UFR de Mathématiques
Université de Lille 1

Licence sciences et technologies A - S2 MASS

Analyse 2 - Résumé du Cours

Table des matières

Partie I : Intégration

1. Introduction : Premières remarques sur les primitives et l'intégrale indéfinie

Au premier semestre nous avons étudié les fonctions dérivables et associé à une telle fonction F la fonction dérivée $f = F'$. Associer à une fonction f une primitive est, lorsque cela est possible, le procédé inverse car la définition d'une primitive est la suivante.

Définition 1.1. *Une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et si $F' = f$.*

Une conséquence immédiate du théorème des accroissement finis est qu'une primitive, toujours dans le cas ou elle existe, est unique à une constante additive près. Plus précisément, on a la propriété suivante.

Proposition 1.2. *Si F_1 et F_2 sont toutes les deux des primitives d'une fonction f sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + c$ sur I.*

Remarques et notations : Comme la différence de deux primitives d'une fonction est constante on travaille souvent dans la pratique *à une constante additive prés*. Si la fonction f admet des primitives $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, alors la famille de ces primitives est généralement notée

$$\int f(t)\, dt = F(x) + c$$

et appelé *l'intégrale indéfinie* de f. Il est à noter que $\int f(t)\, dt$ est une fonction de x, c'est la raison

(1) pourquoi on trouve parfois la notation $\int^x f(t)\, dt$ et
(2) pourquoi ici la variable sous l'intégrale est une lettre autre que x Par hasard le choix s'est porté sur t mais toute autre lettre convient également. On appelle cette variable t *muette*. Souvent on prends quand même la lettre x, cad. on écrit $\int f(x)\, dx$. Mais il ne faut pas confondre cette variable muette avec la variable x de $x \mapsto F(x)$...

Exemple 1.3. *On n'a pas oublié que la dérivée de $p(x) = x^n$, $n \geq 0$, est $p'(x) = nx^{n-1}$. Par conséquent, $P(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ est une primitive de p. Par ailleurs, si F est une primitive quelconque de p, alors, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que,*

$$F = P + c\ , \quad i.e.\ \ F(x) = P(x) + c \ \ pour\ tout\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

En termes d'intégrale généralisée ceci devient

$$\int p(x)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ , \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ainsi, pour beaucoup de fonctions usuelles on connait les primitives. Voici quelques exemples (utiles à savoir !).

Par exemple, on déduit de la deuxième ligne du tableau que

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \quad , \quad \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

sur des intervalles appropriés. On remarque également qu'il est important de connaitre les dérivées des fonctions usuelles, en particulier des fonctions trigonométriques réciproques !

Plus tard nous allons voir des techniques d'intégration qui permettent, à partir de primitives connues comme celles du tableau, trouver des primitives de fonctions plus élaborées. Voici déja quelques exemples.

Exemple 1.4. *L'opération qui associe à une fonction f sa dérivée f' est* linéaire *(cf. Algèbre 2). Ceci signifie que, pour toutes fonctions dérivables f_1, f_2, f et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' \quad et \quad (\lambda f)' = \lambda f'\,.$$

Par conséquent, si F_i est une primitive de f_i, $i = 1, 2$, alors

$$F = F_1 + F_2 \quad est\ une\ primitve\ de \quad f_1 + f_2\,.$$

Table 1. Un "petit" tableau de quelques primitives usuelles

Fonction f	UNE primitive F de f	Domaine de définition de F
$const$	$const\, x$	$\mathbb{R}$
x^a, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } a \in \mathbb{N} \\ ]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, \infty[\; si \; a = -2, -3, ... \\ ]0, \infty[\text{ pour tout autre } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{cases}$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$.
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$sh(x)$	$ch(x)$	$\mathbb{R}$
$ch(x)$	$sh(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$
etc.		

Il est alors façile de déterminer les primitives d'une fonction comme

$$f(x) = \cos(x) + e^x \,.$$

De même, si F est une primitve de f, alors λF est une primitive de λf. Cette propriété servira déja dans le prochain exemple (avec $\lambda = \frac{5}{2}$).

Exemple 1.5. *Si $F = u \circ v$ avec u, v des fonctions dérivables, alors $F' = u' \circ v\, v'$. Par conséquent, si on est en présence d'une fonction f de la forme $f = u' \circ v\, v'$ alors on connait les primitives. Par exemple, considérons*

$$f(x) = 5xe^{x^2} \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

En prenant $u'(y) = e^y$ et en remarquant que $\int e^y\, dy = e^y + c$, $c \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = u'(x^2)5x = \frac{5}{2} u' \circ v(x)\, v'(x) \quad avec \quad v(x) = x^2\,.$$

Par conséquent, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\int f(x)\, dx = u \circ v(x) + c = e^{x^2} + c \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Nous allons approfondir cette technique très utile dans la Section 6.1 Changement de variables.

Une autre technique très importante est l'*intégration par parties*. Elle repose sur la simple formule $(uv)' = u'v + uv'$. Voici l'enoncé exact. On verra beaucoup d'applications en TD.

Théorème 1.6. *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1. Alors, on a*

$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

à une constante additive près.

2. Fonctions Riemann intégrables

Nous allons maintenant aborder la théorie de l'intégrale de Darboux - Riemann. Voici quelques motivations.
– Quelle est la signification géométrique de l'intégrale ?
– Quelles fonctions admettent des primitives ?
– Approfondir les techniques d'intégration afin de pouvoir déterminer les primitives de fonctions plus complexes.

Dans la suite,
– $I = [a, b]$ désigne un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et
– $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, i.e. on suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$-K \leq f(x) \leq K \quad \text{pour tout } x \in I .$$

Définition 2.1. *Une partition de I est un ensemble $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de nombres réels tels que $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Le pas de la partition Z est le nombre $\delta(Z) = max_{1 \leq j \leq n}|x_j - x_{j-1}|$.*

Soit $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une partition de I. La *somme de Darboux inférieure* de f associée à Z est

$$S_-(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f_{|[x_{j-1}, x_j]} .$$

La *somme de Darboux supérieure* de f associée à Z est

$$S_+(f, Z) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f_{|[x_{j-1}, x_j]} .$$

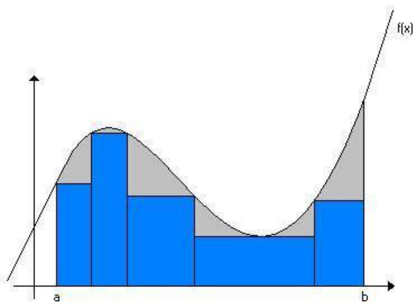

Figure 1. Representation graphique de la somme de Darboux inférieure

Lemme 2.2. *Pour toutes partitions Z_1 et Z_2 de I on a $S_-(f, Z_1) \leq S_+(f, Z_2)$.*

Conséquence immédiate de ce lemme : si

$$M_- = \{S_-(f, Z) \,;\; Z \text{ partition de } I\} \quad \text{et si} \quad M_+ = \{S_+(f, Z) \,;\; Z \text{ partition de } I\}$$

alors, pour toute partition Z' (par exemple pour $Z' = \{a, b\}$),

$$S_-(f, Z') \quad \text{est un minorant de } M_+ \quad \text{et}$$

$$S_+(f, Z') \quad \text{est un majorant de } M_- .$$

Ceci permet de définir

$$I_-(f) = \sup M_- = \sup\{S_-(f, Z)\} \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf M_+ = \inf\{S_+(f, Z)\} .$$

Exercice 2.3. Vérifier que $I_-(f) \leq I_+(f)$!

