# Contrôles corrigées 2

## Tome 2

Electricité, optique, chimie
analyse et Algèbre

Filière : SMP SMC

Semmestre 2

Contrôle N° :2

Année Universitaire 2011/2012

www.rapideway.org/vb

بسم الله الرحمن الرحيم

نضع بين أيديكم هذا الكتيب في جزئه الثالث و الذي يضم مجموعة من امتحانات للسنوات السابقة مصحوبة بنماذج حلول لبرنامج السنة الأولى لشعب الفيزياء و الكيمياء و الرياضيات ولقد تم إعداد هذا العمل المتواضع من اجل إحاطة الطلبة علما بطريقة وضع الامتحانات و أخد فكرة مسبقة عن نوعية الأسئلة . و المطلوب من الطالب قبل الشروع في حل الامتحانات مراجعة الدروس و تمارين الأعمال الموجهة جيدا لاستعاب المفاهيم و ليسهل اختبار قدرات الطالب .

و في الختام نشكر كل الطلبة الدين ساهموا من قريب أو بعيد في هذا الانجاز المتواضع و إن شاء الله يكون وسيلة ايجابية لتحصيل العلمي و لتحسين التعليمي لطلبة .



للاستفسار

info@rapideway.com

rapideway@gmail.com

# Contrôle 1 Algèbre2 : 2004/2005

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les valeurs propres de $A$ et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

## Exercice II :

Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs propres de $A_m$ et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que $A_m$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_mP$ soit diagonale.
3) Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4) Soient les suites réelles $(x_n)$ , $(y_n)$ et $(z_n)$ définies par les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $x_0 = 1$ , $y_0 = 1$ et $z_0 = -1$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $U_n = (A_{-2})^n \, U_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire $x_n$ , $y_n$ et $z_n$ en fonction de $n$.

## Exercice III :

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \; : \; \deg P \leq 2\}$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2)$.

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f(P) = P' + P \qquad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

où $P'$ est le polynôme dérivé de $P$.

1) Déterminer la matrice de $f$ relativement à la base $B$.
2) $f$ est il diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ? Justifier votre réponse.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice I :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1°) - Les valeurs propre de A.

On a $\det(A - XI_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2-X & 1 & -1 \\ -4 & 2-X & -2 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -X & 0 & -X \\ -4 & 2-X & -2 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix}$

$$\det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -X \\ -2 & 2-X & -2 \\ 1+X & -1 & 1-X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -2 & 2-X \\ 1+X & -1 \end{vmatrix} = -X\left(2-(1+X)(2-X)\right)$$

$$= -X\left(2-2+X^2-X\right) = -X\left(X(X-1)\right) = X^2(1-X)$$

$P_A(X) = X^2(1-X)$ donc 0 est une valeur propre double et 1 une valeur propre simple.

soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

• $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, Av = 0 \cdot v\} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - y + z = 0\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 2x + z\} = \{(x, 2x+z, z) \quad x, z \in \mathbb{R}^2\}$
$= \{x(1,2,0) + z(0,1,1) \,/\, x, z \in \mathbb{R}\}$
$= \text{vect}\{v_1, v_2\}$ avec $v_1 = (1,2,0)$ et $v_2(0,1,1)$

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, Av = v\} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = x \\ -4x + 2y - 2z = y \\ 2x - y + \cancel{z} = \cancel{z} \end{cases}$ $x = -z$ $\Rightarrow 2x = y$

$E_1 = \text{vect}\{v_3\}$ où $v_3 = (1,2,-1)$.

2°) - a) - Toutes les racine de $P_A(X)$ sont dans $\mathbb{R}$ et on a $\dim E_0 = 2$ et $\dim E_1 = 1$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b°) - $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $B_c$ à $B$

Alors $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Exercice II :

$$A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \text{ ou } m \in \mathbb{R}.$$

1°) – $P_{A_m}(X) = \det(A_m - XI_3) = \begin{vmatrix} m+2-X & -2 & 0 \\ 0 & m-X & 0 \\ 1 & -1 & m+1-X \end{vmatrix} = (m+1-X)\begin{vmatrix} m+2-X & - \\ 0 & m \end{vmatrix}$

$P_{A_m}(X) = (m+1-X)(m+2-X)(m-X)$

Trois valeurs propre distinctes simple : $m$, $m+1$ et $m+2$.

soient $E = \mathbb{R}^2$ et $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.

• $E_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, Av_1 = m v_1\} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = mx \\ my = my \\ x - y + (m+1)z = mz \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ y = y \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$

$E_m = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \,;\, x = y\} = \text{vect}\{(v_1)\}$

avec $v_1 = (1,1,0)$

• $E_{m+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, Av_2 = (m+1)v_1\} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+1)x \\ my = (m+1)y \\ x - y + (m+1)z = (m+1)z \end{cases}$

$\Leftrightarrow E_{m+1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} = \text{vect}\{v_2\}$

avec $v_2 = (0,0,1)$ ;

• $E_{m+2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / Av_3 = (m+2)v_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+2)x \\ my = (m+2)y \\ x - y + (m+1)z = (m+2)z \end{cases}$

$E_{m+2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \,;\, x = z\} = \text{vect}\{v_3\}$

avec $v_3 = (1,0,1)$.

2°) - a : $A_m$ admet 3 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b : $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de $\mathcal{B}c$ à $\mathcal{B}$. Alors on a :

$$D_m = P^{-1} A_m P = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

3°) - $A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D_{-2} = P^{-1} A_{-2} P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} V_1 = e_1 + e_2 \\ V_2 = e_3 \\ V_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = V_1 - V_2 \\ V_2 = e_3 \\ e_3 = V_3 - e_1 = V_3 - V_1 + V_2 \end{cases}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice inverse de $P$

on a $(D_{-2}) = P^{-1} A_{-2} P \Leftrightarrow A_{-2} = P D_{-2} P^{-1}$

$(A_{-2})^n = P (D_{-2})^n P^{-1}$ avec $(D_{-2})^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

4°) - On a $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ $\quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$

$U_{n+1} = A_{-2} U_n$ avec $A_{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$U_{n+1} = A_{-2} U_n \Leftrightarrow U_n = A_{-2} U_{n-1}$

$= A_{-2}(A_{-2}) U_{n-1} = (A_{-2})^2 U_{n-1} = (A_{-2})^3 U_{n-2} = \dots = (A_{-2})^n U_1$

$U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

$U_n = (A_{-2})^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ On peut ~~m~~ le obtenir par récurrence.

b°) - On a $U_n = (A_{-2})^n U_0$ avec $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n \\ (-2)^n \\ (-1)^{n+1} (-1)^n - (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = (-2)^n \\ y_n = (-2)^n \\ z_n = (-1)^{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## Exercice III :

1°) - $f(P) = P' + P \quad \forall \ P \in \mathbb{R}_2[X]$.

On a $f(1) = 0 + 1 = 1$ ; $f(X) = 1 + X$ ; $f(X^2) = 2X + X^2$

Par suite on a $A = M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2°) - $P_f(X) = P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3$

$\lambda = 1$ est une valeur propre triple de $f$.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ AV_1 = V_1\} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \\ y + 2z = y \\ z = z \end{cases}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y = z = 0\} = \text{vect}\{V_1\}$ avec $V_1 = \{1\}$

On a $\dim E_1 = 1 < 3$, donc $f$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

# Contrôle 2 Algèbre2 : 2008/2009

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$f(e_1) = e_1 + e_3, f(e_2) = e_1 + e_2, f(e_3) = -2e_2 + 2e_3.$$

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) Donner la matrice de $f$ relativement à $\mathcal{B}_c$.

2) Calculer l'image $f(v)$ pour un vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

3) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Soit $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$. Donner $P$.

5) Calculer $-2v_1 + 6v_2 + v_3$.

6) Exprimer $e_1, e_2, e_3$ en fonction de $v_1, v_2, v_3$.

7) En déduire l'inverse de $P$.

8) Déterminer la matrice de $f$ relativement à $\mathcal{B}$.

9) Déterminer le noyau et l'image de $f$.

## Exercice II :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier que le polynôme caractéristique de $A$ est $P_A(X) = (X-1)^2(2-X)$.

2) Déterminer les valeurs propres de $A$.

3) Pour chaque valeur propre de $A$ déterminer le sous-espace propre correspondant.

4) La matrice $A$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

5) Déterminer $P$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

6) Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

---

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech 2008/2009**

# Correction :

## Exercice I :

$B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (cas particulier d'une application linéaire).

$f(e_1) = e_1 + e_3$ ; $f(e_2) = e_1 + e_2$ ; $f(e_3) = -2e_2 + 2e_3$.

1°) - La matrice relative à $B_c$ de $f$ : $M(f, B_c)$

$$M(f, B_c) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

2°) - pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ on a $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$

Alors $f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x f(e_1) + y f(e_2) + z(e_3)$

$= x(e_1 + e_3) + y(e_1 + e_2) + z(-2e_2 + 2e_3)$

$= (x + y)e_1 + (y - 2z)e_2 + (x + 2z)$.

$= (x + y, y - 2z, x + 2z)$

Donc $\| f(x, y, z) = (x + y, y - 2z, x + 2z)$.

3°) On montre que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ on a $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta = 0 & \Rightarrow \beta = 2\alpha \\ 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 & \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = 0 & \Rightarrow \alpha = -2\gamma \end{cases}$$

donc la famille $(v_1, v_2, v_3)$ est libre.

On peut calculer le déterminant de $(v_1, v_2, v_3)$

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8 + 2) = -10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ la famille $B$ est libre.

on a $\dim B = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et puisque $B$ est libre.

donc $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4°)- P : La matrice de passage de la base $Bc$ à $B$ :

on a
$$v_1 = (-2, 2, 1) = -2e_1 + 2e_2 + e_3$$
$$v_2 = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$$
$$v_3 = (0, -2, 2) = -2e_2 + 2e_3$$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

5°)- $-2v_1 + 6v_2 + v_3 = -2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+6 \\ -4+6-2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$= 10 e_1$

6°)- On a $-2v_1 + 6v_2 + v_3 = 10 e_1 \Rightarrow e_1 = -\frac{1}{5} v_1 + \frac{3}{5} v_2 + \frac{1}{10} v_3$

or : $v_2 = e_1 + e_2 \Rightarrow e_2 = v_2 - e_1 = +\frac{1}{5} v_1 + \left(-\frac{3}{5} + 1\right) v_2 - \frac{1}{10} v_3$
$= \frac{1}{5} v_1 + \frac{2}{5} v_2 - \frac{1}{10} v_3.$

$v_3 = -2e_2 + 2e_3 \Rightarrow e_3 = \frac{v_3}{2} + e_2 = \frac{1}{5} v_1 + \frac{2}{5} v_2 + \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right) v_3$
$= \frac{1}{5} v_1 + \frac{2}{5} v_2 + \frac{2}{5} v_3$

7°)- $P^{-1}$ l'inverse de $P$. est la matrice de passage de la base $B$ à la base $Bc$.

on a
$$\begin{cases} e_1 = -\frac{1}{5} v_1 + \frac{3}{5} v_2 + \frac{1}{10} v_3. \\ e_2 = \frac{1}{5} v_1 + \frac{2}{5} v_2 - \frac{1}{10} v_3 \\ e_3 = \frac{1}{5} v_1 + \frac{2}{5} v_2 + \frac{2}{5} v_3. \end{cases}$$

Alors : $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$

8°) - La matrice de $f$ realativement à $B$ : $M(f,B)$

on peut la calculer de deux methodes.

* $M(f,B) = P^{-1} M(f,B_c) P$

* $f(V_1) = f\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ car on a deja montrer que

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\y-2z\\x+2z\end{pmatrix}$$

$$f(V_2) = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+1\\1-2.0\\1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 2e_1 + e_2 + e_3$$

$$= 2\left(-\frac{1}{5}V_1 + \frac{3}{5}V_2 + \frac{1}{10}V_3\right) + \frac{1}{5}V_1 + \frac{2}{5}V_2 - \frac{1}{10}V_3 + \frac{1}{5}V_1 + \frac{2}{5}V_2 + \frac{2}{5}V_3$$

$$= 0\cdot V_1 + 2V_2 + \frac{3}{5}V_3$$

$$f(V_3) = f\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix} = -2\left(-\frac{1}{5}V_1 + \frac{3}{5}V_2 + \frac{V_3}{10}\right) + 2\left(\frac{1}{5}V_1 + \frac{2}{5}V_2 - \frac{V_3}{10}\right) + 4\left(\frac{1}{5}V_1 + \frac{2}{5}V_2 + \frac{2}{5}V_3\right)$$

$$= \frac{8}{5}V_1 + \frac{6}{5}V_2 + \frac{1}{10}V_3$$

Alors : $M(f,B) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 8/5\\ 0 & 2 & 6/5\\ 0 & 3/5 & 1/10\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 0 & 8\\ 0 & 10 & 6\\ 0 & 3 & 1/2\end{pmatrix}$

9°) - le noyau de $f$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = (0,0,0)\}\\ &= \{x+y=0,\ y-2z=0,\ x+2z=0 \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}^3\}\\ &= \{x=-y=-2z \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}^3\}\\ &= \{(x,-x,-\tfrac{1}{2}x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{vect}\{(1,-1,-\tfrac{1}{2})\} = \operatorname{vect}\{u\} \quad u = (1,-1,-\tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

on dim Ker $f$ = 1 .

L'image de $f$. Im $f$ ?

$\mathrm{Im} f = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (x', y', z') \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' \\ y - 2z = y' \\ x + 2z = z' \end{cases} \Rightarrow x' + z' = x' \Rightarrow z' = 0$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \{ x' = \cancel{x'} + z' \Rightarrow z' = 0 \ / \ \forall x', y' \}$

$= \{ (x', y', 0) \ \backslash \ x', y' \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \mathrm{vect} \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0) \} = \mathrm{vect} \{ e_1, e_2 \}$

$e_1$ et $e_2$ sont libre.

donc dim Im $f$ = 2 .

## Exercice II :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) On a $P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 2 & 0 & -X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ 2 & -X \end{vmatrix}$

$= (1-X)(-X(3-X) + 2) = (1-X)(X^2 - 3X + 2)$

$= (1-X)(1-X)(2-X) = (1-X)^2 (2-X)$

2°)- les valeurs propres de A .

On a $P_A(X) = (1-X)^2(2-X) = 0$

Alors : 1 est une valeur propre double de A

2 est une valeur propre simple de A

3°)- Pour $\lambda_1 = 1$.

soit $B_c(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$E_1 = \{ V \in \mathbb{R}^3 \mid AV = 1 \cdot V \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{cases} 3x - z = x \\ y = y \\ 2x = z \end{cases} \mid x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \{ (x, y, 2x) \mid x, y \in \mathbb{R}^2 \} = \{ x(1, 0, 2) + y(0, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}$$

$$= \text{vect}\{ (1, 0, 2), (0, 1, 0) \} = \text{vect}\{ V_1, V_2 \}$$

avec $V_1 = (1, 0, 2)$ et $V_2 = (0, 1, 0)$.

