \frac{y}{x-1} = 0 \tag{H1}$$

C'est une équation à variables séparables

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$$

Passage à l'intégrale

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x-1| + c \Longrightarrow y_H = k.(x-1) \ \texttt{où} \ k \in \mathbb{R}$$

<u>Méthode de la variation de la constante :</u>

On pose

$$y = k(x)(x-1) \Leftrightarrow y' = k'(x)(x-1) + k(x)$$

On remplace dans l'équation (E1)

$$k'(x)(x-1)+k(x)-k(x) = \frac{x^5}{(x^2-x+1)} \Longleftrightarrow k'(x) = \frac{x^5}{(x-1)(x^2-x+1)}$$

De la question a) on tire

$$k(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C \ \texttt{où} \ C \in \mathbb{R}$$

donc

$$y = \Big(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C\Big)(x-1)$$

D'où

$$y = \Big(\frac{x^3}{3}+x^2+2x+\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})\Big)(x-1)+C(x-1) \ \texttt{où} \ C \in \mathbb{R}$$

c) Montrons que $g(x) = x^3 - 1$, est une solution de l'équation.
Notons que $g(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ et $g'(x) = 3x^2$

$$3x^2 - \frac{(x-1).(x^2+x+1)}{x-1} = 3x^2 - (x^2+x+1) = 2x^2 - x - 1$$

Ainsi, la fonction g est une solution particulière de l'équation. Donc la solution générale de l'équation différentielle avec second membre, est de la forme

$$y = k(x-1) + x^3 - 1$$

On a

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow -k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

D'où

$$y = x^3 - x.$$

<u>Solution exercice 3 :</u> La résolution de l'équation

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x. \cos x + \cos 2x \tag{E2}$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec un second membre, de solution générale

$$y = y_H + y_p$$

Avec, y_H la solution de l'équation homogène associée (H2)et y_p une solution particulière de (E2).

1. Résolution l'équation sans second membre

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{H2}$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 2 = 0$, avec $\Delta' = -1 < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 - i,\ r_2 = 1 + i$, donc

$$y_H = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \ \texttt{où}\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. Recherche de la solution particulière de l'équation (E2), notons que

$$\sin x. \cos x + \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x$$

On remarque que le second membre est sous la forme $A \cos wx + B \sin wx$, du moment que $wi = 2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique,

donc $y_p = k\sin 2x + h\cos 2x$ est une solution particulière de l'équation (E2)

$$\begin{aligned} y_p = k.\sin 2x + h.\cos 2x \quad &\Longrightarrow y_p' = 2k.\cos 2x - 2h.\sin 2x \\ &\Longrightarrow y_p'' = -4k.\sin 2x - 4h.\cos 2x \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation (E2), on trouve

$$(-4k.\sin 2x - 4h.\cos 2x) - 2(2k.\cos 2x - 2h.\sin 2x) + 2(k.\sin 2x + h.\cos 2x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x$$

En réarrangeant

$$(-2k + 4h)\sin 2x + (-2h - 4k)\cos 2x = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos 2x.$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} -2k + 4h = \frac{1}{2} \\ -4k - 2h = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{4} h = 0 \end{cases}$$

Donc

$$y_p = -\frac{1}{4}\sin 2x$$

D'où, la solution générale de l'équation (E2)

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) - \frac{1}{4}\sin 2x \text{ où } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

Barème

Exercice 1 :(06 pts)

$$\begin{cases} 1)\ I_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(5+\frac{7k}{n}) = \frac{191}{2} & \longrightarrow(1,5\ pts) \\ I_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\frac{ak}{n})^2 = \frac{a^3}{3} & \longrightarrow(1,5\ pts) \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{1+p} & \longrightarrow(03\ pts) \end{cases}$$

Exercice 2 :(08 pts)

$$\begin{cases} \textbf{a})\ \int f(x)dx = \frac{x^3}{3}+x^2+2x+\ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}})+C & \longrightarrow(03\ pts) \\ \textbf{b})\ y = (\frac{x^3}{3}+x^2+2x+\ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}))(x-1)+ \\ k.(x-1) \text{ où } k\in\mathbb{R} & \longrightarrow(02\ pts) \\ \textbf{c})\ g(x) = x^3-1, \text{est une solution de l'équation} & \longrightarrow(1\ pt) \\ y = k(x-1)+x^3-1 & \longrightarrow(1\ pt) \\ y = x^3-x. & \longrightarrow(1\ pt) \end{cases}$$

Exercice 3 :(06 pts)

$$\begin{cases} \textbf{1})\ y_0 = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) \text{ où } C_1 \text{ et } C_2\in\mathbb{R}. & \longrightarrow(02\ pts) \\ y_p = -\frac{1}{4}\sin 2x & \longrightarrow(03\ pts) \\ \textbf{2})\ y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) - \frac{1}{4}\sin 2x \text{ où } C_1 \text{ et } C_2\in\mathbb{R} & \longrightarrow(01\ pt) \end{cases}$$