Définition 2.4. *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann (ou, plus simplement R-intégrable) si $I_-(f) = I_+(f)$. Dans ce cas, la valeur commune $I(f) := I_-(f) \leq I_+(f)$ est l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ que l'on note*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad ou \int_I f(x)\,dx \quad \left[\; ou \int_I f(u)\,du \right] .$$

Théorème 2.5 (Critére d'intégrabilité de Riemann)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors, f est R-intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition Z de I telle que*

$$S_+(f,Z) - S_-(f,Z) < \varepsilon \; . \tag{1}$$

Remarque 2.6. *Comme pour toute partition Z de I on a*

$$S_-(f,Z) \leq I_-(f) \leq I_+(f) \leq S_+(f,Z) \; ,$$

il résulte du critére de Riemann que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition Z de I telle que

$$-\varepsilon + S_-(f,Z) \leq I(f) \leq S_+(f,Z) + \varepsilon$$

pourvu que f est intégrable.

On dira que $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ est *subordonné* à la partition $Z = \{x_0, ..., x_n\}$ si $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ pour tout $j = 1, ..., n$. On définit la somme de Riemann

$$S(f,Z,\xi) := \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(\xi_j) \; .$$

Clairement, pour toute partition Z et tout ξ subordonné, on a

$$S_-(f,Z) \leq S(f,Z,\xi) \leq S_+(f,Z).$$

Théorème 2.7. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour toute suite $Z^{(N)}$ de partitions de $[a,b]$ de pas $\delta_N = \delta(Z^{(N)})$ tendant vers 0 et pour toute suite de points $\xi^{(N)} = (\xi_1^{(N)}, ..., \xi_n^{(N)})$ subordonnés à $Z^{(N)}$, les sommes de Riemann*

$$S(f, Z^{(N)}, \xi^{(N)}) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad lorsque \quad n \to \infty \; .$$

(admis)

Exemple 2.8. *Il est trés naturel de considérer la subdivision équidistante $Z^{(n)} = \{x_j = a + \frac{j}{n}(b - a) \; ; \; j = 0, ..., n\}$. Le pas de cette partition est $\delta_n = \frac{1}{n}(b-a)$. Avec $\xi_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 1, ..., n$, on a pour toute fonction R–intégrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que*

$$\frac{b-a}{n}\left(f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + ... + f\left(a + n\frac{b-a}{n}\right)\right) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \quad si \quad n \to \infty \; .$$

Pour être plus concret, prenons $f(x) = \sqrt{x}$ et $[a,b] = [0,1]$. Comme on le verra, cette fonction est bien intégrable (car monotone et aussi car elle est continue). Dans ce cas (cf. l'Exercice 2.7) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3} \; .$$

3. Classes de fonctions R-intégrables

L'exemple standard d'une fonction qui n'est pas R-intégrable est la fonction de Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ sinon. Elle n'est pas R-intégrable sur aucun intervalle $[a,b]$ car pour toute partition Z d'un tel intervalle on a $S_-(\chi_{\mathbb{Q}}, Z) = 0$ et $S_+(\chi_{\mathbb{Q}}, Z) = 1$.

Proposition 3.1. *Toute fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable.*

Proposition 3.2. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est R-intégrable.*

Lemme 3.3. *Soit* $d \in [\alpha, \beta] \subset [a,b]$ *et soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction.*

(1) *Si* f *est R-intégrable sur* $[a,b]$ *alors est l'est aussi sur* $[\alpha, \beta]$.

(2) *Si* f *est R-intégrable sur* $[a,d]$ *et sur* $[d,b]$, *alors elle l'est aussi sur* $[a,b]$.

Proposition 3.4. *La somme* $f+g$ *et le produit* fg *de deux fonctions R-intégrables est R-intégrable. Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* f *est R-intégrable, alors* λf *l'est également.*

4. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann

Dans la proposition suivante et dans la suite on utilise la notation

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{si } a < b\ .$$

Proposition 4.1 (Relation de Chasles)**.** *Soit* $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *une fonction R-intégrable et soit* $a, b, c \in [\alpha, \beta]$. *Alors*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\ .$$

Proposition 4.2 (Linéarité)**.** *Soient* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *des fonctions R-intégrables et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\lambda \int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \lambda f(x)\,dx \qquad \textit{et}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx\ .$$

Proposition 4.3 (Positivité et Monotonie)**.** *Soient* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *des fonctions R-intégrables.*

(1) *Si* $f \geq 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(2) *Si* $f \leq g$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

(3) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

En conséquence directe de (2) de la Proposition précédente on obtient l'estimation importante

$$(b-a)\inf(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup(f)\ .$$

Une fois établi cette inégalité on en déduit en employant le théorème des valeurs intermédiaires les deux formules de la moyenne :

Corollaire 4.4 (Premier Théorème de la moyenne)**.** *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* **continue**, *alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\ .$$

Corollaire 4.5 (Deuxième Théorème de la moyenne)**.** *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* **continue** *et si* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est* **positive**, *alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\ .$$

5. Primitives et Théorèmes fondamentaux du Calcul

Théorème 5.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction R-intégrable, alors la fonction*
$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
est continue sur $[a,b]$.

Théorème 5.2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction R-intégrable et si f et continue en $x_0 \in [a,b]$, alors la fonction*
$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
est dérivable en x_0.

Rappelons la définition suivante déja rencontrée dans le premier paragraphe.

Définition 5.3. *Une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f[a,b] \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et si $F' = f$.*

Rappelons également que le théorème des valeurs intermediaires implique qu'une primitive est *unique à une constante additive près*, i.e. si F_1 et F_2 sont toutes les deux des primitives d'une fonction f, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_2 = F_1 + c$.

Un corollaire immédiat du Théoréme 8.6 est le résultat suivant :

Théorème 5.4 (Premier Théorème du Calcul)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la fonction*
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. Autrement dit, F est une primitive de f.