Pour $\lambda_2 = 2$

$$E_2 = \{ V \in \mathbb{R}^3 \mid AV = 2 \cdot V \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - z = 2x \Rightarrow x = z \\ y = 2y \Rightarrow y = 0 \\ 2x = 2z \Rightarrow z = x \end{cases}$$

$$E_2 = \{ x = z, y = 0 \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{ (x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$$= \text{vect}\{ (1, 0, 1) \} = \text{vect}\{ V_3 \}$$

$V_3 = (1, 0, 1)$.

4°)- On a $\dim E_1 = 2 =$ le nombre de multiplicité de la valeur propre 1

et $\dim E_2 = 1 =$ le nombre de multiplicité de la valeur propre 2.

$\dim E_1 + \dim E_2 = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

5°)- On a la famille $B(V_1, V_2, V_3)$ est libre et $\dim B = 3$

donc $B = (V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

donc Il existe une matrice P : la matrice de passage de la base B à Bc tell que $D = P^{-1} A P$

(P est une matrice inversible est son inverse $P^{-1}$ est la matrice de passage de $B_C$ à B.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \begin{cases} V_1 = e_1 + 2e_3 \\ V_2 = e_2 \\ V_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = V_1 - 2e_3 \\ V_2 = e_2 \\ e_3 = V_1 - V_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = -V_1 + 2V_3 \\ e_2 = V_2 \\ e_3 = V_1 - V_3 \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors : } D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6°) - On a $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$

$$A^2 = PDP^{-1}.PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

On montre que $A^n = PD^nP^{-1}$ $\qquad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 0 & 2-2^n \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

# Contrôle Rattrapage Algèbre2 : 2008/2009

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice II :

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par $f(P) = P'$. Calculer la matrice de $f$ relativement à la base $\mathcal{B} = (1, (X-2), (X-2)^2)$.

## Exercice III :

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de $A$.

2) La matrice $A$ est-elle inversible?

## Exercice IV :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le polynôme caractéristique de $A$.

2) Montrer que les réels $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -1$ sont les valeurs propres de $A$.

3) Pour chaque valeur propre, déterminer le le sous-espace propre correspondant.

4) Montrer que la matrice $A$ est diagonalisable.

5) Déterminer $P$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

6) Calculer $A^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice II :

$f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ : $f(P) = P'$

soit la base $B = (1, (X-2), (X-2)^2)$

on determine la matrice $M(f, B)$ de $f$ dans la base $B$

On $f(1) = 0$

$f((X-2)) = 1 \qquad ((X-2)' = 1)$

$f((X-2)^2) = 2(X-2) \qquad ((X-2)' = 2(X-2))$.

Alors : $M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

## Exercice III :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) - la polymôme caratéristique de A

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & -1 \\ -1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \overset{C_1+C_3}{=} \begin{vmatrix} -X & 0 & -1 \\ 0 & -X & 1 \\ -X & 1 & -(1+X) \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_1-L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & X \\ 0 & -X & 1 \\ -X & 1 & -(1+X) \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -1 & X \\ -X & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -X(-1 + X^2) = -X(X-1)(X+1)$$

2°) - La matrice A n'est pas inversible. car 0 est une valeur propre de A . en effet :

A est digonalisable on peut former une Base $B'$ tel que

$A = P^{-1} D P$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on a $\det D = 0$ et puisque les deux matrice sont semblable donc $\det A = \det D = 0$

D'ou A n'est pas inversible.

## Exercice IV :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) - le polynôme caractéristique de A.

$$P_A(x) = \det(A - X I_3) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 3 \\ 1 & 1 & -1-x \end{vmatrix} \overset{C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} -(x+1) & 1 & 0 \\ x+1 & -x & 3 \\ 0 & 1 & -(1+x) \end{vmatrix} L_1 +$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 3 \\ x+1 & -x & 3 \\ 0 & 1 & -(x+1) \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 1 & -(1+x) \end{vmatrix} = (x+1)\left|x^2 - 1 - 3\right|$$

$$= (x+1)(x^2 - 4) = (x+1)(x+2)(x-2) = 0$$

$$P_A(x) = (x+1)(x+2)(x-2) = 0$$

3°) On a $P_A(x) = (x+1)(x+2)(x-2) = 0$

Alors les valeurs propre de A sont : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 =$

4°) la matrice A possède 3 valeurs propre simple donc

Elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

car les valeurs propres sont simple $\in \mathbb{R}$.

5°) - pour $\lambda_1 = 2$ soit $B_c(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On a $E_2 = \{AV = 2V \ / \ V \in \mathbb{R}^3\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + 3z = 2y \Rightarrow z = x \\ x + y - z = 2z \Rightarrow z = x \end{cases}$$

$$E_2 = \{x = z = \tfrac{1}{2}y \ / \ x, y, z \in \mathbb{R}^3\} = \{(x, \tfrac{1}{2}x, x) / x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \text{Vect}\{(2, 1, 2)\} = \text{vect}\{V_1\}$$

$V_1 = (2, 1, 2)$.

$E_{-2} = \{AV = -2V \ / \ V \in \mathbb{R}^3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 3z = -2y \Rightarrow z = +x \\ x + y - \ \ = -2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x & \Rightarrow y = -2x \\ x + 3z + 2y = 0 & \Rightarrow y = -2z \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = -\tfrac{1}{2}y$$

$E_{-2} = \{(2y, -y, 2y) \ / \ y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(2, -1, 2)\} = \text{vect}\{V_2\}$

$V_2 = (2, -1, 2)$.

$E_{-1} = \{AV = -V \ / \ V \in \mathbb{R}^3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x + 3z = -y \\ x + y - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -y$ et $z = 0$

$E_{-1} = \{(x, -x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1, -1, 0)\} = \text{vect}\{V_3\}$

avec $V_3 = (1, -1, 0)$

Alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\begin{cases} V_1 = 2e_1 + e_2 + 2e_3 \\ V_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ V_3 = e_1 - e_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = V_3 + e_2 = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 + \\ e_2 = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2 \\ e_3 = \frac{1}{2}(V_2 - 2e_1 + e_2) \end{cases}$

$$e_3 = \frac{1}{2}\left(V_2 - V_1 + V_2 - 2V_3 + \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}V_1 + \frac{3}{2}V_2 - 2V_3\right) = -\frac{3}{4}V_1 + \frac{3}{2}V_2 - V_3$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6°)- On a $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$

on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-1)^n \\ +(+2)^n & -(2)^n & -(-2)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2^{n+2}+(-2)^n+4(-1)^n & 2^{n+1}+(-2)^n & -3\cdot 2^{n+1}+3\cdot(-2)^{n-1}-4(-1)^n \\ 2^{n+2}+(-2)^n+4(-1)^n & 2^{n+1}-(-2)^{n+1} & -3\cdot 2^n-3(-2)^n+4\cdot(-2)^n \\ 2^{n+2}+(-2)^n & 2^{n+2}+(-2)^n & -3\cdot 2^{n+1}+3\cdot(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

# Extrait de Contrôle 2 Algèbre2 : 2005/2006

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Jordaniser la matrice $A$ sur $\mathbb{R}$.

2) On considère le système différentiel homogène suivant :

$$(S_h) \qquad \begin{cases} y_1' &= 3y_1 - 2y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 - y_3. \end{cases}$$

a) Résoudre le système $(S_h)$.

b) Trouver un système fondamental de solutions de $(S_h)$.

3) Résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} y_1' &= 3y_1 - 2y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= 2y_1 - y_3 \end{cases}$$

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice I :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1°) - On détermine les valeurs propre de A.

On a $P_A(X) = \det(A - X I_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -2 \\ 1 & 2-X & -2 \\ 2 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 2 & -(1+X) \end{vmatrix}$

$$= (2-X)\left(+(1+X)(X-3)+4\right) = (2-X)(X^2-2X+1)$$
$$= (2-X)(X-1)^2$$

Alors A a pour des valeurs propres.

1 valeur propre double.

2 valeur propre simple.

soit la base canonique $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$

$E_1 = \{ AV = 1 \cdot V \,/\, V \in \mathbb{R}^3 \} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / x, y, z \in$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z = x \Rightarrow x = z \\ x + 2y - 2z = y \Rightarrow y = z \\ 2x - z = z \end{cases}$$

$E_1 = \{ x = y = z \,/\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} = \text{vect}\{(1,1,1)\}$
$= \text{vect}\{V_1\}$

On a $\dim E_1 = 1 \neq$ au nombre de multiplicité de la valeur propre 1

$\Rightarrow$ A n'est pas diogonalisable on peut la ~~triangul~~ triangulaser.

$E_2 = \{ AV = 2 \cdot V \,/\, V \in \mathbb{R}^3 \} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / (x, y, z) \in$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z = 2x \Rightarrow x = 2z \\ x + 2y - 2z = 2y \\ 2x - z = 2z \Rightarrow z = x = 0 \end{cases}$$

$E_2 = \{ (0, y, 0) \,,\, y \in \mathbb{R} \} = \text{vect}\{V_2\} = \text{vect}\{(0,1,0)\}$

on choisit une vecteur $V_3$ telle que $B = (V_1, V_2, V_3)$ soit libre. $\det(V_1, V_3, V_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$V_3 = (0, 0, 1)$

donc on peut former une base $B = (V_1, V_3, V_2)$

tel que $T = P^{-1} A P$

T : est la matrice triangulaire.

P : est la matrice de passage de la base $Bc = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $B = (V_1, V_3, V_2)$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad \begin{cases} V_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ V_3 = e_3 \\ V_2 = e_2 \end{cases} \Rightarrow e_1 = V_1 - V_3 - V_2$$

$$\text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2°) -

$$(Sh) \begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_3 \end{cases}$$

On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = AY \Leftrightarrow Y' = AY$$

On a $T = P^{-1} A P \Rightarrow Y' = AY \Leftrightarrow Z' = (P^{-1} A P) Z$

avec $Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$$Z' = (P^{-1} A P) Z \Leftrightarrow Z' = TZ$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = z_1 - 2z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = z_1 - 2C_1 \\ z_2' = C_1 \\ z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (z_1 - 2C_1)' = z_1 - 2C_1 \Rightarrow z_1 - 2C_1 = C_3 e^t$$

Alors $\begin{cases} z_1 = c_3 e^t + 2C_1 \\ z_2 = C_1 \\ z_3 = 0 \end{cases}$

$$Z' = TZ \Leftrightarrow Y = PZ$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

d'ou $\begin{cases} y_1(t) = z_1 = C_3 e^t + 2C_1 \\ y_2(t) = z_1 + z_3 = C_3 e^t + 2C_1 \\ y_3(t) = z_1 + z_2 = C_3 e^t + C_1(2+1) = C_3 e^t + \underbrace{3C_1}_{C_4} \\ \quad = C_3 e^t + C_4 \end{cases}$

# Extrait du Contrôle 2 Algèbre2 : 2006/2007

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) *a*) Déterminer les valeurs propres de $A$ et les sous-espaces propres associés.

*b*) En déduire que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et diagonaliser $A$.

*c*) Calculer $(A)^n$ pour tout $n \geq 1$.

2) On considère les suites $(x_n)$, $(y_n)$ et $(z_n)$ définies par leurs termes initiaux $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$ et $z_0 = 1$ et par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = & 2x_n + z_n \\ y_{n+1} = & 2y_n \\ z_{n+1} = & x_n + 2z_n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculer $x_n$ , $y_n$ et $z_n$ en fonction de $n$, pour tout $n \geq 1$.

3) *a*) Montrer que $A$ vérifie la relation suivante :

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$$

où $I_3$ est la matrice unité d'ordre 3.

*b*) Donner l'expression de $A^{-1}$ en fonction de $A^2$, $A$ et $I_3$.

5) Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = & 2y_1 + y_3 \\ y_2'(t) = & 2y_2 \\ y_3'(t) = & y_1 + 2y_3 \end{cases}$$

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice I :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1°) a- les valeurs propres de A.

On a $P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix}$

$= (2-X)\left((2-X)^2 - 1\right) = (2-X)(2-X-1)(2-X+1)$

$= (3-X)(2-X)(1-X) = 0$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$

* les sous espace propres associe aux valeurs propres.

$E_1 = \{AV = V \mid V \in \mathbb{R}^3\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = x & \Rightarrow x = -z \\ 2y = y & y = 0 \\ x + 2z = z \end{cases}$

$E_1 = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(1, 0, -1)\} = \text{vect}\{V_1\}$

avec $V_1 = (1, 0, -1)$.

$E_2 = \{AV = 2V \mid V \in \mathbb{R}^3\}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + z = 2x & z = 0 \\ 2y = 2y \\ x + 2z = 2z & \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

$E_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\{(0, 1, 0)\} = \text{vect}\{V_2\}$

$V_2 = (0, 1, 0)$

$E_3 = \{AV = 3V \mid V \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x + z = 3x & x = z \\ 2y = 3y \Rightarrow & y = 0 \\ x + 2z = 3z \end{cases}$

$E_3 = \{ x = z \text{ et } y = 0 \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \} = \{ (x,0,y) \ / \ x,y \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \text{vect}\{(1,0,1)\} = \text{vect}\{V_3\}$ avec $V_3 = (1,0,1)$.

b) A est diagonalisable car tout les valeurs propres de f sont simple $\in \mathbb{R}$

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

P est la matrice de passage de la Base canonique Bc. à la base $B = (V_1, V_2, V_3)$.

