UNIVERSITE MOHAMMED V
FACULTE DES SCIENCES-RABAT

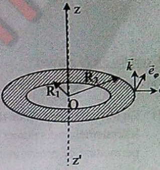
Année universitaire 2014-2015
Filière SMPC / Semestre S2

Evaluation du module Electrostatique-Electrocinétique
24 juin 2015 (Durée : 1h30')

Exercice 1. (7 points)

On considère une couronne circulaire (C) plane limitée par deux cercles de centre O et de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), portant une distribution de charges surfaciques de densité uniforme $\sigma > 0$. L'axe z'Oz est perpendiculaire en O au plan de la couronne (figure ci-contre).

On utilisera le système de coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.



1) Analyser les symétries et les invariances de la distribution de charges et en déduire la direction du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M quelconque de l'axe z'Oz. On notera OM = z.

   Préciser les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$.

2) Exprimer le champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}(M)$ créé en M par un élément de surface ds de la couronne (faire un dessin).

3) Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé au point M par la couronne (C).

4) En déduire le champ $\vec{E}_d(M)$ créé en tout point M de l'axe z'Oz par un disque de rayon R uniformément chargé avec une densité $\sigma > 0$. Exprimer $\vec{E}_d(M)$ dans les cas limites ($z \gg R$ et $z \ll R$).

   Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 2 : (8 points)

1) Rappeler les propriétés générales d'un conducteur en équilibre électrostatique.

2) Une sphère conductrice (S_1) isolée, de centre O_1 et de rayon R_1 porte une charge $Q_1 = Q > 0$ (figure a).

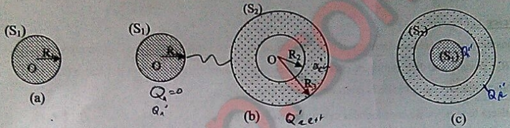
   a) Calculer la densité surfacique de charge σ_1 de (S_1). Enoncer le théorème de Coulomb et exprimer le champ électrostatique $\vec{E}_1$ au voisinage de la surface de (S_1).

   b) Calculer le potentiel V_1 de (S_1) et en déduire sa capacité C et son énergie électrostatique W_e.

3) Une seconde sphère conductrice (S_2) creuse, de rayon intérieur $R_2 > R_1$ et de rayon extérieur $R_3 = 2R_1$ porte une charge $Q_2 = 2Q > 0$ est placée à une distance ***d*** de (S_1), suffisamment éloignée pour que l'on puisse négliger les phénomènes d'influence. Les deux sphères sont reliées par un fil conducteur de capacité négligeable (figure b). On note Q'_1 et Q'_2 les charges portées respectivement par (S_1) et (S_2) à l'équilibre. Comment se répartissent les charges sur les surfaces intérieur et extérieur de (S_2) ? Justifier votre réponse. Calculer en fonction de Q les charges Q'_1 et Q'_2.

exosup.com

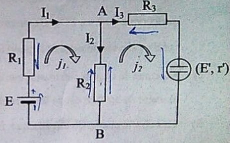
4) On coupe la liaison entre (S_1) et (S_2) qui portent respectivement les charges Q'_1 et Q'_2 (calculées à la question précédente) et on place la sphère (S_1) à l'intérieur de (S_2) (figure c). On note Q''_1, Q''_2 *et* Q''_3 les charges respectives de S_1, S_{2int} et S_{2ext}. Donner en justifiant la nouvelle répartition des charges sur les surfaces de S_1 et S_2 et calculer les potentiels V'_1 de S_1 et V'_2 de S_2.



exosup.com

Exercice 3 : (*5 points*)

On considère le circuit de la figure ci-contre.



1) En utilisant la méthode des courants de maille, écrire littéralement puis numériquement les équations permettant de déterminer les courants de maille j_1 et j_2.

2) Calculer les valeurs de j_1 et j_2 et en déduire les intensités des courants réels I_1, I_2 et I_3. Conclure sur les sens des courants.

3) En appliquant le théorème de Thévenin, retrouver l'intensité du courant I_3 circulant dans le récepteur (E', r').