Théorème 5.5 (Second Théorème du Calcul)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction R-intégrable et si f admet une primitive F, alors la fonction*
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

On notera bien que dans ce dernier résultat l'une des hypthéèses est que f admet une primitive. Ce n'est pas le cas pour toute fonction R-intégrable !

6. Techniques d'intégration

6.1. **Changement de variables.** Un outil très important pour la détermination de primitives est le *changement de variables.*

Théorème 6.1. *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ une application C^1. Alors*
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du\,.$$

Exemple 1 : Avec $u = x^2$ et donc $du = 2x\,dx$ on a
$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan 4.$$

Dans cet exemple on connaît une primitive de $f(u) = \frac{1}{1+u^2}$ et on en déduit la valeur de l'intégrale de départ. Souvent on utilise ce procédé dans l'autre sens afin de déterminer $\int_\alpha^\beta f(u)\,du$. Mais dans ce cas, l'application $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ du changement de variables **doit être une bijection**.

Théorème 6.2. *Soit $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ une application C^1 bijective et soit $f : [c,d] = \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in [c,d]$ on a*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Exemple 2 : Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$, et cherchons une primitive de f. Pour ce faire on considère $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$, $\varphi(t) = \sin(t)$. Avec $x = \varphi(t)$ on a $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$ (ok ?) et $dx = \varphi'(t)\,dt = \cos(t)\,dt$. Donc

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\cos(t)}\cos(t)\,dt = \int 1\,dt = t + c\,, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Le problème restant est que le résultat est une fonction de la variable t et non pas de x. Hereusement $\varphi : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ est une **bijection** ! Ainsi on peut considérer $\varphi^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ qui n'est rien d'autre que $t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin(x)$.

Conclusion : On a $\int f(x)\,dx = \arcsin(x) + c$, $|x| < 1$.

Remarque : Dans cet exemple, on aurait pu prendre à la place de $\varphi(t) = sin(t)$ la fonction $\psi : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\varphi(t) = \cos(t)$. Dans ce cas on obtient

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{\sin(t)}(-\sin(t))\,dt = \int -1\,dt = -t + c = -\arccos(x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,$$

toujours car $\psi : [0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection. Alors lequel est le bon résultat ? Y a-t-il une erreur ?

7. Intégration par parties

Nous avons déja vu dans l'introduction une version du résultat suivant.

Théorème 7.1. *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.$$

8. Intégration de fractions rationnelles

8.1. **Quelques remarques sur la décomposition de Polynômes.** Dans la suite, $P(z) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ (resp. $a_k \in \mathbb{C}$) et $a_d \neq 0$ est on polynôme réel (resp. complexe) de degré d.

Exercice 8.1. Vérifier que $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$ si P est un polynôme réel.

Proposition 8.2. *Si $r \in \mathbb{C}$ est un zéro du polynôme P, alors il existe un autre polynôme P_1 tel que $P(x) = (x-r)P_1(x)$ (et P_1 est réel si P et r le sont).*

Théorème 8.3 (Théroème Fondamental de l'Algébre)**.** *Tout polynôme a un zéro dans $\mathbb{C}$. (admis)*

On en déduit la décomposition complexe d'un polynôme que voici :

Corollaire 8.4. *Si $P(z) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$ est un polynôme (réel ou complexe), alors il existe $r_1, ..., r_n$ des nombres complexes distincts deux à deux et des entiers $m_1, ..., m_n$ tels que*

$$P(z) = a_d(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2} \times ... \times (z-r_n)^{m_n}\,.$$

Considérons finalement le cas d'un polynôme réel. Un tel polynôme peut avoir des racines réelles mais également des racines complexes. Mais, si r est une racine complexe, alors son conjugué $\overline{r}$ est également une racine (voir l'Exercice 8.1). L'exemple standard est $P(x) = x^2 + 1$ dont les racines sont $r = i$ et $\overline{r} = -i$.

Si r et $\overline{r}$ sont des racines complexes du polynôme réel P, alors le polynôme également réel

$$(x-r)(x-\overline{r}) = x^2 - 2\Re(r)x + |r|^2$$

"divise" P, i.e. $P(x) = (x^2 - 2\Re(r)x + |r|^2)P_1(x)$ pour un certain polynôme réel P_1. On en déduit la décomposition réelle (en facteurs "irréductibles") suivante :

Corollaire 8.5. *Dans $\mathbb{R}$, si $P(z) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ est un polynôme réel, alors P admet une décomposition de la forme suivante :*

$$P(x) = a_d(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2} \times \ldots \times (z-r_n)^{m_n} \times (x^2 + A_1x + B_1)^{N_1} \times \ldots \times (x^2 + A_lx + B_l)^{N_l}$$

où les $r_j, A_j, B_j \in \mathbb{R}$, les $m_j, N_j \in \mathbb{N}^*$ et (important !) où les polynômes $x^2 + A_jx + B_j$ sont sans racines réelles.

8.2. **Décomposition de fractions rationnelles.** Une fraction rationnelle est une fonction de la forme $R = P/Q$ où P et Q sont des polynômes. Ici on ne regarde que le cas où tous les coefficients sont réels. Le résultat suivant est admis !

Théorème 8.6. *Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle et supposons que*

$$Q(x) = a_d(z-r_1)^{m_1}(z-r_2)^{m_2} \times \ldots \times (z-r_n)^{m_n} \times (x^2 + A_1x + B_1)^{N_1} \times \ldots \times (x^2 + A_lx + B_l)^{N_l}$$

est la décomposition (réelle) du polynôme Q. Alors, il existe un polynôme E et des coefficients $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}\gamma_{i,j} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) &+ \frac{\alpha_{1,1}}{x-r_1} + \ldots + \frac{\alpha_{1,m_1}}{(x-r_1)^{m_1}} \\
&+ \ldots + \\
&+ \frac{\alpha_{k,1}}{x-r_k} + \ldots + \frac{\alpha_{k,m_k}}{(x-r_k)^{m_k}} \\
&+ \frac{\beta_{1,1}x + \gamma_{1,1}}{x^2 + A_1x + B_1} + \ldots + \frac{\beta_{1,N_1}x + \gamma_{1,N_1}}{(x^2 + A_1x + B_1)^{N_1}} \\
&+ \ldots + \\
&+ \frac{\beta_{l,1}x + \gamma_{l,1}}{x^2 + A_lx + B_l} + \ldots + \frac{\beta_{l,N_l}x + \gamma_{l,N_l}}{(x^2 + A_lx + B_l)^{N_l}} .
\end{aligned}$$

Dans cette décomposition, on appelle E la *partie entière* de R et les autres termes les *éléments simples*. Le point important (et donc à retenir) est que cette décomposition utilise deux types d'éléments simples :

(1) $\frac{1}{(x-r)^m}$ et

(2) $\frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + Ax + B)^N}$ où le polynôme $x \mapsto x^2 + Ax + B$ n'a pas de racines réelles.