B est une base $\Rightarrow$ P admet un inverse $P^{-1}$

$P^{-1}$ est la matrice de passage de la base B à Bc

On a $\begin{cases} V_1 = e_1 - e_3 \\ V_2 = e_2 \\ V_3 = e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_3 \\ e_2 = V_2 \\ e_3 = e_1 - V_1 = -\frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_3 \end{cases}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c°). On a $D = P^{-1} A P \Leftrightarrow A = P D P^{-1} \Leftrightarrow A^n = P D^n P^{-1}$

$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ -1 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+3^n & 0 & 3^n-1 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n-1 & 0 & 1+3^n \end{pmatrix}$$

2°)- On a $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + z_n \\ y_{n+1} = 2y_n \\ z_{n+1} = x_n + 2z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A U_n$$

$$\Leftrightarrow \quad U_{n+1} = A U_n$$

On a
$$U_1 = A U_0$$
$$U_2 = A \cdot A U_0 = A^2 U_0$$
$$U_3 = A A^2 U_0 = A^3 U_0$$
$$\vdots$$
$$U_n = A^n U_0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3^n & 0 & 3^n-1 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^{n-1} & 0 & 1+3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = (1+3^n) x_0 + (3^n - 1) z_0 = \cancel{1} + 3^n + 3^n - \cancel{1} \\ \qquad = 2 \cdot 3^n \\ y_n = 2^{n+1} y_0 = 0 \\ z_n = 3^{n-1} x_0 + (1+3^n) z_0 = 2 \cdot 3^n \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 1 \end{cases}$$

$\forall n \geq 1$ on a $\begin{cases} x_n = 2.3^n \\ y_n = 0 \\ z_n = \frac{4}{3}3^n = 4.3^{n+1} \end{cases}$

3°) - a)-

On a $P_A(X) = (X-1)(X-2)(3-X) = 0$
$= (2-X)(4+X^2-4X-1)$
$= (2-X)(X^2-4X+3)$
$= -X^3+4X^2-3X+2X^2+6+8X$
$= -X^3+6X^2-11X+6 = 0$

On a donc $P_A(A) = 0 \Leftrightarrow A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$

b°)- on a $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad A^3 - 6A^2 + 11A = 6I_3$
$\Leftrightarrow \quad A(A^2 - 6A + 11I_3) = 6I_3$
$\Leftrightarrow \quad A^{-1}A(A^2 - 6A + 11I_3) = 6A^{-1}$

Alors $A^{-1} = A^2 - 6A + 11I_3$

5°)- On a $\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1 + y_3 \\ y_2'(t) = 2y_2 \\ y_3'(t) = y_1 + 2y_3 \end{cases}$

On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}$

$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = AY \Leftrightarrow Y' = AY$

$\Leftrightarrow \quad Z' = P^{-1}APZ \Leftrightarrow Z' = DZ, \; Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$

$$Z' = DZ \iff \begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = 2z_2 \\ z_3' = 3z_3 \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = C_1 e^{t} \\ z_2 = C_2 e^{2t} \\ z_3 = C_3 e^{3t} \end{cases}$$

$$\iff Y = PZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 = C_1 e^{t} + C_3 e^{3t} \\ y_2 = z_2 = C_2 e^{2t} \\ y_3 = -z_1 + z_3 = C_3 e^{3t} - C_1 e^{t} \end{cases}$$

# TD de l'algèbre_diagonalisation des matrices carrées

**Exercice 1 :** Les matrices suivantes sont elles diagonalisables ?
(Préciser si c'est dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2 :** Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \ : \ \deg P \leq 2\}$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2)$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f(P) = P' + P \qquad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$$

où $P'$ est le polynôme dérivé de $P$.
1) Déterminer la matrice de $f$ relativement à la base $B$.
2) $f$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ? Justifier votre réponse.

**Exercice 3 :** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de $A$ et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

**Exercice 4 :** Soit la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs propres de $A_m$ et les sous-espaces propres associés.
2) a) Montrer que $A_m$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A_mP$ soit diagonale.
3) Calculer $(A_{-2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4) Soient les suites réelles $(x_n)$ , $(y_n)$ et $(z_n)$ définies par les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= -2y_n \\ y_{n+1} &= -2y_n \\ z_{n+1} &= x_n - y_n - z_n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec $x_0 = 1$ , $y_0 = 1$ et $z_0 = -1$.

On note $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $\quad U_n = (A_{-2})^n \, U_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire $x_n$ , $y_n$ et $z_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 5 :** Soit la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer les valeurs propres de $A_\alpha$ et leurs ordres de multiplicité.

2) *a*) Pour quelle valeur de $\alpha$, la matrice $A_\alpha$ est diagonalisable ? Justifier votre réponse.

*b*) Dans ce cas diagonaliser $A_\alpha$ et calculer $(A_\alpha)^n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ on determine le polynôme caractéristique de la matrice A. $P_X(A)$. On a $P_X(A) = \det(A - XI_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ -1 & 2 & -X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

* A possède une valeur propre 1 simple dans $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car le sous espace de la valeur propre 1 est de $\dim E_1 = 1$ on ne peut pas créé une base de $\mathbb{R}^3$.

* A possède 3 valeurs propre simple dans $\mathbb{C}$ $1, i, -i)$
$\Rightarrow$ A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ à chaque valeur propre on a une vecteur propre on peut créé une base $B(V_1, V_2)$ tel que :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

P la matrice de passage de la base canonique $B_c(e_1, e_2, e_3)$ à la base B.
$P^{-1}$ est l'inverse de P : matrice de passage de la base B à $B_c$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ on determine le polynôme caractéristique de la matrice B, $P_X(B)$ on a $P_X(B) = \det(B - XI_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} \overset{L_2-L_3}{=} \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 0 & 1-X & -(1-X) \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} \overset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 3 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 2 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 3 \\ 1 & 4-X \end{vmatrix} = (1-X)\left((2-X)(4-X) - 3\right)$$

$P_B(X) = (1-X)(X^2 - 6X + 5) = (1-X)(X-1)(X-5)$

$B$ a $\ast$ 1 racine double $(\lambda_1)$
$\ast$ 5 racine simple $(\lambda_2)$

tout les racine $\in \mathbb{R}$ on peut diagonaliser $B$ dans $\mathbb{R}$.

soit la Base canonique $B_c(e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathbb{R}^3$

$\ast$ $\lambda_1 = 1$

$$E_{\lambda_1} = \{ V_1 \in E \mid AV_1 = V_1 \} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = x \\ x + 3y + z = y \\ x + 2y + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = \\ x + 2y + z = \\ x + 2y + z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = -(2y + z)$

$$E_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y - z \} = \{ (-2y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}^2 \}$$
$$= \{ y(-2,1,0) + z(-1,0,1) \mid z, y \in \mathbb{R}^2 \}$$
$$= \text{vect}\{ \underbrace{(-2,1,0)}_{V_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{V_2} \}$$

$\dim E_1 = 2 =$ ordre de la valeur propre $1 \Rightarrow B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$E_{\lambda_2} = E_5 = \{ V_3 \in \mathbb{R}^3 \mid AV_3 = 5V_3 \} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 5x \\ x + 3y + z = 5y \\ x + 2y + 2z = 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z = 3x \\ x + z = 2y \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ x + z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

$$E_5 = \text{vect}\{ \underbrace{(1,1,1)}_{V_3} \}$$

$\dim E_5 = 1$

Soit $B(V_1, V_2, V_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$

la matrice de passage de $B_c$ à $B$ est $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1}$ la matrice de passage $B$ à $B_c$ est l'inverse de $P$

donc $D = P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

$\mathbb{R}_2[X] := \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq 2\}$ dans la base $B = (1, X, X^2)$

$f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ( cas particulier d'une applicat linéaire ). $f(P) = P' + P \quad \forall P \in \mathbb{R}_2(X)$

1°) la matrice de $f$ dans la base canonique $B$, $M(f, B)$

$f(1) = (1)' + 1) = 1$

$f(X) = (X)' + X = 1 + X$

$f(X^2) = (X^2)' + X^2 = 2X + X^2$

$$\Leftrightarrow M(f, B) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to 1 \\ \to X \\ \to X^2 \end{array}$$

2°) - On détermine la polynôme caractéristique de $M(f, B)$.

$$P_X(M) = \det(M - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)^3 = 0$$

$M(f, B)$ a une valeur propre 1 triple.

soient $B$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $B(e_1, e_2, e_3)$ et $B'$ une base de $\mathbb{R}^3$ $B'(V_1, V_2, V_3)$.

On a $E_1 = \{ MV = 1 \cdot V \mid V(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x \Rightarrow y = 0 \\ y + 2z = y \Rightarrow z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_1 = \text{vect}\{V_1\} = \text{vect}\{(1, 0, 0)\}$

$\dim E_1 = 1 <$ à l'ordre de la valeur propre.

$\Rightarrow M(f, B)$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1°)- valeurs propre de A

On a $P_X(A) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -2-X & 1 & -1 \\ -4 & 2-X & -2 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \overset{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} -2-X & 0 & -1 \\ -4 & -X & -2 \\ 2 & -X & 1-X \end{vmatrix}$

$\overset{L_2-L_3}{=} \begin{vmatrix} -2-X & 0 & -1 \\ -6 & 0 & X-3 \\ 2 & -X & 1-X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} -(2+X) & -1 \\ -6 & X-3 \end{vmatrix}$

$= X\left(-(2+X)(X-3) - 6\right) = X(-X^2 + 2X + 6 + 3X - 6$

$= X^2(1-X)$

donc $\lambda_1 = 0$ valeur propre double
$\lambda_2 = 1$ " " simple

On considère la base canonique $B_c\,(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$

$E_{\lambda_1} = \{ AV = 0 \cdot V \mid V \in \mathbb{R}^3 \} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad \forall x, y, z \in$

$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 2x + z \} = \{ (x, 2x+z, z) \,/\, x, z \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \text{vect}\{ V_1, V_2 \}$ avec $V_1 = (1, 2, 0)$ et $V_2 = (0, 1, 1)$

$(V_1, V_2)$ sont libre.

$E_{\lambda_2} = \{ AV_3 = 1 \cdot V_3 \mid V_3(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = x \\ -4x + 2y - 2z = y \\ 2x - y + z = z \end{cases} \quad ; x, y, z \in$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 3x \\ -4x + y - 2z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad z = y - 3x = -x \quad \Rightarrow y = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -z$ et $y = 2x$

$E_{\lambda_2} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = -z$ et $y = 2x \}$

$= \text{vect}\{ V_3 \} = \text{vect}\{ (1, 2, -1) \}$

On a $\dim \lambda_1 = 2$ = l'ordre de multiplicité de $\lambda_1$.

et $\dim \lambda_2 = 1$ = l'ordre de multiplicité de $\lambda_2$.

donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b°) - soit la base $B'(V_1, V_2, V_3)$ tel que $V_1(1,2,0)$, $V_2(0,1,1)$ et $V_3(1,2,-$

La matrice de passage de la base $B_c$ à la base $B'$ est P

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ on a $B'$ une base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \det P \neq 0$

donc P est inversible et sont inverse $P^{-1}$ est la matrice de passage de la base $B'$ à la base $B_c$

d'où : $D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

$$A_m = \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix} \text{ ou } m \in \mathbb{R}.$$

1°) Les valeurs propres de $A_m$.

On a $P_X(A_m) = \det(A_m - X I_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+2-X & -2 & 0 \\ 0 & m-X & 0 \\ 1 & -1 & m+1-X \end{vmatrix} = (m+1-X)\begin{vmatrix} m+2-X & -2 \\ 0 & m-X \end{vmatrix}$$

$$= (m-X)(m+1-X)(m+2-X)$$

donc . $\lambda_1 = m$ valeur propre simple.

$\lambda_2 = m+1$ " " "

$\lambda_3 = m+2$ " " "

Les sous espaces propre de A.

On considère la base canonique $B_c(e_1, e_2, e_3)$ dans $\mathbb{R}^3$

⊛ $E_{\lambda_1} = E_m = \{ AV_1 = mV_1 \mid V_1(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = mx \\ my = my \\ x - y + (m+1)z = mz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 0 \end{cases} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow E_m = \{ (x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$E_m = \text{vect}\{V_1\} = \text{vect}\{(1,1,0)\}$

⊛ $E_{\lambda_2} = E_{m+1} = \{ AV_2 = (m+1)V_2 \mid V_2 \in \mathbb{R}^3 \}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (m+1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+1)x \\ my = (m+1)y \\ x - y + (m+1)z = (m+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \quad \forall x,z \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow E_{m+1} = \{ (x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$E_{m+1} = \text{vect}\{V_2\} = \text{vect}\{(1,0,1)\}$.

⊛ $E_{\lambda_3} = E_{m+2} = \{ AV_3 = (m+2)V_3 \mid V_3 \in \mathbb{R}^3 \}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m+2 & -2 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (m+2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x - 2y = (m+2)x \\ my = (m+2)y \\ x - y + (m+1)z = (m+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z \end{cases} \qquad E_{m+2} = \{ (0,0,z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \text{vect}\{V_3\} = \text{vect}\{(0,0,1)\}$$

2°) - $A_m$ possède 3 valeurs propre simple $\in \mathbb{R}$.

et on a à chaque valeur propre on a une vecteur propre associé à cette valeur. donc $A_m$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

b°) - soit la base $B'(V_1, V_2, V_3)$ / $V_1(1,1,0)$, $V_2(1,0,1)$ et $V_3(0,0,1)$

P : la matrice de passage de la base $B_c$ à la base $B'$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On a $B'$ est une base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \det P \neq 0$

donc il existe $P^{-1}$ l'inverse de $P$.

$P^{-1}$ est la matrice de passage de la base $B'$ à la Base $B_c$

d'ou : $D_m = P^{-1} A_m P = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$

3°) - On a $D_m = P^{-1} A_m P \Leftrightarrow A_m = P D_m P^{-1}$

$(A_m)^n = (P D_m P^{-1})^n = P (D_m)^n P^{-1}$

pour $m = -2$ On a $(A_{-2})^n = P (D_{-2})^n P^{-1}$

On determine $P^{-1}$ la matrice de passage de la base $B'$ a la base $B_c$ on a $\begin{cases} V_1 = e_1 + e_2 \\ V_2 = e_1 + e_3 \\ V_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = V_2 - e_3 = V_2 - V_3 \\ e_2 = e_1 + e_3 = V_2 - V_3 + V_3 = V_2 \\ e_3 = V_3 \end{cases}$

donc $P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to V_1 \\ \to V_2 \\ \to V_3 \end{array}$ $(D_{-2})^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(A_{-2})^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^n & 0 \\ (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-2)^n - (-1)^n & 0 \\ (-2)^n & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4°)- $(x_n)$, $(y_n)$ et $(z_n)$ sont des suite réelles.

$$\begin{cases} x_{n+1} = -2y_n \\ y_{n+1} = -2y_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n - z_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{. avec } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = -1 \end{cases}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}; \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A_{-2} \cdot U_n$

$$U_{n+1} = A_{-2} U_n \quad ; \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a
$$U_1 = A_{-2} U_0$$
$$U_2 = A_{-2} U_1 = A_{-2} \cdot A_{-2} U_0 = (A_{-2})^2 U_0$$
$$U_3 = A_{-2} U_2 = A_{-2} \cdot (A_{-2})^2 U_0 = (A_{-2})^3 U_0$$
$$\vdots$$
$$U_n = (A_{-2})^n U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On peut le demotrer par récurence.

b°)- On a $U_n = (A_{-2})^n U_0$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-2)^n - (-1)^n & 0 \\ (0)^n & (-2)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = (-1)^n x_0 + ((-2)^n - (-1)^n) y_0 = (-2)^n \\ y_n = \cancel{(-2) y_0} + (-2)^n x_0 = (-2)^n \\ z_n = (-1)^n y_0 = (-1)^{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = (-2)^n \\ y_n = (-2)^n \\ (-1)^{n+1} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 5

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha-1 & \alpha-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

On determine $P_X(A_\alpha) = \det(A_\alpha - XI_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-X & \alpha-1 & \alpha-1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 1 & 0 & 2-X \end{vmatrix}_{L_2+L_3} = \begin{vmatrix} 1-X & \alpha-1 & \alpha-1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 0 & 1-X & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & \alpha-1 & \alpha-1 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{C_2-C_3} = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & \alpha-1 \\ -1 & 2-X & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (1-X)$$

$$= (2-X)(1-X)\begin{vmatrix} 1-X & \alpha-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$$

Donc les valeurs propre de $A_\alpha$ sont :

$\lambda_1 = 1$ valeur propre double de $A_\alpha$

$\lambda_2 = 2$ " " simple " $A_\alpha$.

