Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département Maths - MI.

Date : 06 octobre 2011
Durée : 2 heures.

Rattrapage Analyse 2

Exercice 1. *(07 points) :*

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :* $\frac{1}{x(1+x^2)}$
2. *Déterminer sur* $]0,+\infty[$
$$I = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$
3. *En déduire*
$$I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arctan x}{x^2}dx$$

.

Exercice 2. *(07 points) :* ***On considère l'équation différentielle :***

$$y' + 2y = 3e^{-2x} \qquad \text{(E)}$$

1. *Vérifier que* $y_p(x) = \frac{3x}{e^{2x}}$ *est une solution particulière de* (E).
2. *Montrer que :* y *solution de* $(E) \Longleftrightarrow (y - y_p)$ *solution de l'équation* $y' + 2y = 0$.
3. *Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) :* $y' + 2y = 0$.
4. *En déduire les solutions de* (E).

Exercice 3. *(06 points) :* ***On considère l'équation différentielle :***

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \ \texttt{pour}\ x \in]0,+\infty[\qquad \text{(F)}$$

Où a, b, c *sont des réels, avec* $a \neq 0$.
On pose $z(t) = y(e^t)$, *une fonction deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(composée de deux fonctions deux fois dérivables* $x \mapsto y(x)$ `et` $t \mapsto e^t$*)*

1. *Vérifier qu'en effectuant le changement de variable précédent dans l'équation différentielle* (F), *on obtient une équation différentielle linéaire du second ordre en* z *à coefficients constants.*
2. *Résoudre sur* $]0,+\infty[$, *l'équation différentielle* $x^2y'' - xy' + y = 0$

Corrigé Rattrapage Analyse 2

6 octobre 2011

Date : 06 octobre 2011
Durée : 02 heures

Exercice 1. *(07 points) :*

1. *Décomposition en éléments simples :*

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)}$$

Par identification, on trouve $a = 1, b = -1$ `et` $c = 0$, *donc*

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

2. *Calcul de* I

$$I = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

3. *Calcul de* I_0, *on a*

$$\int \frac{\arctan x}{x^2}dx = -\frac{1}{2x}(2\arctan x + x\ln(x^2+1) - 2x\ln x) + C$$

après une intégration par partie, d'ou

$$I_0 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\arctan x}{x^2}dx = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 5 + 2\arctan 2$$

.

Exercice 2. *(07 points) :*

$$y' + 2y = 3e^{-2x} \qquad \text{(E)}$$

1. *On a* $y_p(x) = \frac{3x}{e^{2x}} = 3x\,e^{-2x} \Rightarrow y_p'(x) = 3\,e^{-2x} - 6x\,e^{-2x}$, *de ce fait :*

$$y_p'(x) - 2y_p(x) = 3\,e^{-2x} - 6x\,e^{-2x} + 2(3x\,e^{-2x}) = 3\,e^{-2x}$$

Donc $y_p(x)$ *est une solution particulière de* (E).

2. ***condition suffisante*** *:*
   Si y est solution de $(E) \Rightarrow y' + 2y = 3e^{-2x}$
   y_p est une solution de $(E) \Rightarrow y'_p + 2y_p = 3e^{-2x}$
   Donc :
   $$(y' + 2y) - (y'_p + 2y_p) = 3e^{-2x} - 3e^{-2x}$$

   C'est à dire
   $$y' - y'_p + 2(y - y_p) = 0 \Longleftrightarrow (y - y_p)' + 2(y - y_p) = 0$$

   Alors, $(y - y_p)$ est une solution de l'équation $y' + 2y = 0$.

   condition nécessaire *:*
   Réciproquement, si $(y - y_p)$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$, alors :
   $$(y - y_p)' + 2(y - y_p) = 0 \Rightarrow y' - y'_p + 2y - 2y_p) = 0 \Rightarrow (y' + 2y) - (y'_p + 2y_p) = 0$$

   D'autre part : $y_p(x)$ est une solution particulière de $(E) \Rightarrow y'_p + 2y_p = 3e^{-2x}$
   D'ou
   $$(y' + 2y) - (3e^{-2x}) = 0 \Rightarrow y' + 2y = 3e^{-2x}$$
   Donc y est solution de l'équation (E).
3. *Résolution de l'équation différentielle homogène associée à (E) : $y' + 2y = 0$*
   $y = 0$ est une solution triviale.
   Si $y \neq 0$, alors $y' = -2y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -2\,dx$
   En integrant, on aura :
   $$\ln|y| = -2x + C \Rightarrow |y| = e^{-2x+C} = Ke^{-2x} \Rightarrow y = Ke^{-2x}, K \in \mathbb{R}$$

4. *La solution générale de (E) est égale à la somme de la solution particulière y_p de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée, c'est à dire :*
   $$y = 3xe^{-2x} + Ke^{-2x} = (K + 3x)e^{-2x}$$
   .

Exercice 3. *(06 points) : Soit*
$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \ \texttt{pour}\ x \in]0, +\infty[\qquad \text{(F)}$$

1. *Pour t réel, en posant donc, $x = e^t$ puis, $z(t) = y(x) = y(e^t)$.*
   On aura : $z'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x)$ dérivée de composition de fonctions
   Puis $z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) = xy'(x) + x^2 y''(x)$.
   Donc, $xy'(x) = z'(t)$ et $x^2 y''(x) = z''(t) - xy'(x) = z''(t) - z'(t)$.
   Par suite,

   $$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x) = a(z''(t)-z'(t))+bz'(t)+cz(t) = az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)$$

   Donc,

   $$\forall x > 0; ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = 0$$

2. *Résolution de*

   $$x^2y'' - xy' + y = 0 \qquad \text{(G)}$$

   On applique le 1) avec $a = 1, b = -1$ et $c = 1$. Léquation à résoudre sur $\mathbb{R}$ est alors

   $$z'' - 2z' + z = 0 \qquad \text{(H)}$$

   L'équation caractéristique : $k^2 - 2k + 1 = 0$ avec $\Delta = 0$, a comme racines doubles $k_1 = k_2 = 1$. D'ou les solutions de cette équation différentielle (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

   $$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t, \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

   Les solutions sur $]0; +\infty[$ de léquation différentielle (G) sont donc les fonctions de la forme

   $$x \mapsto (\lambda x \ln x + \mu x), \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$