8.3. **Intégration de fractions rationnelles.** Le but est d'intégrer une fraction rationnelle $R = P/Q$. D'après la décomposition du Théorème 8.6 et à cause de la linéarité de l'intégrale, il suffit de savoir intégrer la partie entière E et chacun des éléments simples. La partie entière est un polynôme son intégration ne pose aucun problème. Puis on a

$$\int \frac{a}{x-r}\,dx = a\ln|x-r| \qquad et$$

$$\int \frac{a}{(x-r)^j}\,dx = \frac{a}{(j-1)(x-r)^{j-1}}$$

si $j \geq 2$ (à une constante additive près).

Concernant les autres termes, rappelons tout d'abord que le dénominateur $x^2 + Ax + B$ est sans racines réelles. Autrement dit, $A^2 - 4B < 0$. On a

$$\frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + Ax + B)^j} = \frac{\frac{\beta}{2}(2x + A) - \frac{A\beta}{2} + \gamma}{(x^2 + Ax + B)^j} = \frac{\beta}{2}\frac{2x + A}{(x^2 + Ax + B)^j} + \frac{\gamma - \frac{A\beta}{2}}{(x^2 + Ax + B)^j}$$

Le premier terme est de la forme $\frac{\beta}{2}\frac{u'}{u^j}$ où $u(x) = x^2 + Ax + B$. Une primitive est donc

$$\frac{\beta}{2}\ln|x^2 + Ax + B| \qquad si \quad j = 1 \quad et$$

$$\frac{\beta}{2}\frac{1}{(j-1)u^{j-1}} = \frac{\beta}{2}\frac{-1}{(j-1)(x^2 + Ax + B)^{j-1}} \qquad si \quad j \geq 2 \ .$$

Reste à intégrer les termes de la forme

$$\frac{\gamma - \frac{A\beta}{2}}{(x^2 + Ax + B)^j} \ .$$

Comme le déterminant $A^2 - 4B < 0$, on peut faire un changement de variables pour avoir

$$\int \frac{1}{(x^2 + Ax + B)^j}dx = Const \int \frac{1}{(u^2 + 1)^j}du = Const\ I_j \ .$$

Si $j = 1$, alors $\arctan(u)$ est une primitive de $\frac{1}{u^2+1}$. Sinon on établit, par une intégration par parties, une relation entre I_j et I_{j+1}. Par exemple,

$$I_1 = \int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{u}{u^2+1} - \int u\frac{-2u}{(1+u^2)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{u^2+1-1}{(1+u^2)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2(I_1 - I_2)$$

et donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{1+u^2} + \arctan(u)\right) + c \ , \ c \in \mathbb{R} \ .$$

Partie II : Formule de Taylor et développements limités

1. Rappels : Fonctions de classe C^p et C^∞

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^p si les dérivées $f', f'', ..., f^{(p)}$ existent et si $f^{(p)}$ est une fonction continue.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et de classe C^∞ si toutes les dérivées $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, existent.

Usuellement on note $C^p(I)$, $C^\infty(I)$ l'ensemble (ou la classe) des fonctions C^p, C^∞ respectivement. L'ensemble $C^0(I)$ (souvent noté $C(I)$) est la classe des fonctions continues. On a

$$C^\infty(I) \subset C^{(p+1)} \subset C^{(p)} \quad \text{pour tout} \quad p \in \mathbb{N} . \tag{2}$$

Exemple 1.1. *Avec $I = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^7$ si $x \geq 0$ et $f(x) = x^{20}$ sinon, on vérifie facilement qu'on a ainsi une fonction de classe C^6 qui n'est pas de classe C^7. Autrement dit, $f \in C^6(\mathbb{R}) \setminus C^7(\mathbb{R})$.*

On peut produire des exemples similaires montrant que toutes les inclusions dans (2) *sont strictes.*

2. Formules de Taylor

Soit $x_0 \in I =]a, b[$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n. Pour une telle fonction on peut considérer le *n-ième polynôme de Taylor* de f en x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \qquad x \in \mathbb{R} . \tag{3}$$

C'est un polynôme de degré n. Il dépend non seulement de n mais également de f et de x_0. Ainsi on devrait le noter plutôt T_{n,f,x_0}.

L'objectif ici consiste à approcher une fonction ("compliquée") f par le polynôme ("simple" car, par exemple, facilement à évaluer par une calculatrice) T_n. Les différentes formules de Taylors concernent l'erreur

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \quad , \quad x \in I . \tag{4}$$

Théorème 2.1 (Formule de Taylor avec reste intégrale)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et soit $x_0 \in I$. Alors*

$$f(x) = T_n(x) + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \qquad \textit{pour} \quad x \in I .$$

Ce théorème donne une expression explicite du reste sous forme intégrale :

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \qquad \textit{pour} \quad x \in I$$

Une simple application de la deuxième formule de la moyenne permet en déduire la variante suivante.

Théorème 2.2 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$ il existe un $\xi \in]x_0, x[$ (ou $\xi \in]x, x_0[$) tel que*

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1} .$$

Remarque 2.3. *Ce théorème est valable sous l'hypothèse plus faible $f \in C^n$ avec $f^{(n)}$ une fonction dérivable (ce qui est équivalent avec f une fonction $n + 1$ fois dérivable).*

Exemple 2.4. *Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ qui est de classe C^∞. Avec $x_0 = 0$, on vérifie facilement que*

$$T_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + ... + \frac{1}{n!}x^n \ .$$

La formule de Taylor-Lagrange affirme que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un $\xi \in]0, x[$ (ou $\xi \in]x, 0[$) tel que

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + ... + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \ . \tag{5}$$

Utilisons ceci pour en déduire une limite bien connue : pour tout $\alpha > 0$ on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \ .$$

En effet, pour $x > 0$ on déduit de (5) que

$$e^x \geq 1 + \frac{1}{1!}x + ... + \frac{1}{n!}x^n \geq \frac{1}{n!}x^n \ .$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geq 0$ on peut choisir $n > \alpha$. Alors, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq \frac{x^\alpha}{e^x} \leq \frac{x^\alpha}{\left(\frac{x^n}{n!}\right)} = n! x^{\alpha - n}$$

et cette dernière expression tend vers 0 lorsque $x \to \infty$ puisque $\alpha - n < 0$.

Théorème 2.5 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n-fois dérivable et soit $x_0 \in I$. Alors il existe une fonction ε définie dans I avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ telle que*

$$f(x) = T_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad , \quad x \in I \ .$$

Ce résultat nous amène a la notion suivante.