2°) - a) - Soit $B(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$E_{\lambda_1} = E_1 = \{ A_\alpha V = 1 \cdot V \ / \ V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \begin{cases} x + (\alpha+1)y + (\alpha-1)z = x \\ -x + y - z = y \\ x + 2z = z \end{cases} \right.$$

* si $\alpha = 1 \Rightarrow \{ x = -z \ ; (x, y, -x) \}$

$$E_{\lambda_1} = \text{vect}\{V_1, V_2\} = \text{vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$$

$(V_1, V_2)$ sont libre.

$\dim E_{\lambda_1} = 2$ = le nombre de multiplicité de 1

dans ce cas $A_1$ est diagonalisable.

si $\alpha \neq 1 \Rightarrow x = y = -z$

$E_{\lambda_1} = \text{vect}\{V_1\} = \text{vect}\{(1,1,-1)\}$

$\dim E_{\lambda_1} \neq 1 \neq$ nombre de multiplicité de $\lambda_1 = 1$

dans ce cas $A_\alpha$ n'est pas diagonalisable.

b°) - pour $\alpha = 1$

on a $E_{\lambda_1} = \text{vect}\{(V_1, V_2)\} = \text{vect}\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \{ AV_3 = 2V_3 \mid V_3 \in \mathbb{R}^3 \}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x \\ -x + y - z = 2y \\ x + 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow \{ y = -z \text{ et } x = 0$$

$E_{\lambda_2} = E_2 = \{ (0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R} \} = \text{vect}\{V_3\}$

$= \text{vect}\{(0,1,-1)\}$

$B'(V_1, V_2, V_3)$ est une base de $\mathbb{R}$ car

$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 + 1 = 3$

et

$(V_1, V_2, V_3)$ sont libre.

donc il existe une matrice $D$ semblable à $A_1$

tel que $D = P^{-1} A_1 P$ avec $P$ est la matrice de passage de la base $B_c$ à la base $B'$ et $P^{-1}$ est son inverse

$P^{-1}$ : matrice de passage de la base $B'$ à la base $B_c$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ on a } \begin{cases} V_1 = e_1 - e_3 \\ V_2 = e_2 \\ V_3 = e_2 - e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = V_1 + V_2 - V_3 \\ e_2 = V_2 \\ e_3 = V_2 - V_3 \end{cases}$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

On a $D = P^{-1} A_1 P \Leftrightarrow A_1 = P D P^{-1} \Leftrightarrow (A_1)^n = (P D P^{-1})^n$

$= P D^n P^{-1}$

or $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$(A_1)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2^n \\ -1 & 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A_1)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-2^n & 1 & 2^{n+1} \\ 2^n-1 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Bon courage.

# Contrôle 1 Analyse 2 : Année 2005/2006

**Filières : SMP-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit $\varphi$ une fonction numérique de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On considère dans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\}$ la fonction $f$ définie par $f(x,y) = x\varphi(\frac{y}{x})$.

1. Vérifier que $f$ est homogène. Quel est son degré?
2. Montrer que $f$ vérifie $x^2 f''_{xx} - y^2 f''_{yy} = 0$.

**Exercice2:** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de $f$.
2. Calculer $f'_x$ et $f'_y$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Montrer que $f'_x(0,0) = 0$ et $f'_y(0,0) = 0$.
4. Est-ce que $f'_x$ et $f'_y$ sont continues?
5. Est-ce que $f$ est différentiable?

**Exercice3:** On considère la forme différentielle suivante:

$$\omega = ydx + (x^2y^2 + x)dy$$

1. Vérifier que $\omega$ n'est pas exacte.
2. Trouver un nombre réel $\alpha$ tel que la fonction $m(x,y) = (xy)^\alpha$ soit un facteur intégrant de $\omega$ dans $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\quad x > 0 \; et \; y > 0\}$.
3. En déduire la résolution de l'équation différentielle $y + (x^2y^2 + x)y' = 0$.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice I :

Soit $f(x,y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0$

avec $\varphi$ une fonction numérique de $C^2$ sur $\mathbb{R}$

1/ $\forall\ t \in \mathbb{R}$ on a $f(tx,ty) = tx\,\varphi\left(\frac{\cancel{t}y}{\cancel{t}x}\right) = t^1 x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

donc $f(tx,ty) = t^1 f(x,y)$

d'où $f$ est homogène de degré égal à 1

$[f(g)]' = g' f'(g)$

2/ $* \ f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 1.\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

$= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x \times \frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$* \ f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

$= \frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \left[\frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \times \frac{y}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

$= \cancel{\frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)} + \cancel{\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$

$= \frac{y^2}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$

$* \ f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = x.\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$= \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$

$f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)$

donc $x^2 f''_{xx} - y^2 f''_{yy} = \frac{y^2}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^2}{x}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

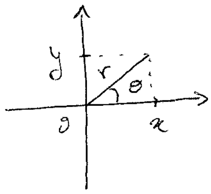
### Exercice : 2

soit $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1/ La continuité de $f$. , $D_f = \mathbb{R}^2$

Les fonctions $h : (x,y) \to h(x,y) = xy$ , $g : (x,y) \longrightarrow g(x,y) = x^2 - y^2$
et $k : (x,y) \longrightarrow k(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

* La continuité de $f$ en $(0,0)$




on pose $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; \quad r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & ; \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Alors $f(x,y) = f(r) = \dfrac{r^2}{4}\sin(2\theta)\cos(2\theta)$ (voir page : )

par suite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{r^2}{4}\sin(2\theta)\cos(2\theta)\right) \quad \forall\,\theta$

$$= 0$$

on a alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

D'où $f$ est continue au point $(0,0)$

c/c : $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ de plus $f$ est continue au point $(0,0)$, on déduit alors que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2/ calculons $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

* calcule $f'_x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)$$

$$f'_x(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^3y - xy^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\,2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

* calcule $f'_y$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left( xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

$$= \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5 - 3x^3y^2 + x^3y^2 - 3xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

3/ Montrons que $f'_x(0,0) = 0$ et $f'_y(0,0) = 0$

* calcule de $f'_x(0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0}(0) = 0$$

* calcule de $f'_y(0,0)$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

4/ continuité de $f'_x$ et $f'_y$

on a

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^4x - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

* continuité de $f'_x$

pour $(x,y) \neq (0,0)$

on a $h : (x,y) \longrightarrow x^4y + 4x^2y^3 - y^5$ et $g : (x,y) \longrightarrow (x^2+y^2)^2$

sont continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

donc $(x,y) \longrightarrow \dfrac{h(x,y)}{g(x,y)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

D'où $f'_x$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

* pour $(x,y)=(0,0)$

calculons la $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$

pour cela, utilisons les coordonnées polaires :

Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; \ r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & ; \ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$

$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^4\theta\sin\theta + 4r^5\cos^2\theta\sin^3\theta - r^5\sin^5\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2}$

$= \lim_{r\to 0} r \times [\cos^4\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta]$

$= 0 \times (\cos^4\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta]$

$= 0 \quad \forall\theta$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = 0 = f'_x(0,0)$

donc La fonction $f'_x$ est continue au point $(0,0)$

$\begin{cases} f'_x(x,y) \text{ continue sur } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ f'_x(x,y) \text{ continue au point } (0,0) \end{cases}$

donc $f'_x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

✔ continuité de $f'_y$

* pour $(x,y) \neq (0,0)$

on a $h : (x,y) \to x^5 - y^4x - 4x^3y^2$ et $g : (x,y) \to (x^2+y^2)^2$ sont continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, D'où $f'_y$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

* pour $(x,y)=(0,0)$

calculons la $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y)$

pour cela, utilisons les coordonnées polaires.

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^5\theta - r^5\cos\theta\sin^4\theta - 4r^5\sin^3\theta\cos^2\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2}$

$$= \lim_{r \to 0} r \times [\cos^5\theta - \cos\theta \sin^4\theta - 4\sin^3\theta\cos^2\theta]$$

$$= 0 \quad \forall \theta$$

on a alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = 0 = f'_y(0,0)$

donc la fonction $f'_y$ est continue au point $(0,0)$.

$$\left[\begin{array}{l} f'_y(x,y) \text{ continue sur } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ f'_y(x,y) \text{ continue au points } (0,0)\} \end{array}\right.$$

Alors $f'_y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

5/ $f'_x$ et $f'_y$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$ donc $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 :

$$w = y\,dx + (x^2y^2 + x)\,dy$$

1/ on a

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + x) = 2xy^2 + 1$$

on a $\frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2+x) = 2xy^2+1$

donc $w$ n'est pas exacte

2/ $m(x,y)$ est un facteur intégrant de $w$ $\Rightarrow$ $\exists f$ différentiable tq $m(x,y)\,w = df$

$m(x,y)\,w$ exacte $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)\times y) = \frac{\partial}{\partial x}(m(x,y)(x^2y^2+x))$

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)\times y) = \frac{\partial}{\partial y}((xy)^\alpha y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^\alpha y^{\alpha+1}) = x^\alpha(\alpha+1)y^\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)y) = (\alpha+1)(xy)^\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(m(x,y)(x^2y^2+x)) = \frac{\partial}{\partial x}((xy)^\alpha(x^2y^2) + (xy)^\alpha x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}((xy)^{\alpha+2} + x^{\alpha+1} \times y^\alpha)$$

$$= (\alpha+2)y(xy)^{\alpha+1} + (\alpha+1)(xy)^\alpha$$

(5)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(m(x,y)(x^2y^2+x)\right) = (\alpha+2)(x^{\alpha+1}\cdot y^{\alpha+2}) + (\alpha+1)(xy)^{\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(m(x,y)y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(m(x,y)\,(x^2y^2+x)\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{(\alpha+1)(xy)^{\alpha}} = (\alpha+2)\,x^{\alpha+1}\cdot y^{\alpha+2} + \cancel{(\alpha+1)(yx)^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow (\alpha+2)\,x^{\alpha+1}\cdot y^{\alpha+2} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -2 \quad \text{ou} \quad x^{\alpha+1}y^{\alpha+2} = 0$$

donc $\alpha = -2$ ou $x = y = 0$ ( impossible $\left(\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}\right)$ )

Alors $\boxed{\alpha = -2}$

$m(x,y) = (xy)^{-2}$ facteur intégrant de $w$

3/ $m(x,y) = (xy)^{-2}$ facteur intégrant de $w$ $\Rightarrow \exists f$ différentiable

tq $m(x,y)w = df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dy$

$$\Rightarrow (xy)^{-2}y + (xy)^{-2}(x^2y^2+x)y' = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{y}{x^2y^2} + \left(\frac{x^2y^2}{x^2y^2} + \frac{x}{x^2y^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{yx^2}\,dx + \left(1 + \frac{1}{xy^2}\right)dy = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + \frac{1}{xy^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int \frac{dx}{x^2y} = \frac{1}{y}\int \frac{dx}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 + \frac{1}{xy^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = -\frac{1}{xy} + g(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{xy} + g(y)\right) = 1 + \frac{1}{xy^2} \end{cases}$$

, $g(x)$ une fonction de variable $x$ dérivable

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = -\dfrac{1}{xy} + g(y) \\ \dfrac{1}{\cancel{x}y^2} + g'(y) = 1 + \dfrac{1}{\cancel{x}y^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = \dfrac{-1}{xy} + g(y) \\ g(y) = \int g'(y) = \int 1 . dy = y + C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{-1}{xy} + y + C_1 \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

on a $\omega = 0 \Rightarrow m(x,y)\,\omega = 0 \Rightarrow df = 0$

donc $f = \lambda =$ cte.

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{-1}{xy} + y + c_1 = \text{cte}.$$

$$f(x,y) = \frac{-1}{xy} + y = \lambda = \text{constante}$$

Conclusion les solustion de l'equation déffèrentielle $\omega$ sont données par $\dfrac{-1}{xy} + y =$ cte.

# Contrôle 1 Analyse 2 : Année 2006/2007

**Filières : SMP-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit la fonction définie par $f(x,y) = log(1+x^2+y^2)$.

1) Donner le domaine de définition $D(f)$ et le domaine des valeurs $W(f)$ de f.

2) Décrire les courbes de niveaux de $f$.

**Exercice:2** Soit la fonction définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que $f$ n'est pas continue en $(0,0)$.

2) La fonction $f$ admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?

3) $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.

**Exercice:3**

1) Soit $h$ une fonction numérique d'une seule variable, dérivable sur $I\!R$. Montrer que la fonction $f(x,y) = xh(2x+y)$ vérifie l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - 2x\frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

2) Trouver une solution de $(E)$ qui vérifie $f(1,y) = y^2$.