On donne : $E = 120\ V$, $E' = 20\ V$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 25\Omega$, $r' = 5\ \Omega$

* * * * * *

$I_1 = J_1 + I_2$

$J_2 = I_3 - I_2$

J_1

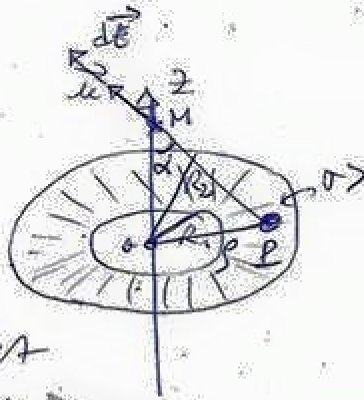
1

2

5

4

Examen 2015
Electricité
S'MPC



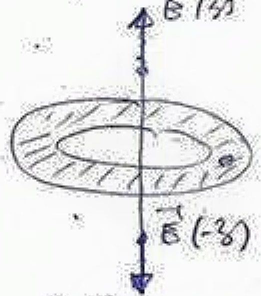
Exercice I

1. + Symétrie : L'axe (O,Z) est un axe de sym de la distribution de charge
donc $\vec{E}(M) = E\,\vec{e_z}$
+ Invariance : La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe (O,Z), elle est variante par translation suivant l'axe (O,Z).
donc $E = E(z)$
Ainsi $\vec{E} = E(z)\,\vec{e_z}$

2. Le champ élémentaire $d\vec{E}(M)$
$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u} \quad \text{avec } r = PM \text{ (voir la figure)}$$
$$= \frac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$$

3. Calcule du champ $\vec{E}(M)$:
on a $dS = r\,dr\,d\theta = \rho\, d\rho\, d\varphi$ $(r=\rho$ et $\theta = \varphi)$
$$d\vec{E}(M) = \frac{\sigma\,\rho\, d\rho\, d\varphi}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}.$$
on a $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e_z}$ donc $dE = d\vec{E}(M)\cdot\vec{e_z}$
du coup $dE = \dfrac{\sigma\,\rho\, d\rho\, d\varphi}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}\cdot\vec{e_z} = \dfrac{\sigma\rho\, d\rho\, d\varphi\cos(\alpha)}{4\pi\varepsilon r^2}$
on a d'après la figure : $r^2 = \rho^2 + z^2$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{z}{r}$
$$\text{donc} \quad dE = \frac{\sigma\,\rho\, d\rho\, d\varphi}{4\pi\varepsilon(\rho^2+z^2)^{3/2}}z$$
$$\text{d'où} \quad E(z) = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right]_{R_1}^{R_2} 2\pi$$
$$\text{Ainsi} \quad \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\vec{e_z} \quad (z>0)$$

26,Avenue Omar Ben El khattab Agdal Rabat
Tel. :0537776768-GSM :0674274216



De plus, on remarque que :

$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$.

Conclusion :

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\vec{e}_z , & z>0 \\ -\dfrac{\sigma(-z)}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\vec{e}_z , & z<0 \end{cases}$$

Du coup :

$$\forall z \quad \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2+z^2}}\right)\vec{e}_z$$

4/ $\vec{E}_d(M) = \vec{E}(R_1 \to 0)$ $\quad R_2 = R$

$$\vec{E}_d(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{e}_z$$

+ Lorsque $z \gg R$ on a $R^2+z^2 \simeq z^2$

donc $\vec{E}_d(M) = \vec{0}$ (car $\vec{E}_d(z \gg R) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{|z|}\right)\vec{e}_z = \vec{0}$)

+ Lorsque $z \ll R$ on a $R^2+z^2 \simeq R^2 \to \infty$

donc $\vec{E}_d(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z$

+ Interprétation :

+ $\vec{E}(z \gg R) = \vec{0}$: la distribution de charge n'a pas d'influence lorsque $z \gg R$.

+ $\vec{E}(z \ll R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z$: la distribution de charge est équivalente à une nappe infinie lorsque $z \ll R$.

ALHAMBRA

26,Avenue Omar Ben El khattab Agdal Rabat
Tel. :0537776768-GSM :0674274216

Exercice 2 :

1/ Propriétés générales d'un conducteur en équilibre électrostatique :

+ $\vec{F} = \vec{0}$
+ $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
+ $V = cte$ donc les charges responsables à la conduction se localisent au niveau de la surface du conducteur.