Définition 2.6. *On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a un développement limité d'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ de degré n tel que*

$$f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad , \quad x \in I \ ,$$

où $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Théorème 2.7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.*

(1) *Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique.*
(2) *Si f est n-fois dérivable, alors f admet un développement limité d'ordre n en x_0 qui est donné par le polynôme de Taylor T_n (en fait $T_{n,x_0,f}$ ...).*

Exemple 2.8. *Considérons un polynôme $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d$ et ses DL à l'origine ($x_0 = 0$). Si $n \geq d$, alors*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_d x^d + x^n \varepsilon(x)$$

ou $\varepsilon \equiv 0$ est la fonction identiquement nulle. Sinon on a pour tout $j = n + k > n$

$$a_j x^j = x^n (a_j x^k) = x^n \varepsilon(x)$$

pour "une fonction ε" satisfaisante $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. *Dans ce cas on a le DL d'ordre n*

$$f(x) = a_0 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \ .$$

En résumé, on obtient le DL d'ordre n à l'origine d'un tel polynôme en "le tronquant au degré n".

3. Quelques DL en $x_0 = 0$ de fonctions usuelles.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + x^n\varepsilon(x) \ .$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \ .$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \ .$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{(2j)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \ .$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} + x^{2n}\varepsilon(x) \ .$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \ .$$

La dernière formule avec $\alpha = -1$ donne en particulier

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \ .$$

Si on remplace ici x par $-x$ on obtient

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x) \ .$$

4. Quelques techniques pour déterminer des DL

On devine comment obtenir les DL de $f+g$ ou de λf à partir des DL de f et de g. En ce qui concerne le produit, il suffit de faire le produit des DL des fonctions f et g puis retenir que des termes de degré $\leq n$. Voici un exemple d'un DL produit.

Exemple 4.1. *Soit $f(x) = sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_2(x)$. Alors*

$$f(x)g(x) = \Big(x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon_2(x)\Big) = x + x^3\Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big) + x^4\varepsilon(x)$$

ou ε est une fonction (peu importe laquelle et inutile de la déterminer) telle que $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

4.1. **DL de composées.** Soit $F = f \circ g$ la composée de deux fonctions f et g et soit $y_0 = g(x_0)$. Supposons qu'on connaît les DL à l'ordre n de f en y_0 et de g en x_0. Alors, on peut obtenir le DL de $F = f \circ g$ à l'ordre n en x_0 en composant celui de f en y_0 avec celui de g en x_0 et de tronquer le polynôme obtenu au degré n. Voici un exemple simple.

Exemple 4.2. *Soit $f(y) = \frac{1}{1+y}$ et $g(x) = x^2$. Prenons $x_0 = 0$. Alors $y_0 = g(x_0) = g(0) = 0$. La fonction g est un polynôme de degré 2, donc son DL en 0 à l'ordre $n \geq 2$ est la fonction g elle-même. Nous avons déja évoqué le DL de la fonction f plus haut. En composant,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 - (x^2) + (x^2)^2 + ... + (-1)^n(x^2)^n + (x^2)^n\varepsilon(x) \\ &= 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x) \ .\end{aligned}$$

Ceci est un DL d'ordre $2n$. Si on veut seulement celui d'ordre n, alors on peut tronquer le polynôme obtenu au degré n.

4.2. **DL d'une primitive.** Voici un outil très important. Il affirme que, sachant un DL de la dérivée d'une fonction, alors il suffit d'intéger terme à terme ce dernier pour obtenir un DL de la fonction elle-même.

Proposition 4.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et supposons que sa dérivée f' a le développement limité d'ordre $n-1$ en $x_0 \in I$ suivant :*

$$f'(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + (x - x_0)^{n-1}\varepsilon(x) .$$

Alors f a un développement limité d'ordre n en x_0 donné par

$$f(x) = f(x_0) + a_0 x + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + ... + a_{n-1}\frac{(x - x_0)^n}{n} + (x - x_0)^n\varepsilon(x) .$$

Exemple 4.4. *Considérons la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in I =]-1, \infty[$. Alors*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) .$$

D'où, en appliquant la proposition ci-dessus,

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

Exemple 4.5. *Soit $f(x) = \arctan(x)$. La dérivée de cette fonction est $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Or, nous avons déja déterminé le DL de cette derivée (cf. l'Exemple 4.2). Il suffit alors d'intéger terme à terme ce DL pour obtenir*

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}\varepsilon(x) .$$

De manière analogue on peut obtenir facilement les DL d'autres fonctions trigonométriques inverses.

4.3. **DL à l'infini.** Pour étudier le graphe d'une fonction ou le comportement d'une courbe à l'infini on est souvent amené à faire des DL avec "$x_0 = \infty$". Pour ce faire on fait au préalable un changement de variables $t = 1/x$ puis on fait un DL à l'origine.

Exemple 4.6. *Considérons la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1 + 6/x - 5/x^3}$. Bien évidemment, lorsque $x \to \infty$, alors cette fonction converge vers 1. Mais comment précisément ?*

Soit $t = 1/x$ et $g(t) = f(x) = \sqrt[3]{1 + 6t - 5t^3}$. On remarque qu'il s'agit de la composée de la fonction $t \mapsto 6t - 5t^3$ avec $u \mapsto (1 + u)^\alpha$ où $\alpha = 1/3$. Le DL de cette dernière est dans la liste des DL de fonctions usuelles. On peut alors déterminer le DL de g à l'ordre 2 à l'origine :

$$g(t) = 1 + \frac{1}{3}(6t - 5t^3) + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2!}(6t - 5t^3)^2 + t^2\varepsilon(t) = 1 + 2t - 4t^2 + t^2\varepsilon(t) .$$

Si $F(z) = \sqrt[3]{z^3 + 6z^2 - 5}$, alors

$$\lim_{z\to\infty} \frac{F(z)}{z} = 1$$

et

$$\lim_{z\to\infty} F(z) - z = \lim_{z\to\infty} z\Big(2/z - 4/z^2 + 1/z^2\varepsilon(1/z)\Big) = 2 .$$

Par conséquent, la droite $y = x + 2$ est asymptote de F et on a en plus la position du graphe de F par rapport à cette droite...

Partie III : Courbes paramétrées

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou l'union d'intervalles) et soient $x, y : I \to \mathbb{R}$ des fonctions numériques. On définit une fonction γ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, i.e. une *fonction vectorielle*, par

$$\gamma(t) := (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 .$$

Définition 0.7. *Un ensemble $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est appelé courbe paramétrée s'il existe une application vectorielle $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ dont l'image est Γ :*

$$\Gamma = \{\gamma(t) \; ; \; t \in I\} \, .$$

Dans ce cas, l'application γ est appelée un paramétrage de la courbe Γ.