3) On pose $x = v, y = u - 2v, F(u,v) = f(v, u-2v)$.

a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$.

b) Réecrire l'équation $(E)$ en fonction de $u$ et $v$ et résoudre l'équation obtenue.

c) Déterminer alors les solutions de $(E)$.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice 1

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1/ continuité de $f$ dans $\mathbb{R}^2$

* pour $(x,y) \neq (0,0)$

les fonctions $h : (x,y) \longrightarrow h(x,y) = xy^3$, $g : (x,y) \to g(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

* pour $(x,y) = (0,0)$

$$\text{on a} \quad 0 \leqslant |f(x,y)| = \left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \times xy \right| \leqslant 1 . |xy|$$

car $\left| \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leqslant 1$

$$; \quad 0 \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

d'où $f$ est continue en $(0,0)$

c/c $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ de plus $f$ est continue au point $(0,0)$, on déduit alors que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

2ème Méthode : coordonnées polaire

on pose $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; \ r \in [0, +\infty[ \\ y = r\sin\theta & ; \ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$$\text{Alors} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \cos\theta \sin^3\theta}{r^2\cos\theta + r^2 \sin\theta}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \cos\theta \sin^3\theta}{}$$

$$= 0 \quad \forall \theta$$

2/ pour $(x,y) \neq (0,0)$

on a $$f'_x(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy^3)(x^2+y^2) - xy^3\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3 \times 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(xy^3)(x^2+y^2) - xy^3\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3 \times 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

* pour $(x,y) = (0,0)$

on a $$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0}{k^2} - 0}{k} = 0$$

$$f'_x(0,0) = \begin{cases} \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(0,0) = \begin{cases} \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3/ la continuité de $f'_x$ et $f'_y$ dans $\mathbb{R}^2$

* pour $f'_x(x,y)$

$f'_x(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$f'_x(x,y) = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

on a $0 \leqslant \left|\frac{y^5}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 \times y\right| \leqslant |y|$

$\Rightarrow 0 \leqslant \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{y^5}{(x^2+y^2)^2}\right| \leqslant \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

et $0 \leqslant \left|\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 \cdot y\right| \leqslant \frac{1}{4}|y| \quad \left(\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\right)$

donc $0 \leqslant \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| \leqslant \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{4}|y| = 0$

Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = 0 = f'_x(0,0)$

D'où $f'_x$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

conclusion : $f'_x$ est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ de plus $f'_x$ est continue au point $(0,0)$, on déduit alors que $f'_x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

* pour $f'_y(x,y)$.

$$f'_y(x,y) = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

- $\left|\frac{3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 \times 3x\right| \leqslant 3|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
- $\left|\frac{xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 \times x\right| \leqslant |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = 0 = f'_y(0,0)$

D'où $f'_y$ est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ de plus $f'_y$ est continue au point $(0,0)$, on déduit alors que $f'_y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4/ $f'_x$ et $f'_y$ existent et sont continue sur $\mathbb{R}^2$ donc $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ ( proposition 1.3.13 page 11 cours d'analyse )

• Montrons que $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk^3}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^3\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2}$$

• $\dfrac{hk^3\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} = \dfrac{hk^3}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{\dfrac{h^2}{h^2+k^2}} \times k^3$

$$\left|\sqrt{\frac{h^2}{h^2+k^2}} \times k^3\right| \leqslant |k^3| \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

d'où $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

$f$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, de plus $f$ est différentiable au point $(0,0)$. on déduit alors que $f$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$

5/

• $f'_{xy}(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to0} \frac{f'_x(0,h)-f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1$

• $f'_{yx}(0,0) = \displaystyle\lim_{k\to0} \frac{f'_y(k,0)-f'_y(0,0)}{k} = \lim_{k\to0} \frac{0-0}{k} = 0$

$f'_{xy}(0,0) \neq f'_{yx}(0,0)$ donc théorème de schwartz n'est pas vérifié $\Rightarrow$ $f$ n'est pas de classe $C^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

Soit $f'_x - f'_y = x - 2y$

on pose $x = 2u+v$ , $y = u-v$ et $F(u,v) = f(x,y)$

1/ calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$

on a $*$ $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$

$= \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial(2u+v)}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial(u-v)}{\partial u}$

(4)

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow F'_u = 2f'_x + f'_y$$

• $$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial v}(2u+v) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial v}(u-v)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \times (-1) \Rightarrow F'_v = f'_x - f'_y$$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} F'_u = 2f'_x + f'_y \\ F'_v = f'_x - f'_y \end{cases} \Rightarrow L_1 + L_2 \begin{cases} F'_u + F'_v = 3f'_x \\ F'_v = f'_x - f'_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x = \frac{1}{3}(F'_u + F'_v) \\ f'_y = f'_x - F'_v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = \frac{1}{3}F'_u + \frac{1}{3}F'_v \\ f'_y = \frac{1}{3}F'_u + \frac{1}{3}F'_v - F'_v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_x = \frac{1}{3}F'_u + \frac{1}{3}F'_v \\ f'_y = \frac{1}{3}F'_u - \frac{2}{3}F'_v \end{cases}$$

2/ En remplaçant dans l'équation (E) on obtient

$$(E) \Rightarrow \cancel{\frac{1}{3}F'_u} + \frac{1}{3}F'_v - \cancel{\frac{1}{3}F'_u} + \frac{2}{3}F'_v = \cancel{2u} + v - \cancel{2u} + 2v$$

$$\Rightarrow F'_v = 3v \Rightarrow \frac{dF}{dv} = 3v$$

$$\Rightarrow dF = 3v\,dv \Rightarrow F = \int 3v\,dv = \frac{3}{2}v^2 + g(u)$$

où $g(u)$ est une fonction d'une variable dérivable sur $\mathbb{R}$

3/

d'après (1) $f$ on a $f$ solution de (E)

$$\Rightarrow F = \frac{3}{2}v^2 + g(u)$$

$x =$

on a $\begin{cases} x = 2u + v \\ y = u - v \end{cases} \Rightarrow L_1 + L_2 \begin{cases} x + y = 3u \\ y = u - v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3}(x+y) \\ v = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x,y) = F(x,y) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)^2 + g\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y\right)$$

où $g$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1/

- $f'_x$
- $f'_y$
- $f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6xy^2 + 27x^2y^2 + 16xy^3$
- $f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y^3 + 18xy^3 + 4y^4$
- $f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6x^2y + 18x^3y^2 + 24x^2y^2$

2/ Les points critiques de $f$ sont les points solutions du système

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy^3 + 9x^2y^3 + 4xy^4 \\ 3x^2y^2 + 9x^3y^2 + 8x^2y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy^3(2 + 9x + 4y) = 0 \\ x^2y^2(3 + 9x + 8y) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy^3 = 0 \text{ ou} \\ x^2y^2 = 0 \text{ ou} \end{cases}$$

ou $x = 0$ et $y$ qq

ou $y = 0$ et $x$ qq

$$\begin{matrix} & 2 + 9x + 4y = 0 \\ -L_1 + L_2 & 1 + 4y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 9x - 1 = 0 \\ y = \frac{-1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{9} \\ y = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

Les points critique de $f$ sont donc les points

$M_1\left(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}\right)$, $M_2(x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $M_3(0,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$

3/ La nature de chaque point critique :

posons $\Delta = (f''_{xy})^2 - f''_{xx} f''_{yy}$

* nature du point critique $M_1(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4})$

on a $f''_{xx}(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}) = 2\times(\frac{-1}{4})^3 + 4\times(\frac{-1}{4})^4 + 18(\frac{-1}{9})(\frac{-1}{4})^3 = \frac{1}{64}$

• $f''_{yy}(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}) = 6(\frac{-1}{9})^2(\frac{-1}{4}) + 18(\frac{-1}{9})^3(\frac{-1}{4}) + 24(\frac{-1}{9})^2(\frac{-1}{4})^2 = \frac{1}{162}$

• $f''_{xy}(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}) = 6(\frac{-1}{9})(\frac{-1}{4})^2 + 27(\frac{-1}{9})^2(\frac{-1}{4})^2 + 16(\frac{-1}{9})(\frac{-1}{4})^3 = \frac{1}{144}$

on a alors $\Delta(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}) = (f''_{xy}(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}))^2 - f''_{xx}(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}) f''_{yy}(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4})$

$= (\frac{1}{144})^2 - \frac{1}{64} \times \frac{1}{162} = -\frac{1}{1296} < 0$

on a $\Delta(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}) < 0$ de plus $f''_{xx}(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4}) > 0$ donc $f$ admet un minimum point $M_1(\frac{-1}{9}, \frac{-1}{4})$.

* natur du point critique $M_2(x, 0)$

$f''_{xx}(x,0) = 0$ , $f''_{yy}(x,0) = 0$ et $f''_{xy}(x,0) = 0$

on a alors $\Delta(x,0) = 0$ donc on peut pas conclure.

* natur du point critique $M_3(0, y)$

$f''_{xx}(0,y) = 0$ , $f''_{yy}(0,y)$ et $f''_{xy}(0,y) = 0$

on a alors $\Delta(0,y) = 0$ donc on peut pas conclure.

# Contrôle 1 Analyse 2 : Année 2008/2009

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

**Exercice 1 (4 pts):** Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)Log(1 + x^2 + y^2)$.

1) Vérifier que $(0,0)$ est un point critique de f.

2) Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 de $f$ au point $(0,0)$.

3) Préciser la nature de ce point critique.

**Exercice 2 (12 pts):** On considère la fonction $f$ définie dans $I\!R^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 3y^2 + x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Calculer $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ pour tout $(x,y) \in I\!R^2$.
2. Etudier la continuité de $f'_x$ et $f'_y$ dans $I\!R^2$.
3. $f$ est-elle différentiable dans $I\!R^2$ ? Justifier votre réponse.
4. Etudier l'existence de $f''_{xx}(0,0)$ et $f''_{yy}(0,0)$.
5. Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$.
6. En déduire que $f$ possède un développement limité à l'ordre 2 au point $(0,0)$.

**Exercice 3 (4 pts):** On considère l'équation

$$2f'_x - f'_y = f \qquad (E).$$

On pose $x = 4v$, $y = 3u^2 - 2v$, $F(u,v) = f(x,y)$.

1. Calculer $f'_x$ et $f'_y$ en fonction de $F'_u$ et $F'_v$.
2. Réecrire l'équation $(E)$ en fonction de $u$ et $v$.

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

## Correction :

### Exercice I :

$f(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)\,Log(1+x^2+y^2)$

1°)- on calcul $f'_x$ et $f'_y$.

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + \operatorname{Log}(1+x^2+y^2) + \frac{2x(x+y)}{1+x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + \operatorname{Log}(1+x^2+y^2) + \frac{2y(x+y)}{1+x^2+y^2}$$

On a $\begin{cases} f'_x(0,0) = 0 \\ f'_y(0,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ le point $(0,0)$ est un point critique de $f$.

2°) - formule de Taylor à l'ordre 2 de $f$ au point $(0,0)$

On a $f''_{xx}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 + \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} + \dfrac{(2x+2(x+y))(1+x^2+y^2) - 4x^2(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}$

$f''_{yy}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 + \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} + \dfrac{(2y+2(x+y))(1+x^2+y^2) - 4y^2(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}$.

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} + \dfrac{2x(1+x^2+y^2) - 2y\cdot 2x(x+y)}{(1+x^2+y^2)^2}$

$f''_{xx}(0,0) = 2$ ; $f''_{yy}(0,0) = 2$ et $f''_{xy}(0,0) = 0$

or : on a la formule de Taylor s'écrit :

$$f(h+0, K+0) = f(0,0) + h f'_x(0,0) + K f'_y(0,0) + \frac{1}{2}\Big(f''_{xx}(0,0)h^2 + 2 f''_{xy}(0,0).hK + f''_{yy}(0,0)K^2\Big) + (h^2+K^2)\,\mathcal{E}(h,K)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \mathcal{E}(h,K) \to 0$

donc $f(h,K) = \frac{1}{2}\left(2.h^2 + 2.0 + 2.K^2\right) + (h^2+K^2)\,\mathcal{E}(h,K)$

$\Leftrightarrow f(h,K) = h^2 + K^2 + (h^2+K^2)\,\mathcal{E}(h,K)$

3°) On a $f''_{xy}{}^2(0,0) - f''_{xx}(0,0)\, f''_{yy}(0,0) = -4 < 0$

or $f''_{xx}(0,0) > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum en $(0,0)$

## Exercice II :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 3y^2 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1°)- pour $(x,y) \neq (0,0)$

- On a $f'_x(x,y) = 2x + 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^5}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
- $f'_y(x,y) = 6y - \frac{2y\,x^4}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

2°)- pour $(x,y) = (0,0)$

- On a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + x^4 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x + x^3 \sin 1/x$

or $|\sin 1/x| \leq 1 \Leftrightarrow |x^3 \sin 1/x| \leq |x^3|$ avec $\lim\limits_{x\to 0} |x^3| = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = 0 \Leftrightarrow f'_x(0,0) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$

- $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim\limits_{y\to 0} 3y = 0 \Leftrightarrow f'_y(0,0) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$

D'où :
$$f'_x(x,y) = \begin{cases} 2x + 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^5}{x^2+y^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \\ 0 & si\ (x,y) = (0, \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} 6y - \frac{2y\,x^4}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0 \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0 \end{cases}$$

2°)- la continuité de $f'_x$ et $f'_y$ dans $\mathbb{R}^2$

- $f'_x(x,y)$ :

la fonction $f'_x$ est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ car c'est la somme, produit, rapport et composé des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• pour $(x,y)=(0,0)$

On a $\left|f'_x(x,y)\right| \leq 2|x| + 4|x^3|\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| + 2\left|\frac{x^5}{(x^2+y^2)^2}\right|\cdot\left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$

$4|x^3|\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 4|x^3|$ et $2\left|\frac{x^5}{(x^2+y^2)^2}\right|\left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 2|x|\left|\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2\right|$

$\leq 2|x|$

car $\left|\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$ ; $\left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$ et $\frac{x^2}{x} < x^2+y^2$

$\left|f'_x(x,y)\right| < 2|x| + 4|x^3| + 2|x|$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| + 4|x^3| + 2|x| = 0$

$\Leftrightarrow$ $f'_x(x,y)$ est continue sur $(0,0)$

C/c : $f'_x$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

• $f'_y$ est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ car $f'_x$ est la somme, produit rapport et composé des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

pour $(x,y)=(0,0)$

On a $\left|f'_y(x,y)\right| = \left|6y - \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$

$\leq 6|y| + 2\left|\frac{yx^4}{(x^2+y^2)}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|$

On a $\left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$ et $\left|\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{1}{4}$ car $x^2 < \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $(x^2+y^2+2xy > 0$

Alors $|f'_y(x,y)| \leq 6|y| + 2|y| = 7|y|$ et $\lim_{y \to 0} 7|y| = 0$

D'où $f'_y(x,y)$ est continue sur 0

C/c : $f'_x$, $f'_y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

3°)- f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ car f admet des dérivées partielles $f'_x$ et $f'_y$ et les dérivées sont continues sur $\mathbb{R}^2$

4°)- $\lim_{x \to 0} \frac{f'_x(x,0) - f'_x(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x^5}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} 2 + 4x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On a $\left|\sin \frac{1}{x^2}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|4x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 4x^2$

or $\lim_{x \to 0} 4x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} 4x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

$\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'existe pas

en effet : soit $U_K = \frac{1}{\sqrt{2K\pi}}$, $V_K = \frac{1}{\sqrt{\pi/2 + 2K\pi}}$

On a $\lim_{K \to \infty} U_K = \lim_{K \to +\infty} V_K = 0$

mais, $\cos \frac{1}{U^2} = \cos 2K\pi = 1$ et $\cos \frac{1}{V^2} = \cos\left(\pi/2 + 2K\pi\right) = 0$

$1 \neq 0$ la limite n'existe pas donc $f''_{xx}$ n'existe pas

$$* \lim_{y \to 0} \frac{f'_y(y,0) - f'_y(0,0)}{y-0} = \frac{6y}{y} = 6$$

donc $f''_{yy}(0,0) = 6$ $\quad f''_{yy}$ existe.

5°)- On a $\left| \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \right| = x^2 \cdot \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \left| \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) \right|$

$< x^2$

car $\left( \left| \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \right| = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \right.$ et $\left| \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} \right| \leq 1$

or $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} x^2 = 0$ donc $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

6°)- On a $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$

On pose $\theta(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

On a $\lim\limits_{(x,y)} \theta(x,y) = 0$

$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + (x^2+y^2)\,\theta(x,y)$ avec $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \theta(x,y) = 0$

Donc $f$ admet un développement limité au voisinage de $(0,0)$ à l'ordre 2.

$f$ s'écrit : $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + (x^2+y^2)\,\theta(x,y)$

avec $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \theta(x,y) \longrightarrow 0$

## Exercice III :

$(E)$ : $2f'_x - f'_y = f$.