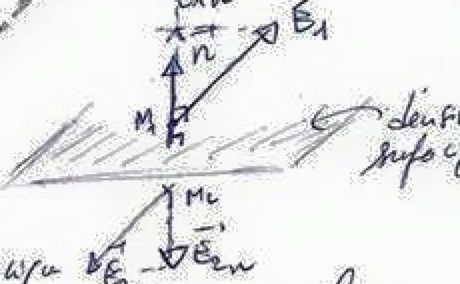
2/ a/ + on a $Q_1 = Q = \sigma S = \sigma 4\pi R_1^2$

donc $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R_1^2}$

+ théorème de Coulomb :

$\vec{E}(R_1^+) - \vec{E}(R_1^-) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_r}$

donc $\vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_r}$



Rapp du th. de Coulomb :

Le champ électrostatique créé par une distribution de charge surfacique est discontinu et cette discontinuité réside dans la composante normale du champ $\vec{E}$.

th. de Coulomb : $\vec{E}_{1n} - \vec{E}_{2n} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ (voir figure)

avec $\vec{n}$ est la normale à la surface contenant la distribution.

b/ + Potentiel V_1 : $V_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

+ Capacité : $C = \dfrac{Q_1}{V_1} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$

+ énergie électrostatique : $W_e = \dfrac{1}{2C}Q^2 = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}$

ALHAMBRA

3/ + Puisque la sphère conductrice liée à un autre conducteur par un fil conducteur, Alors la surface interne de S_2 contient $Q_{int} = 0$.

+ Calcul de Q'_1 et Q'_2 :

On a $Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 3Q$.

de plus (S_1) et (S_2) ont le m̂ potentiel.

donc $\dfrac{Q'_1}{4\pi\varepsilon R_1} = \dfrac{Q'_2}{4\pi\varepsilon R_2} \iff \dfrac{Q'_1}{R_1} = \dfrac{Q'_2}{R_2}$

d'où $Q'_1 + \dfrac{R_2}{R_1} Q'_1 = 3Q$

donc $\boxed{Q'_1 = \dfrac{3QR_1}{R_1+R_2}}$ et $\boxed{Q'_2 = \dfrac{3QR_2}{R_1+R_2}}$

4/ + on a S'_1 et S'_2 sont en influence totale donc

$Q''_2 = -Q'_1 = -\dfrac{3QR_1}{R_1+R_2}$ ($Q''_1 = Q'_1$ car S_1 est isolé)

+ de plus S_2 est isolé donc sa charge totale se conserve et par suite $Q''_3 = Q'_2 + Q'_1 = 3Q$

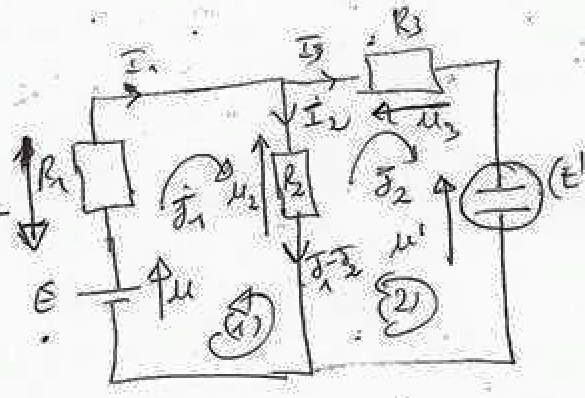
+ calcul des potentiels : V'_1 et V'_2.

on a $V'_1 = \dfrac{Q''_1}{4\pi\varepsilon R_1} + \dfrac{Q''_2}{4\pi\varepsilon R_2} + \dfrac{Q''_3}{4\pi\varepsilon R_3} = \dfrac{3Q}{4\pi\varepsilon(R_1+R_2)} - \dfrac{3QR_1}{4\pi\varepsilon R_2(R_1+R_2)} + \ldots$

$$V'_1 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_2(R_1+R_2)} + \frac{1}{R_3}\right).$$

on a $V'_2 = \dfrac{Q''_2}{4\pi\varepsilon R_2} + \dfrac{Q''_3}{4\pi\varepsilon R_3} = \dfrac{3Q}{4\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R_3} - \dfrac{R_1}{R_2(R_1+R_2)}\right)$

Exercice 3



1) Méthode des courants des mailles.