Une courbe peut possèder plusieur types de points particuliers. Par exemple, $M \in \Gamma$ est une *point multiple* s'il existent $t_1, t_2 \in I$ des points distincts tels que $M = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Si $t \in I$ est tel que $x'(t) = y'(t) = 0$, alors on dit que $M = \gamma(t)$ est un *point stationnaire* (sinon il est dit regulier).

Cette dernière définition nécessite bien évidemment que les fonctions x et y sont dérivable. Dans ce cas on écrit $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. Si x, y ont une dérivée d'ordre k, alors on note $\gamma^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t))$. Si à la fois x et y on un DL d'ordre n en t_0 on peut considérer le DL ("vectoriel") de γ. Par exemple, si $x, y \in C^n(I)$, alors

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\gamma^{(n)}(t_0) + (t-t_0)^n \varepsilon(t)$$

avec ε un fonction vectorielle telle que $\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = (0, 0)$.

Définition 0.8. *Soit $M = \gamma(t_0)$ un point régulier de la courbe $\Gamma = \gamma(I)$ (i.e. le paramétrage γ est dérivable en t_0 avec une dérivée non nulle). La tangente à Γ au point M est la droite passant par M et de vecteur directeur $\gamma'(t_0)$.*

1. Étude locale d'une courbe

Soit Γ une courbe paramétrée,γ un paramétrage de Γ et $M = \gamma(t_0)$ un point de cette courbe. On s'interesse au comportement de Γ près d'un tel point M. Si M est un point régulier (et pas un point double), alors Γ suit la tangente en ce point. Mais déja dans ce cas il existent deux possibilités : Γ traverse la tangente en M ou bien Γ reste d'un côté. La définition suivante tient compte des différentes possibilités.

Définition 1.1. *Soit $\gamma = (x, y)$ un paramétrage C^∞ d'une courbe Γ et supposons que γ possède le DL suivant en t_0 :*

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\gamma^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\gamma^{(q)} + (t-t_0)^q \varepsilon(t)$$

où $p < q$ sont tels que

$p \geq 1$ est le plus petit entier tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq (0, 0)$ et

$q > p$ est le plus petit entier tel que les vecteurs $v_1 = \gamma^{(p)}(t_0)$ et $v_2 = \gamma^{(q)}(t_0)$ ne sont pas colinéaires. Alors :

1. *Si p est impair et q est pair, on dit que $\gamma(t_0)$ est un point ordinaire.*
2. *Si p est impair et q aussi, on dit que $\gamma(t_0)$ est un point d'inflexion.*
3. *Si p est pair et q impair, on dit que $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement de première espèce.*
4. *Si p est pair et q également, on dit que $\gamma(t_0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce.*

2. Courbes rectifiables et longueur d'une courbe

Soit $\Gamma = \gamma(I)$ une courbe paramétrée. On note par $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ une subdivision de l'intervalle I. Si (u, v) est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note par $\|(u, v)\| = \sqrt{u^2 + v^2}$ la norme euclidienne de ce vecteur.

Définition 2.1. *La longueur de la courbe Γ est définie par*

$$l(\Gamma) = \sup_{\mathcal{T}} \sum_{j=1}^{n} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| \, .$$

Si $l(\Gamma) < \infty$, alors on dit que la courbe Γ est rectifiable.

Proposition 2.2. *Si $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, alors $\Gamma = \gamma(I)$ est une courbe rectifiable et on a*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \ .$$

(admis)

Exemple 2.3. *Considérons le graphe $\Gamma = \{(t, f(t))\ ,\ t \in I\}$ d'une fonction $f \in C^1(I)$, $I = [a,b]$. Alors le paramétrage $t \mapsto \gamma(t) = (t, f(t))$ est bien C^1 et on a*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|(1, f'(t))\|dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt \ .$$

Le lecteur motivé pourra considérer le cas explicit $f(x) = x^2/2$ et $I = [0,T]$.

Partie IV : Équations différentielles

Exemple 0.4. *Exemple d'un parachutiste tombant à la verticale : On suppose, pour simplifier le problème, que son parachute lui fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse ; et à un instant $t = 0$ il ouvre son parachute alors qu'il avait une vitesse $v(0)$. On peut alors montrer en mécanique que la vitesse v vérifie : $\frac{dv}{dt} = g - av(t)$ où g (l'accélération de la pesanteur) et a (coefficient de frottement) sont des constantes.*

Définition 0.5. *Une équation différentielle est une équation*
- *dont l'inconnue est une fonction ;*
- *dans laquelle apparaît certaines des dérivées de la fonction.*

On dit qu'une équation différentielle est d'ordre n si $y^{(n)}$ intervient effectivement dans l'équation mais pas les $y^{(k)}$ avec $k \geq n+1$.

Exemple 0.6. *L'équation dans l'exemple 0.4 est une équation différentielle du premier ordre.*
L'équation $y(x)^3 + (x-2)y(x) = e^x$ n'est pas une équation différentielle.

On écrira y pour $y(x)$, y' pour $y'(x)$, etc. Par exemple

$$y'' + x(y')^3 + y^4 = e^x \ .$$

Cette équation différentielle est d'ordre 2. L'équation différentielle

$$y^{(4)} + (\sin x)y^5 = e^x$$

est d'ordre 4.

1. Equations différentielles du premier ordre de type $y' = f(x,y)$

1.1. **Généralités.** On considère des équations du type : $\quad y' = f(x,y) \qquad (E)$
ou une équation avec condition initiale :

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (E_0)$$

où f est une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in U$.

Définition 1.1. *On dit qu'une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est une solution de (E) si*
(i) $\forall x \in I, \quad (x, \phi(x)) \in U$.
(ii) $\forall x \in I, \quad \phi'(x) = f(x, \phi(x))$.
Résoudre ou intégrer (E), revient à trouver les solutions de (E).
On dit que ϕ est une solution de (E_0) si de plus $y(x_0) = y_0$.

Remarque 1.2. *Si $\phi : I \to \mathbb{R}$ est une solution de (E) ou de (E_0) et J est un intervalle ouvert contenu dans I, alors la restriction de ϕ à J, $\phi|_J : J \to \mathbb{R}$ est une solution de (E).*

Définition 1.3.

– *Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ une solution de (E) ou (E_0). On dit que ϕ est une solution maximale de (E) ou de (E_0), si ϕ n'est la restriction d'aucune autre solution de (E) (c'est-à-dire que ϕ ne se prolonge pas en une solution de (E) sur un intervalle plus grand que I).*
– *Les graphes des solutions de (E) (resp. des solutions maximales de (E)) s'appellent les courbes intégrales (resp. les courbes intégrales maximales).*

Exemple 1.4. *Les solutions de $y' = f(x)$ sont les primitives de f. Résoudre ou intégrer cette équation revient à trouver les primitives de f. Par exemple pour*

$$y' = 2x \ ,$$

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\phi(x) = x^2 + C$ est une solution maximale.