On pose : $x = 4v$ , $y = 3u^2 - 2v$ , $F(u,v) = f(x,y)$

1°) : $f'_x$ et $f'_y$ en fonction de $F'_u$ et $F'_v$.

$$F'_u = \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = 6u\,\frac{\partial f}{\partial y} = 6u\,f'_y$$

$$F'_v = \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = 4\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 4f'_x - 2f'_y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F'_u = 6u\,f'_y \\ F'_v = 4f'_x - 2f'_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4f'_x = F'_v + 2f'_y \\ f'_y = \frac{1}{6u}F'_u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = \frac{F'_u}{12u} + \frac{F'_v}{4} \\ f'_y = \frac{1}{6u}F'_u \end{cases}$$

2°)- On a $2f'_x - f'_y = f$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{F'_u}{12u} + \frac{F'_v}{4}\right) - \frac{1}{6u}F'_u = F$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}F'_v + \cancel{\frac{1}{6u}F'_u} - \cancel{\frac{1}{6u}F'_u} = F$$

$$(E) \Leftrightarrow F'_v = 2F \quad (E')$$

donc la résolution de l'équation différentielle $2f'_x - f'_y = f$ est equivalant à la résolution du $F'_v = 2F$

$$\Leftrightarrow F(u,v) = Ae^{2v}$$

# Exercices : Analyse 2

**Filières : SMP-SMC** **Semestre 2**

## Exercice 1 :

Soit la fonction définie par $f(x,y) = log(1 + x^2 + y^2)$.

1) Donner le domaine de définition $D(f)$ de f.
2) Donner le domaine des valeurs $W(f)$ de f.
3) Décrire les courbes de niveau de $f$, c-à-d les courbes d'équation $f(x,y) = c$ dans le plan $xoy$, où $c$ est une constante arbitraire dans $W(f)$.

## Exercice 2:

Soit $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

a) Donner le domaine de définition $D(f)$ de $f$.
Dessiner $D(f)$ dans le plan $xoy$.
b) Donner l'ensemble des valeurs $W(f)$ de $f$.
Indication: on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
c) Décrire les courbes de niveau de $f$.

## Exercice 3:

$$\text{Soit } f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Etudier la continuité de $f$ en $(0,0)$.

## Exercice 4:

$$\text{Soit } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de $f$ en $(0,0)$.
2) La fonction $f$ admet-elle des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
3) $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Exercice 5:

$$\text{Soit } f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de $f$ en $(0,0)$ (utiliser les coordonnées polaires).
2) Calculer $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$, pour tout $(x,y)$ dans $I\!R^2$.
3) $f$ est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.
4) Camparer $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$. Conclure.

## Exercice 6:

Soit $h$ une fonction d'une seule variable, dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer les dériveées partielles premières de la fonction $f(x,y)=h\left(log(1+x^2+y^2)\right)$
b) On suppose $h(x)=\sin(x)$. Calculer $df$

## Exercice 7:

1) Soit $h$ une fonction numérique d'une seule variable, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $f(x,y)=xh(2x+y)$ vérifie l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}-2x\frac{\partial f}{\partial y}=f. \qquad (E)$$

2) Trouver une solution de $(E)$ qui vérifie $f(1,y)=y^2$.
3) On pose $x=v, y=u-2v, F(u,v)=f(v,u-2v)$.
   a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$.
   b) Réecrire l'équation $(E)$ en fonction de $u$ et $v$ et résoudre l'équation obtenue.
   c) Déterminer alors les solutions de $(E)$.

## Exercice 8:

Soit la fonction $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$
1) Trouver les points critiques de $f$.
2) Préciser la nature de chaque point critique.

## Exercice 9:

On considère la forme différentielle .

$$\omega=(x^2-y^2-1)dx+2xydy.$$

a) Vérifier que $\omega$ n'est pas exacte. Trouver un facteur intégrant sous la forme $m(x,y)=m(x)$ dans $\{(x,y)\in I\!R^2,\ x>0\}$.
b) En déduire la résolution de l'équation différentielle

$$2xyy'-y^2=1-x^2$$

## Correction :

soit la fonction définie par $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$

1/ Domaine de définition $D(f)$ de $f$.

on a $D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \log(1+x^2+y^2) \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1+x^2+y^2 > 0 \}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $1+x^2+y^2$ toujour strictement positif.

$\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^2$

2) Domaine des valeurs $W(f)$ de $f$.

on a $W(f) = \{ f(x,y) / (x,y) \in D(f) \}$

$= \{ \log(1+x^2+y^2) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

on utilison les coordonnées polaires

posons $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & ; \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Alors $1+x^2+y^2 = 1 + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1})$

$1+x^2+y^2 = 1+r^2$

$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) = \log(1+r^2) = g(r)$

on a alors $W(f) = \{ \log(1+x^2+y^2) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ \log(1+r^2) / r \in [0, +\infty[ \}$

$= \{ g(r) ; r \in [0, +\infty[ \}$

$= g([0, +\infty[)$

$= [g(0), \lim_{r \to +\infty} g(r)[$ $\quad$ $g$ est bijective. à démontrer.

$= [0, +\infty[ = \mathbb{R}^+$

avec $g(0) = \log(1+0^2) = 0$ ; $\lim_{r \to +\infty} \log(1+r^2) = +\infty$

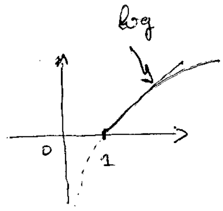
* il faut montrer que $g(r)$ est bijective sur $[0,+\infty[$

on a $g(r) = \log(1+r^2)$

$g$ est une fonction strictement croissante sur $[0,+\infty[$

en effet :

Soient $r_1, r_2 \in [0,+\infty[$ tels que $r_1 < r_2$




on a $0 \leq r_1 < r_2$

$\Rightarrow 0 \leq r_1^2 < r_2^2$

$\Rightarrow 1 \leq 1+r_1^2 < 1+r_2^2$

$\Rightarrow \log(1) \leq \log(1+r_1^2) < \log(1+r_2^2)$ car log strictement $\nearrow$ sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow g(r_1) < g(r_2)$

$\left\{\begin{array}{l} r_1 < r_2 \\ g(r_1) < g(r_2) \end{array}\right. \Rightarrow$ $g$ est une fonction strictement croissante sur $[0,+\infty[$

$g$ continue est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc $g$ est bijective de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.

3/ les courbes de niveau de $f$ sont données par l'équation

$f(x,y) = c$ où $c \in W(f) = \mathbb{R}^+$

$f(x,y) = c \Leftrightarrow \log(1+x^2+y^2) = c \Leftrightarrow 1+x^2+y^2 = e^c$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = e^c - 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+y^2 = (\sqrt{e^c-1})^2}_{\text{équation du cercle}}$ $\left(\begin{array}{l}\text{car } c \geq 0 \\ \Rightarrow e^c - 1 \geq 0\end{array}\right)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{C}(0, \sqrt{e^c-1})$

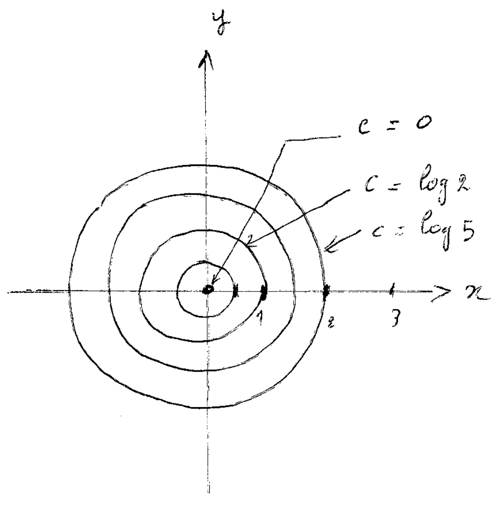
les courbes de niveau de $f$ sont donc les cercles de centre $O(0,0)$ et de rayon $R_c = \sqrt{e^c-1}$

$c \in W(f) = [0,+\infty[$

pour $c = 0$ on a $R_0 = \sqrt{e^0-1} = 0$

pour $c = \log(2)$ on a $R_{\log(2)} = \sqrt{2-1} = 1$

pour $c = \log(5)$ on a $R_{\log(5)} = \sqrt{5-1} = 2$



**Exercice 2** Soit $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$

a/ Domaine de définition $D(f)$ de $f$.

on a $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \in \mathbb{R}\}$

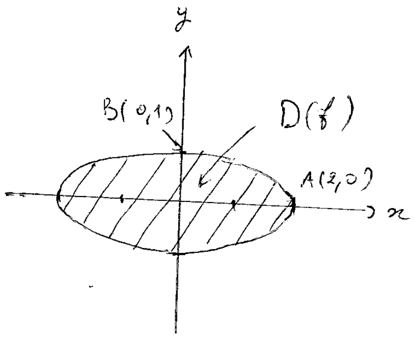
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4 - x^2 - 4y^2 \geq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leq 4\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 \leq 1\}$

$D(f)$ est l'ellipse de centre $O$ et de demi-axes $OA = 2$ et $OB = 1$




Rappel :

équation de cercle $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

équation de disque $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2$

équation d'ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq \mathbb{R}$.

b/ Ensemble des valeurs $W(f)$ de $f$.

on a $W(f) = \{f(x,y) / (x,y) \in D_f\}$

$= \{\sqrt{4-x^2-4y^2} / \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$

et posons $\begin{cases} \frac{x}{2} = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ; $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Alors $0 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \iff 0 \leq \frac{1}{4} \times 4r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leq 1 \iff 0 \leq r^2 \leq 1$

$\sqrt{4-x^2-4y^2} = \sqrt{4 - 4r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta} = \sqrt{4 - 4r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{4-4r^2} = g(r)$

$\Rightarrow W(f) = \{\sqrt{4-x^2-4y^2} / \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$

$= \{\sqrt{4-4r^2} / 0 \leq r \leq 1$

$\Rightarrow W(f) = \{ g(r) \ / \ r \in [0,1] \}$
$= g([0,1])$

on a $g(r) = \sqrt{4-4r^2}$ $\forall r \in [0,1]$

g étant une fonction continue et strictement décroissante sur $[0,1]$, donc g est bijective de $[0,1]$ sur $g([0,1]) = [g(1), g(0)]$

$g(0) = \sqrt{4-0} = 2$
$g(1) = \sqrt{4-4} = 0$ $\Rightarrow g([0,1]) = [g(1), g(0)] = [0,2]$

finalement $\boxed{W(f) = [0,2]}$

c/ les courbe de niveau de f

- les courbes de niveau de f sont données par l'équation

$f(x,y) = c$ avec $c \in W(f) = [0,2]$

$f(x,y) = c \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2-4y^2} = c \Leftrightarrow 4-x^2-4y^2 = c^2$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = -c^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{4-c^2}{4}$

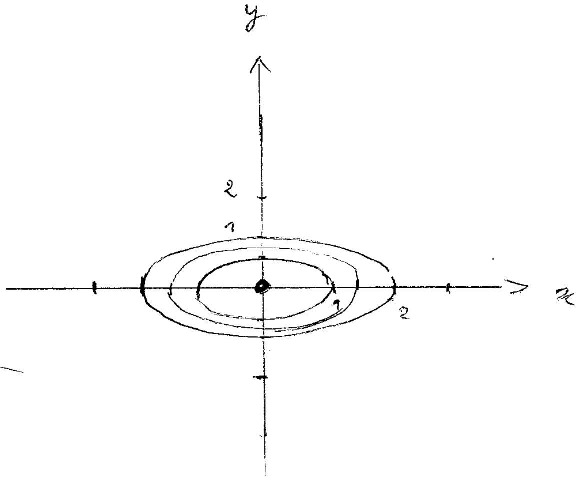
* si $c = 2$ dans ce cas on obtient $f(x,y) = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0, \ y = 0$

* si $c \in [0,2[$ dans ce cas on aura $f(x,y) = c$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = \frac{4-c}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{4(4-c^2)}{4}} + \frac{y^2}{\frac{4-c^2}{4}} = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{4-c^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{4-c^2}}{2}}\right)^2 = 1$ les courbe de niveau de f sont les ellipses de centre $O(0,0)$ et de demi-axe $A_c = \sqrt{4-c^2}$ et $B_c = \frac{\sqrt{4-c^2}}{2}$, avec $c \in [0,2[$

Conclusion: les courbe de niveau de f sont les point $(0,0)$ et les ellipse de centre $O(0,0)$ et de demi-axes $\sqrt{4-c^2}$ et $\frac{\sqrt{4-c^2}}{2}$




si $c = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 2 \\ B_0 = 1 \end{cases}$

$c \in [0,2[$

si $c = 1 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \sqrt{3} \\ B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ex :

Soit $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

on a $0 \leqslant \left|\sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)\right| \leqslant 1$

donc $0 \leqslant \left|(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)\right| \leqslant |x^2+y^2|$

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant x^2+y^2$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

D'où $f$ est continue au point $(0,0)$

2 ème Méthode

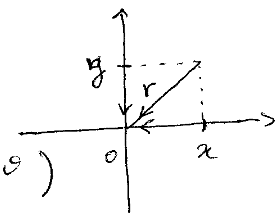
on pose $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; \quad r \geqslant 0 \\ y = r\sin\theta & ; \quad \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

Alors $f(x,y) = (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\sin\left(\dfrac{\cancel{xy}\ r\cos\theta\, r\sin\theta}{\cancel{x^2}\ r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}\right)$

$$= r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\sin\left(\frac{\cancel{r^2}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right)$$

$$= r^2\sin(\cos\theta\sin\theta)$$

$$= r^2\sin\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$




par la suite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2\sin\left(\dfrac{\sin 2\theta}{2}\right)$

$$= 0 \quad \forall\theta$$

on a alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

D'où $f$ est continue au point $(0,0)$

Exercice : Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1/ la continuité de $f$ en $(0,0)$

* pour ($\Delta$ : $x=y$) où $\Delta$ une droite qui passe par le point $(0,0)$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2+y^2}$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y^2}{2y^2}\right) = \frac{1}{2}$$

* pour $\Delta'$ : $x=-y$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=-y}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{2y^2} = -\frac{1}{2}$$

comme $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x,y) = \frac{1}{2} \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=-y}} f(x,y) = -\frac{1}{2}$

Alors $f$ n'est pas continue en $(0,0)$

2/ * pour $f'_x(0,0)$

on a $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{0-0}{x}\right) = 0$

* pour $f'_y(0,0)$

on a $f'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \left(\dfrac{0-0}{y}\right) = 0$

d'où $f$ admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$

3/ la différentiabilité en (0,0)

pour cela montrons que :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{h^2+k^2}-0-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$f(0,0)=0$

$f'_x(0,0)=0$

$f'_y(0,0)=0$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2}$$

$$\frac{hk\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{hk\times hk}{h^2+k^2}}$$

$0 \leqslant \left|\sqrt{\frac{hk}{h^2+k^2}}\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $0 \leqslant \left|\sqrt{\frac{(hk)^2}{h^2+k^2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}|hk|$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \lim_{(h,k)} \left|\frac{hk\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2}\right| \leqslant \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{2}}|hk| = 0$$

donc $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} = 0$

comme $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-f'_x(0,0)h-f'_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Alors $f$ est différentiable en (0,0)

Exercice :

soit $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1/ La continuité de $f$ en $(0,0)$

on pose $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; \quad r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & ; \quad \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$

Alors $f(x,y) = f(r) = r^2\cos\theta\sin\theta\left(\dfrac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right)$

$= r^2\cos\theta\sin\theta\left(\dfrac{\cancel{r^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\right)$

avec $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ , $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

$2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \cos 2\theta$

donc $f(r) = r^2\dfrac{\sin 2\theta}{2} \times \dfrac{\cos 2\theta/2}{} = \dfrac{r^2}{4}\sin(2\theta)\cos(2\theta)$

par suite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{r^2}{4}\sin(2\theta)\cos(2\theta)\right) \quad \forall\theta$

$= 0$

on a alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

D'où $f$ est continue au point $(0,0)$

2/ calculons $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

* Calcule de $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$ on a $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$

$f'_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)$

$$f'_x(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^3y - xy^3)\times(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\times 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)\times 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5 - 3x^3y^2 + x^3y^2 - 3xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

* calcule de $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0\times\frac{h^2-0}{h^2+0} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}(0) = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{0\times k\,\frac{0-k^2}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} (0) = 0$$

conclusion:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^4x - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3/ calculons la $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y)$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y)$

pour cela, utilisons les coordonnées polaires.