On a d'après le montage :

$$\begin{cases} J_1 = I_1 \\ J_2 = I_3 \\ I_2 = J_1 - J_2 \end{cases}$$

D'après la loi des mailles :

maille (1) : $u_2 + u_1 - u = 0$

$u_2 + u_1 - E = 0$

$\Rightarrow R_2(J_1 - J_2) + R_1 J_1 = E$

$\Rightarrow \boxed{(R_2 + R_1) J_1 - R_2 J_2 = E}$ (1)

maille (2) : $u' + u_3 - u_2 = 0$

$\Rightarrow E' + r'(J_2) + R_3 J_2 - R_2(J_1 - J_2) = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_2 J_1 + (-R_2 - R_3 - r') J_2 = E'}$ (2)

Equations numériques : $E = 120V$ $E' = 20V$ $R_1 = 20\Omega$ $R_2 = 20\Omega$ $R_3 = 25\Omega$ $r' = 5\Omega$

$$\begin{cases} 40 J_1 - 20 J_2 = 120 \\ 20 J_1 - 50 J_2 = 20 \end{cases}$$

2) Calcul de J_1 et J_2 : $J_1 = 3,5 A$ $J_2 = 1 A$

D'où
$$\begin{cases} I_1 = 3,5 A \\ I_2 = 2,5 A \\ I_3 = 1 A \end{cases}$$

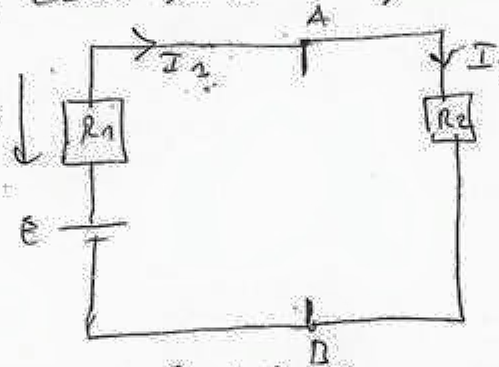
On remarque que les courants sont positifs donc ils gardent le même sens dans le circuit.

Alhambra
ACADEMIA

3) Théorème de thévenin :

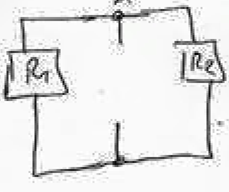
On déconnecte la branche contenant le courant

On a donc le schéma suivant :



Etape 1 : Calcul de R_{th}

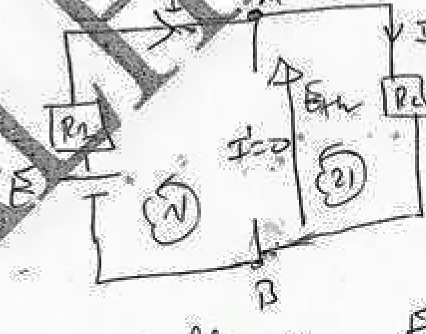
On court-circuite tous les générateurs.



donc $R_{th} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

A.N $\boxed{R_{th} = 10\Omega}$

Etape 2 : Calcul de E_{th} (On remplace la branche éliminé par un interrup ouvert donc le courant y circulant est nulle)

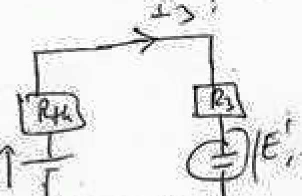


→ Loi des mailles : maille (2) $E_{th} = R_2 I$

Loi de Pouillet $I = \frac{E}{R_1 + R_2}$. AN $I = 3A$

Calcul de E_{th} : $\boxed{E_{th} = 60\ V}$

→ Etape 3 : le circuit équivalent est :



Pouillet : $I_3 = \frac{E_{th} - E'}{R_{th} + R_3 + r'} = \frac{60 - 20}{10 + 25 + 5} = 1A$

ALHAMBRA