Exemple 1.5. *Pour $y' = f(x) = \frac{1}{x}$, où f est définie sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. On obtient une solution maximale $\phi_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ avec $\phi_1(x) = \ln x + C_1$;*
et une autre solution maximale $\phi_2 :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ avec $\phi_2(x) = \ln|x| + C_2$.
Une solution maximale de $y' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 2$ est $\phi_1(x) = \ln x + 2$ définie sur $I =]0, +\infty[$.
Une solution maximale de $y' = \frac{1}{x}$, $y(-1) = 3$ est $\phi_2(x) = \ln|x| + 3$ définie sur $]-\infty, 0[$.

Définition 1.6. *On considère une équation différentielle du type*

$$y' = f(x, y) \qquad (E).$$

On dit qu'une solution ϕ de (E) est une solution générale si ϕ dépend d'un paramètre. Sinon on dit que ϕ est une solution particulière.

Interprétation géométrique : Les segments de centre $(x, y) \in U$ et de pente $f(x, y)$ définissent un champ de directions.

Pour qu'une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}$ soit solution de (E) il faut et il suffit qu'en tout point $M(x, \phi(x))$ du graphe Γ_ϕ de ϕ, la tangente à Γ_ϕ en M ait pour pente $f(x, \phi(x))$.

1.2. **Equations différentielles à variables séparées.**

Définition 1.7. *Une équation différentielle à variables séparées est une équation du type :*

$$y' = g(x)/f(y) \qquad \text{ou} \qquad f(y)y' = g(x) \qquad (E)$$

où $f : I \to \mathbb{R}$ (resp. $g : J \to \mathbb{R}$) est une fonction qu'on suppose continue sur un intervalle I (resp. J).

Théorème 1.8. *Soit F (resp. G) une primitive de f (resp. de g). Pour qu'une fonction y définie et dérivable sur un intervalle W contenu dans J soit solution de (E) il faut et il suffit qu'il existe un réel c tel que : $F(y(x)) = G(x) + c$, pour tout $x \in W$.*

Remarque 1.9. *Résoudre (E) revient à trouver les fonctions y dérivables telles que : $\int f(y)dy = \int g(x)dx$. L'équation (E) s'écrit aussi : $f(y)dy = g(x)dx$.*

Exemple 1.10. *$a - y'y = 0. \Leftrightarrow yy' = a \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = ax + C$.*

1.3. **Equations différentielles linéaires du premier ordre.**

Définition 1.11. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :*

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Dans la suite on supposera que a et b sont des fonctions continues sur I.

L'équation :

$$y' = a(x)y \qquad (E_h)$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).

A. Solution de l'équation homogène. Tout d'abord on remarquera que l'équation homogène est un cas particulier d'une équation à variables séparées.

La fonction a étant supposée continue elle possède une primitive. Dans la suite on notera A une telle primitive, i.e.

$$A(x) = \int a(x)\,dx \quad \text{et} \quad A'(x) = a(x) \ .$$

Théorème 1.12. *Les solutions maximales de* (E_h) *sur* I *sont données par :*

$$y(x) = \lambda e^{A(x)} = \lambda e^{\int a(x)\,dx} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \,.$$

Démonstration. $y(x) = 0\ \forall x \in I$ est une solution.

Si $y(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in I$, alors d'après l'unicité, on aura $y(x) = 0\ \forall x \in I$.

On suppose maintenant que $y(x) \neq 0\ \forall x \in I$. Alors on a $\frac{y'}{y} = a(x)$ donc

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x) \Leftrightarrow \ln|y| = A(x) + C \Leftrightarrow y = \pm e^{A(x)} e^{C} = \lambda e^{A(x)}, \text{ où } \lambda = \pm e^{C} \neq 0.$$

Finalement la solution générale est $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Théorème 1.13. *L'ensemble des solutions de* (E_h) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* 1*, avec une base :* $\{e^{A(x)}\}$.

B. Solution de l'équation non homogène : méthode de la variation des constantes

Soit $y(x) = \lambda e^{A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ la solution générale de (E_h). On cherche une solution particulière de (E) sous le forme

$$y_0(x) = \lambda(x) e^{A(x)}$$

où $x \to \lambda(x)$ est une fonction à déterminer. On a $y_0'(x) = \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)e^{A(x)}a(x)$. En remplaçant dans (E) :

$$\lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)\lambda(x)e^{A(x)} + b(x) \,.$$

D'où $\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}$. On obtient $\lambda(x)$ en intégrant.

Théorème 1.14. *Les solutions de* (E) *s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de* (E) *les solutions de* (E_h)*. C'est-à-dire que si* y_0 *est une solution de* (E)*, alors les solutions de* (E) *sont les fonctions* $y : I \to \mathbb{R}$*, définie par :* $y(x) = y_0(x) + \lambda e^{\int a(x)dx}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit y une solution de (E). Alors $y - y_0$ est une solution de (E_h). □

Exemple 1.15. *Exemple 0.4 de l'introduction.*

$\frac{dv}{dt} = g - av(t)$ où g (l'accélération de la pesanteur) et a (coefficient de frottement) sont des constantes.

Solution générale de l'équation homogène : $v' = -av$: $v(t) = \lambda e^{-at}$.

Solution générale de l'équation non homogène : On cherche une solution particulière, $v_p(t) = \lambda(t)e^{-at}$. On a $\lambda'(t) = ge^{at}$ donc $\lambda(t) = \frac{g}{a}e^{at}$.

Donc la solution générale de l'équation non homogène est $v(t) = \frac{g}{a} + Ce^{-at}$, où C est une constante quelconque.

En ce qui concerne le problème de résoudre une telle équation avec conditions initiales on déduit des résultats précédents le théorème suivant.

Théorème 1.16. *Soit* $y' = a(x)y + b(x)$ *une équation différentielle linéaire. Si* a *et* b *sont continues sur un intervalle ouvert* I*, alors pour tout* $x_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$*, il existe une et une seule solution* ϕ *telle que* $\phi(x_0) = y_0$.

2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{E}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I.

L'équation :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_h}$$

est appelée l'équation homogène associée à (E).

Théorème 2.1. *L'ensemble des solutions de l'équation* (E_h) *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de dimension* 2*.*

(admis)

2.1. **Equation caractéristique et solutions de l'équation homogène** (E_h)**.** On cherche une solution de (E_h) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où r est une constante à déterminer.

$$ay'' + by' + cy = (ar^2 + br + v)e^{rx} = 0 \qquad SSI \qquad ar^2 + br + c = 0$$

Définition 2.2. *L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (E_h).*

On distingue plusieurs cas :

Cas 1. L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2. On obtient ainsi deux solutions $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ qui sont linéairement indépendantes car $r_1 \neq r_2$.