Poson $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; \quad r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & ; \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^4\theta\sin\theta + 4r^5\cos^2\theta\sin^3\theta - r^5\sin^5\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r \times \left[\cos^4\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta\right]$$

$$= 0 \quad \forall\, \theta$$

Alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = 0 = f'_x(0,0)$

donc la fonction $f'_x$ est continue au point $(0,0)$

De même

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^5\theta - r^5\cos\theta\sin^4\theta - 4r^5\sin^2\theta\cos^3\theta}{(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\times\left[\cos^5\theta - \cos\theta\sin^4\theta - 4\sin^2\theta\cos^3\theta\right]$$

$$= 0 \quad \forall\theta$$

on a alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = 0 = f'_y(0,0)$

donc la fonction $f'_y$ est continue au point $(0,0)$

Finalement :

$f'_x$ et $f'_y$ existent et sont continues au point $(0,0)$
donc $f$ est une fonction différentiable au point $(0,0)$

4/ on a $f''_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)(0,0)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = +1$$

de même $f''_{yx}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)(0,0)$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{-k^5/k^4 - 0}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{-k^5}{k^5} = -1$$

on a alors $f''_{xy}(0,0) = 1 \neq f''_{yx}(0,0) = -1$

## Exercice :

Soit $f$ la fonction de deux variables définie

par : $f(x,y) = h\left(\log(1+x^2+y^2)\right)$, $h$ fonction de seule variable dérivable sur $\mathbb{R}$.

a/ calcule de $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ $\qquad (h \circ g)' = g' . h'(g)$

* $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ h\left[\log(1+x^2+y^2)\right]\right\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\log(1+x^2+y^2)\right] . h'\left[\log(1+x^2+y^2)\right]$$
$$= \frac{2x}{1+x^2+y^2} . h'\left[\log(1+x^2+y^2)\right] \qquad \left((\log u)' = \frac{u'}{u}\right)$$

* $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{ h\left[\log(1+x^2+y^2)\right]\right\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\log(1+x^2+y^2)\right] . h'\left[\log(1+x^2+y^2)\right]$$
$$= \frac{2y}{1+x^2+y^2} . h'\left[\log(1+x^2+y^2)\right]$$

b/ on suppose que $h(x) = \sin(x)$, dans ce cas on aura

$$h'(x) = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

par suite

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} . dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} . dy$$

$$= \frac{2x}{1+x^2+y^2} \cos\left[\log(1+x^2+y^2)\right] . dx + \frac{2y}{1+x^2+y^2} \cos\left[\log(1+x^2+y^2)\right] dy$$

Exercice :

Soit $h$ une fonction numérique d'une seule variable, dérivable sur $\mathbb{R}$.
et soit $f$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = x.h(2x+y).$$

1/ Montrons que $f$ est solution de l'équation (E)

on a
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x.h(2x+y)\right]$$
$$= h(2x+y) + x.\frac{\partial}{\partial x}\left[h(2x+y)\right]$$
$$= h(2x+y) + x.\frac{\partial}{\partial x}(2x+y).h'(2x+y)$$
$$= h(2x+y) + 2x.h'(2x+y)$$

de même
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x.h(2x+y)\right]$$
$$= 0 + x\frac{\partial}{\partial y}(2x+y).h'(2x+y)$$
$$= x.h'(2x+y)$$

on obtient alors :
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - 2x\frac{\partial f}{\partial y} = x.\left[h(2x+y) + 2x.h'(2x+y)\right] - 2x\left[x.h'(2x+y)\right]$$
$$= xh(2x+y) + \cancel{2x^2h'(2x+y)} - \cancel{2x^2h'(2x+y)}$$
$$= xh(2x+y)$$
$$= f(x,y)$$

Donc $f$ vérifie bien l'équation (E)

2/ cherchons une solution de (E) de la forme $f(x,y) = xh(2x+y)$
vérifiant $f(1,y) = y^2$

Alors $f(1,y) = y^2 \iff 1.h(2.1+y) = y^2$

posons $t = 2+y \Rightarrow y = t-2$

$$f(1,y) = y^2 \Leftrightarrow h(2+y) = y^2$$
$$\Leftrightarrow h(t) = (t-2)^2$$

donc $f(x,y) = x\, h(2x+y)^2$
$$= x(2x+y-2)^2$$

Finalement une solution de (E) vérifiant $f(1,y) = y^2$ est donnée par $f(x,y) = x(2x+y-2)^2$

3/ on pose $x = v$ et $y = u - 2v$

a/ Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$

* $$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(v) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(u-2v)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\times 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\times 1$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}$$

* $$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial v}(v) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(u-2v)}\ \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(u-2v)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}\times(-2)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y}$$

donc $$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - 2\times\frac{\partial F}{\partial u}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

b/ En remplaçant dans l'équation (E) on obtient

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - 2x\frac{\partial f}{\partial y} = f \Rightarrow v.\left[2\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right] - 2v\left[\frac{\partial F}{\partial u}\right] = F$$

$$\Rightarrow \cancel{2v\frac{\partial F}{\partial u}} + v\frac{\partial F}{\partial v} - \cancel{2v\frac{\partial F}{\partial u}} = F$$

$$\Rightarrow v\frac{dF}{dv} = F$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dv} = \frac{dv}{v} \Rightarrow \int \frac{dF}{F} = \int \frac{dv}{v}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log}|F| = \log|v| + g(u)$$

où $g$ est une fonction d'une seul variable dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow |F| = e^{\log|v| + g(u)}$$

$$= e^{\log|v|}\, e^{g(u)}$$

$$= |v| .\, e^{g(u)}$$

$$\Rightarrow F(u,v) = \pm v\, e^{g(u)}$$

$$= \pm v\, h(u)$$

$h(u) = \pm e^{g(u)}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

d'aprés (1) on a $f$ soulustion de (E)

$$\Rightarrow F(u,v) = v\, h(u)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x\, h(2x+y) \quad \text{car} \begin{cases} x = v \\ y = u - 2v \end{cases}$$

Exercice 9 :

soit $f(x,y) = x^y$ , $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

et soit $(x_0, y_0) = (1,1)$

Alors $x_0 + h = 0{,}98 \Rightarrow h = 0{,}98 - 1 \Rightarrow h = -0{,}02$

$y_0 + k = 1{,}01 \Rightarrow k = 1{,}01 - 1 \Rightarrow k = 0{,}01$

on a $f$ est une fonction de classe $C^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

et $(1,1) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Donc

pour $(h,k) = (-0{,}02, 0{,}01)$ on a

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} +$$

$$\frac{1}{2}\left\{ h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right\} + (h^2+k^2)\,\mathcal{E}(h,k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \mathcal{E}(h,k) = 0$

on a $f(x,y) = x^y = e^{y\ln(x)}$

- $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{y}{x} e^{y\ln(x)} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \underline{1}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2} e^{y\ln(x)} + \dfrac{y^2}{x^2} e^{y\ln(x)} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 1-1 = \underline{0}$

* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x)\, e^{y\ln(x)} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \underline{0}$

* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \ln^2(x)\, e^{y\ln(x)} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \underline{0}$

- $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} f(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x)\, e^{y\ln(x)}\right) = \dfrac{1}{x} e^{y(\ln(x))} + \dfrac{y\ln(x)}{x} e^{y\ln(x)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = \underline{1}$$

En remplaçant dans la formule précédente on obtient

$$0,98^{1,01} = f(1+(-0,02),\ 1+(0,01))$$

$$0,98^{1,01} \simeq f(1,1) + (-0,02)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + (0,01)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) + \frac{1}{2}\Big\{ (0,02)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) + 2(-0,02)(0,01)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) + (0,01)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\Big\}$$

$$0,98^{1,01} \simeq 1 + (-0,02)\times(1) + \frac{1}{\cancel{2}}\Big\{\cancel{2}\times(-0,02)(0,01)\times(1)\Big\}$$

$$\simeq 1 - 0,02 - 0,0002$$

$$\simeq 1 - 0,0202$$

$$\Rightarrow \boxed{0,98^{1,01} \simeq 0,9798}$$

Exercice :

1/ $f(x,y) = (x+y)\, e^{-(x^2+y^2)}$

on a

* $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2x(x+y)\, e^{-(x^2+y^2)} = (1 - 2x^2 - 2xy)\, e^{-(x^2+y^2)}$

* $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x+y)\, e^{-(x^2+y^2)} = (1 - 2xy - 2y)\, e^{-(x^2+y^2)}$

Les points critiques de $f$ sont les points solutions du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2x^2-2xy)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ (1-2y^2-2xy)\, e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 1-2x^2-2xy = 0 \\ 1-2y^2-2xy = 0 \end{cases} \qquad (e^{-(x^2+y^2)} \neq 0)$$

$$\underset{L_2-L_1}{\Rightarrow} \begin{cases} 1-2x^2-2xy = 0 \\ 2x^2-2y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 0 \\ 1-2x^2-2yx = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ 1-2x^2-2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \quad \text{ou} \quad x = -y \\ \text{et} \\ 1-2x^2-2xy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \quad \text{et} \quad 1-2x^2-2xy = 0 \\ \text{ou} \\ x = -y \quad \text{et} \quad 1-2x^2-2xy = 0 \end{cases} \qquad \left( \begin{matrix} (A \text{ ou } B) \text{ et } C \\ (A \text{ ou } C) \text{ et } (B \text{ ou } C) \end{matrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \quad \text{et} \quad 1-4x^2 = 0 \\ \text{ou} \\ x = -y \quad \text{et} \quad 1 = 0 \quad (\text{impossible}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y \quad \text{et} \quad 1-4x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = y \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = y \quad \text{et} \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(x = y = \frac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \left(x = y = -\frac{1}{2}\right)$$

Les points critique de $f$ sont donc les points $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $M_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2) La nature de chaque point critique.

on a
* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-2x^2-2xy)\, e^{-(x^2+y^2)}$
* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-2y^2-2xy)\, e^{-(x^2+y^2)}$

• $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (-4x-2y)e^{-(x^2+y^2)} - 2x(1-2x^2-2xy)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= (-4x-2y-2x+4x^3+4x^2y)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$= (4x^3+4x^2y-6x-2y)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-4y - 2x)e^{-(x^2+y^2)} - 2y(1-2y^2-2xy)e^{-(x^2+y^2)}$

$= (-4y - 2x - 2y + 4y^3 + 4xy^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$

$= (4y^3 + 4xy^2 - 6y - 2x)\,e^{-(x^2+y^2)}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2y^2-2xy)e^{-(x^2+y^2)}\right]$

$= -2y\,e^{-(x^2+y^2)} - 2x(1-2y^2-2xy)e^{-(x^2+y^2)}$

$= (-2y - 2x + 4xy^2 + 4x^2y)\,e^{-(x^2+y^2)}$

posons $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)$

➢ Nature du point critique $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

on a • $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = e^{-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}\left(4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 6\times\frac{1}{2} - 2\times\frac{1}{2}\right)$

$= e^{-1/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3 - 1\right) = \underline{-3e^{-1/2}}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(4\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) - 6\times\left(\frac{1}{2}\right) - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)\right)e^{-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}$

$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3 - 1\right)e^{-1/2} = \underline{-3e^{-1/2}}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left[-2\times\left(\frac{1}{2}\right) - 2\times\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right]e^{-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}$

$= \left(-1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)e^{-1/2} = \underline{-e^{-1/2}}$

on a alors $\Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$

$= \left(-e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 - 9\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= e^{-1} - 9e^{-1}$

$\Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -8e^{-1} < 0$

de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -3e^{-1/2} < 0$

donc $f$ admet un maximum au point $M_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

➢ Nature du point critique $M_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

par un simple calcule on trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = 3e^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = 3e^{-1/2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2}$$

$$\Delta(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\right)$$

$$= (e^{-1/2})^2 - 9e^{-1/2}e^{-1/2} = e^{-1} - 9e^{-1}$$

* $\Delta(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = -8e^{-1} < 0$
* de plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = 3e^{-1/2} > 0$

donc $f$ admet un minimum au point $M_2(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})$

** Conclusion

- $f$ admet un maximum au point $M_1(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$
- $f$ admet un minimum au point $M_2(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})$

## Exercice :

$$w = (x^2 - y^2 - 1)\,dx + 2xy\,dy.$$

a/ on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2-1) = -2y$$

on a $\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \neq \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2-1) = -2y.$

donc $w$ n'est pas exacte.