Cas 2. L'équation caractéristique a une racine réelle double r_0. On obtient ainsi une solution $y_1 = e^{r_0 x}$. On vérifie que $y_2 = xe^{r_0 x}$ est aussi une solution : $ay_2'' + by_2' + cy_2 = (2ar_0 + ar_0^2 x)e^{r_0 x} + (b + br_0 x)e^{r_0 x} + cxe^{r_0 x}(2ar_0 + b)e^{r_0 x} = 0$ car $2ar_0 + b = 0 = P'(r_0) = 0$. Ces deux solutions sont linéairement indépendantes.

Cas 3. L'équation caractéristique a deux racines complexes conjuquées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$. On obtient deux solutions complexes $Y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, Y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$. Comme les parties réelles et imaginaires sont des solutions réelles, on obtient deux solutions réelles $y_1 = e^{\alpha x}\sin(\beta x), y_2 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, qui sont linéairement indépendantes.

En résumé :

Théorème 2.3. *Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_h).*

(i) *On suppose que $\Delta > 0$. Soit r_1 et r_2 les racines réelles distinctes de l'équation caractéristique. Alors, une base de l'espace de solutions de (E_h) est $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$.*
La solutions générale de (E_h) est définie sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) *On suppose que $\Delta = 0$. Soit r_0 la racine réelle double de l'équation caractéristique. Alors, une base de l'espace de solutions de (E_h) est $\{e^{r_0 x}, xe^{r_0 x}\}$.*
La solutions générale de (E_h) est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{r_0 x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) *On suppose que $\Delta < 0$. Soit $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$ les racines complexes de l'équation caractéristique. Alors, une base de l'espace de solutions de (E_h) est $\{e^{\alpha x}\sin(\beta x), e^{\alpha x}\cos(\beta x)\}$.*
La solutions générale de (E_h) est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda_1 \sin(\beta x) + \lambda_2 \cos(\beta x)), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2.2. **Solutions de l'équation non homogène** (E)**.**

Théorème 2.4. *Les solutions générales de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions générales de (E_h). C'est-à-dire que si y_p est une solution de (E) et y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ de (E_h), alors les solutions de (E) sont définies par : $y(x) = y_p(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*

Recherche d'une solution particulière de (E).

Cas particuliers.

Cas 1. On suppose que $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, où $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) α n'est pas une racine de l'équation caractéristique.
On cherche une solution particulière de (E) de la forme $Y(x) = Q(x)e^{\alpha x}$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $\leq n$.

(ii) α est une racine d'ordre s de l'équation caractéristique.
On cherche une solution particulière de (E) de la forme $Y(x) = x^s Q(x)e^{\alpha x}$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$.

Cas 2. On suppose que $g(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$, où $P_n, Q_m \in \mathbb{R}[X]$ de degrés n et m respectivement et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$.

(i) $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
On cherche une solution particulière de (E) de la forme :
$Y(x) = e^{\alpha x}(T(x)\cos(\beta x) + R(x)\sin(\beta x))$, où $T, R \in \mathbb{R}[X]$ sont de degrés $\leq \max(n, m)$.

(ii) $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique (forcément c'est une racine simple).
On cherche une solution particulière de (E) de la forme :
$Y(x) = xe^{\alpha x}(T(x)\cos(\beta x) + R(x)\sin(\beta x))$, où $T, R \in \mathbb{R}[X]$ de degrés $\leq \max(n, m)$.

Méthode générale : Méthode de la variation des constantes.

Soit $y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ la solution générale de (E_h).

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme : $Y(x) = \lambda_1(x)y_1(x) + \lambda_2(x)y_2(x)$, où les fonctions $x \to \lambda_1(x)$ et $x \to \lambda_2(x)$ sont à déterminer.

En remplaçant Y dans l'équation non homogène on obtient
$a(\lambda_1''y_1+2\lambda_1'y_1'+\lambda_1y_1''+\lambda_2''y_2+2\lambda_2'y_2'+\lambda_2y_2'')+b(\lambda_1'y_1+\lambda_1y_1'+\lambda_2'y_2+\lambda_2y_2')+c(\lambda_1y_1+\lambda_2y_2) = g(x)$
ou
$\lambda_1(ay_1''+by_1'+cy_1)+\lambda_2(ay_2''+by_2'+cy_2)+a(\lambda_1''y_1+\lambda_2''y_2)+2a(\lambda_1'y_1'+\lambda_2'y_2')+b(\lambda_1'y_1+\lambda_2'y_2) = g(x)$.
Donc
$$a(\lambda_1''y_1 + \lambda_2''y_2) + 2a(\lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2') + b(\lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2) = g(x). \qquad (*)$$

Pour déterminer des fonctions λ_1 et λ_2, on peut imposer l'équation :
$$\lambda_1'(x)y_1(x) + \lambda_2'(x)y_2(x) = 0. \qquad (**)$$

On a donc en dérivant : $\lambda_1''y_1 + \lambda_1'y_1' + \lambda_2''y_2 + \lambda_2'y_2' = 0$ ou $\lambda_1''y_1 + \lambda_2''y_2 = -(\lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2')$.

Les équations (*) et (**) deviennent alors
$$\lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2' = \tfrac{g(x)}{a}, \qquad \lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2 = 0.$$

On obtient
$$\lambda_1' = \tfrac{g(x)y_2}{aW}, \qquad \lambda_2' = -\tfrac{g(x)y_1}{aW}, \qquad \text{où } W = y_1'y_2 - y_1y_2' \neq 0 \text{ pour tout } x.$$

En intégrant, on obtient $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$, puis $Y(x)$.

Lemme 2.5. *Soit y_1, y_2 une base de solutions de (E_h) et $W = y_1'y_2 - y_1y_2'$. Alors $W(x) \neq 0$ pour tout x.*

On appelle W le wronskien de y_1, y_2.

Démonstration. En calculant W', on obtient
$$W' = y_1''y_2 + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1y_2'' = -(\tfrac{b}{a}y_1' + \tfrac{c}{a}y_1)y_2 + y_1(\tfrac{b}{a}y_2' + \tfrac{c}{a}y_2) = -\tfrac{b}{a}W.$$

Alors on a $W(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$. Si $W(x_0) = 0$ alors $W \equiv 0$. Donc $(\frac{y_1}{y_2})' = 0$, c'est-à-dire que $y_1 = cy_2$. Or y_1, y_2 sont linéairement indépendants. Absurde. $\square$