Rappelons que : si $m(x)$ est un facteur intégrant de $w = P\,dx + Q\,dy$, alors $\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$w = P\,dx + Q\,dy$, avec $\begin{cases} P = x^2 - y^2 - 1 \\ Q = 2xy \end{cases}$

$m(x)$ est un facteur intégrant de $w \Rightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{2xy}\left(-2y-2y\right) = \frac{1}{2xy}(-4y) = -\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \log|m(x)| = -2\log|x| + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |m(x)| = e^{-2\log|x|+c} = e^{\log|x|^{-2}} \cdot e^{c}$$

$$\Rightarrow |m(x)| = |x|^{-2} e^{c} = \frac{e^{c}}{|x|^{2}}$$

$$\Rightarrow m(x) = \pm \frac{e^{c}}{x^{2}}$$

$$\Rightarrow m(x) = \frac{k}{x^2} \quad , k \in \mathbb{R}$$

Comme on cherche un seul facteur intégrant, il suffit de prendre $k=1$ et $\boxed{m(x) = \frac{1}{x^2}}$

$m(x) = \frac{1}{x^2}$ facteur intégrant de $w \Rightarrow \exists f$ différentiable tq ~~$\frac{w}{f}$~~ $m(x)\, w = df$

$$\Rightarrow \frac{w}{x^2} = df \Leftrightarrow \frac{x^2-y^2-1}{x^2}\,dx + \frac{2xy}{x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

$$\begin{array}{l} ① \\ \\ ② \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2-y^2-1}{x^2} = 1 - \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{x^2} = \frac{2y}{x}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = \int \frac{2xy}{x^2}\,dy = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\frac{y^2}{x} + g(x) \\ 1 - \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cancel{\frac{-y^2}{x^2}} + g'(x) \end{cases}$$

, $g(x)$ une fonction de variable $(x)$ dérivable.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = \frac{y^2}{x} + g(x) \\ g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x,y) = \frac{y^2}{x} + g(x) \\ g(x) = x - \frac{1}{x} + C_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{y^2}{x} + x - \frac{1}{x} + C_1 \quad , C_1 \in \mathbb{R}.$$

b/ $2xyy' - y^2 = 1 - x^2$

$\Rightarrow 2xyy' + x^2 - y^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 - y^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow 2xy \cdot dy + (x^2 - y^2 - 1)\,dx = 0$

$\Rightarrow \omega = 0$

$\Rightarrow \frac{\omega}{x^2} = 0 \Rightarrow df = 0$

$\Rightarrow f = \lambda = cst$

$\Rightarrow f(x,y) = \frac{y^2}{x} + x + \frac{1}{x} = \lambda = cst$

Conclusion les solustions de l'equation déffèrentielle $2xyy' - y^2 = 1 - x^2$ sont donneés par :

$$\frac{y^2}{x} + x + \frac{1}{x} = cst$$

# Contrôle 1 Electricité 1: 2004/2005

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

**N.B. Pour l'exercice I, répondre brièvement mais de manière précise.**

## Exercice I :

A- Soit un conducteur plein (C ) qui a la forme d'un ellipsoïde (**voir figure 1-a**). Ce conducteur (C ) porte une charge **Q** positive, isolé et en équilibre électrostatique.

Répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses :

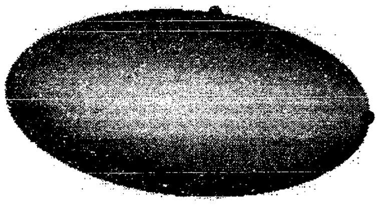



**Figure 1-a**

**1** - Le champ est - il nul à l'intérieur de (C ) ?

**2** - Le potentiel est - il le même en **A** et en **A'** ?

(les points A et A' étant deux points de la surface du conducteur (C ) (**voir fig. 1-a**)).

**3** - La densité de charges volumiques est - elle positive, négative ou nulle ?

**4** - La densité de charges est - elle la même en **A** et en **A'** ?.

**5** - Les modules des champs au voisinage des points **A** et **A'** sont – t – ils les mêmes ?.

**B** - On approche du conducteur (C ) une sphère conductrice (S) initialement neutre et isolée (**figure 1-b**). L'ensemble des deux conducteurs est en équilibre électrostatique.

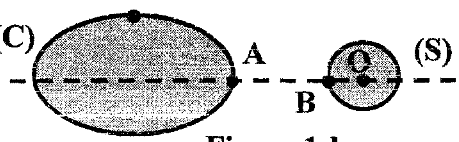



**Figure 1-b**

**1** - Les conducteurs (C ) et (S) sont - ils en influence totale ? justifier votre réponse.

**2** - Illustrer sur le même schéma :

**a** - La répartition des charges sur les conducteurs (C ) et (S).

**b** - Une représentation des lignes de champ entre les deux conducteurs.

**3** - Comparer les valeurs du potentiel en **A** et au point **B**.

**4** - Que se passera -t- il si on relie la sphère (S) au sol.

## Exercice II :

On considère le circuit de la **figure 2-a**

**1**- En appliquant les lois de Kirchhoff, déterminer les courants $I_1$, $I_2$ et $I_3$ en fonction de **E**, $R_1$, $R_2$.. et $R_3$ .

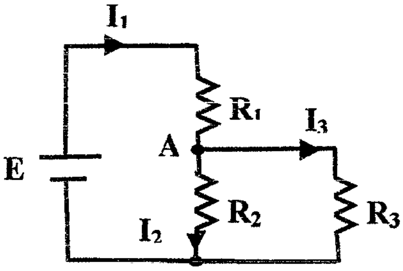



**figure 2-a**

Pour les questions suivantes, on prendra $R_1 = R_2 = R_3 = R$

**2** - On branche aux bornes de la résistance $R_3$ un dipôle (**E', r'**) (voir **figure 2-b**), par application du théorème de Thevenin, déterminer le courant **I'** traversant le dipôle (**E', r'**) (on donnera l'expression littérale de I').

**3**- On donne E = 40V, E'=10 V, r' = 2 Ω et R = 24 Ω, calculer numériquement le courant **I'**. Le dipôle (**E', r'**) est - il un générateur ou un récepteur ?.Justifier votre réponse.

**4**- Calculer la puissance **P** consommée par le dipôle (**E', r'**).

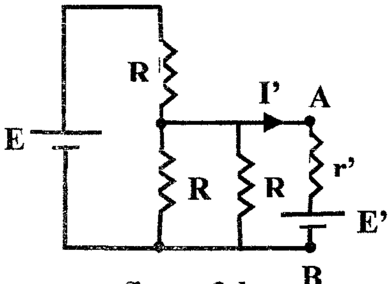



**figure 2-b**

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

## Correction :

1- oui le champ à l'interieur est nul.
car :
- le champ est nul à l'interieur d'un conducteur en equilibre
ou - les charges immobiles à l'interieur du conducteur ce qui implique la somme des forces électrique est nulle. ($\vec{F}=\vec{0}$)
$\vec{F} = q\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

2- Oui le potentiel est le même en A et A' car :
- Le conducteur en équilibre électrostatique $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$
on a $\vec{E} = -\vec{grad}\, V = \vec{0} \Rightarrow V = cst \Rightarrow V_A = V_{A'}$

3- La densité des charges volumiques est nulle car :
d'aprés la relation de la forme locale du théorème de Gauss $div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et puisque $E = 0$ à l'interieur du conducteur $\Rightarrow 0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = 0$ ($\varepsilon_0 \neq 0$)

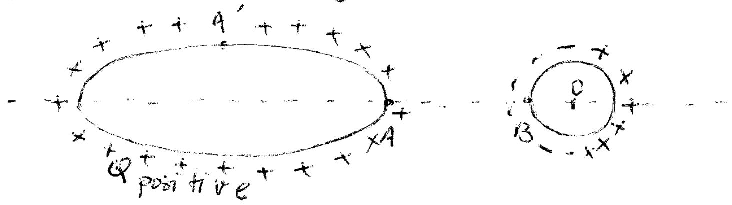
4- La densité de charge en A et en A' n'est pas la même
car :
- La forme de la surface en A et en A' n'est pas la même
ou - Le rayon de courbure en A et en A' n'est pas le même

5- Le champ au voisinage de A et A' n'est pas le même car :
d'après le théorème de coulomb, le champ au voisinage d'un point du conducteur en équilibre dépend de la densité en ce point et comme $\sigma(A) \neq \sigma(A')$ ce ci implique donc que les champs au voisinage de A et A' sont differents.

B-

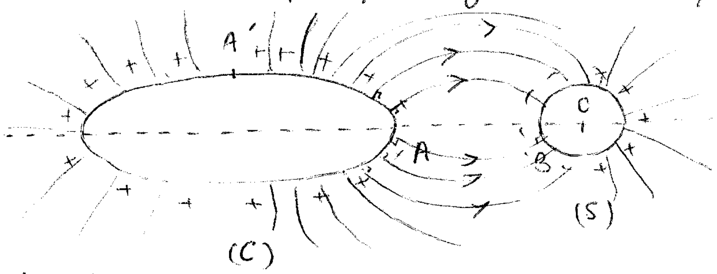
1- Non, les deux conducteurs sont en influence partielle car :
- aucun conducteur n'entoure pas l'autre.
ou - toutes les lignes de champ partant du conducteur (C) n'arrivent pas totalement au conducteur (S)

2- a : La répartition des charges sur les deux conducteurs



Les charges positives du conducteur (C) attirent les charges négatives du conducteur (S) et repoussent les charges positives.

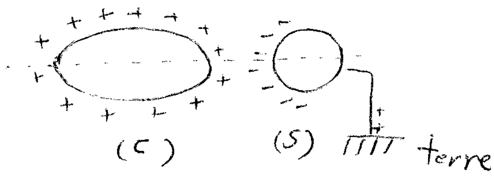
b- La représentation de quelque lignes de champ.




Les lignes de champ partent de (C) perpendiculaires à la Surface et aboutissent à (S) également perpendiculaires à la surface.

3- le potentiel en B et inférieur en A  ($V(B) < V(A)$)
car: de A vers B les potentiels décroissante ($\vec{E} = -\vec{grad}\,V$)

4- Si on relie (S) au sol les charges positives du conducteur (S) vont s'écouler vers la terre



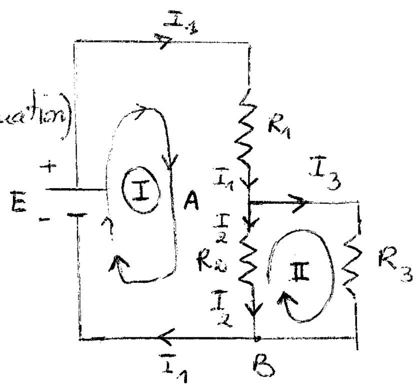

## Exerice II

1- Application des lois de Kirchoff (loi des noeud et loi des mailles) au Circuit de la figure 2-a

* Loi des nœuds (

noeud A → $I_1 = I_2 + I_3$

noeud B → $I_2 + I_3 = I_1$ (même équation)

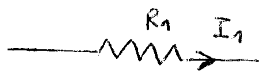



=> $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (1)

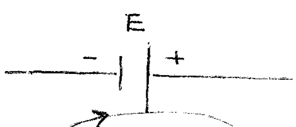
* Loi des mailles :

dans le circuit il y'a deux mailles indépendantes (I) et (II)

maille (I) : $-E + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0$



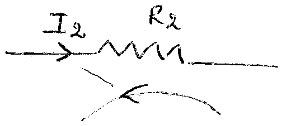

$+ R_1 I_1$ (mêm sens)



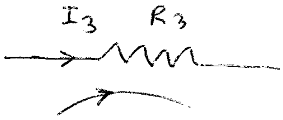

- on met (-)E car on rencontre le pôle (-) en premier
- si on rencontre le pôle (+) en premier on met (+ E)

$\Rightarrow \quad R_1 I_1 + R_2 I_2 = E \quad (2)$

→ maille (II) : $\quad - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \quad (3)$




on met (−) devant $R_2 I_2$ car le sens de parcours est different que celui du courant $I_2$,




on met (+) devant $R_3 I_3$ car le Sens de parcours est le même que celui du courant $I_3$

les relations (1), (2) et (3) forment le système suivant:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 & (1) \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0 = E & (2) \\ 0 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \quad R_2 I_2 = E - R_1 I_1 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{E}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} I_1 \quad (2)'$

$(3) \Leftrightarrow \quad R_3 I_3 = R_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{R_2}{R_3} I_2 \quad (3)'$

$(3)'$ dans $(1)$ $\Rightarrow \quad I_1 - I_2 - \frac{R_2}{R_3} I_2 = 0$

$\Rightarrow \quad I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0 \quad (1)'$

$(2)'$ dans $(1)'$

$\Rightarrow \quad I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)\left(\frac{E}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} I_1\right) = 0$

$\Rightarrow \quad I_1 - \left[\frac{E}{R_2} - \frac{\cancel{R_2}}{R_3}\frac{R_1}{\cancel{R_2}} I_1 + \frac{\cancel{R_2}}{R_3}\frac{E}{\cancel{R_2}} - \frac{\cancel{R_2}}{R_3}\frac{R_1}{\cancel{R_2}} I_1\right] = 0$

$\Rightarrow \quad I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) - \left(\frac{E}{R_2} + \frac{E}{R_3}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad I_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right) = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3}$

$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}\right)}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_2 R_1}}$$

* pour $I_2$

$$(2) \Leftrightarrow \quad R_1 I_1 = E - R_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{E}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2 \quad (2)''$$

$$(1)' \Rightarrow \quad I_1 - \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0$$

$(2)''$ dans $(1)'$ $\Rightarrow \quad \dfrac{E}{R_1} - \dfrac{R_2}{R_1} I_2 - \left(1 + \dfrac{R_2}{R_3}\right) I_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad - I_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}\right) = -\frac{E}{R_1}$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{E}{R_1} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{R_3 E}{R_3 R_1} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_2 = \frac{R_3 E}{R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_3 R_2}}$$

pour $I_3$

on a $\quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_3 = I_1 - I_2$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \frac{E R_2}{R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_2 R_1} + \cancel{\frac{E R_3}{R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_2 R_1}} - \cancel{\frac{R_3 E}{R_3 R_1 + R_1 R_2 + R_3 R_2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_3 = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3 R_2}}$$

2ème Méthode :

on a $\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0 = E \\ 0 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I$ : la matrice associé au système

donc $\quad I_1 = \dfrac{\Delta I_1}{\Delta}$ , $I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta}$ et $I_3 = \dfrac{\Delta I_3}{\Delta}$

avec $\Delta = \det A$ le déterminant associé au système

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} , \quad \Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & -R_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$* \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} R_2 & 0 \\ -R_2 & R_3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & -R_2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\left[R_2R_3 - (0 \times (-R_2))\right] + 1\left[R_1R_3 - 0 \times 0\right] - 1\left[-R_1R_2 - R_2 \times 0\right]$$

$$= R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2$$

* pour $I_1$ : $I_1 = \dfrac{\Delta I_1}{\Delta}$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix}$$ en remplaçant la 1er colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= 0 \times \begin{vmatrix} R_2 & 0 \\ -R_2 & R_3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & R_3 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} E & R_2 \\ 0 & -R_2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + ER_3 - 1(E(-R_2)) = ER_3 + ER_2$$

$$= (R_2 + R_3)E$$

donc $I_1 = \dfrac{(R_2+R_3)E}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$

* pour $I_2$ : $I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta}$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix}$$ en remplaçant la 2ème colonne $\begin{pmatrix} -1 \\ R_2 \\ -R_2 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= ER_3$$

donc $I_2 = \dfrac{R_3E}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$

* pour $I_3$ : $I_3 = \dfrac{\Delta I_3}{\Delta}$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & -R_2 & 0 \end{vmatrix}$$ en remplaçant la 3ème colonne $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ R_3 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= -(E(-R_2)) = R_2E$$

$$I_3 = \frac{R_2E}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

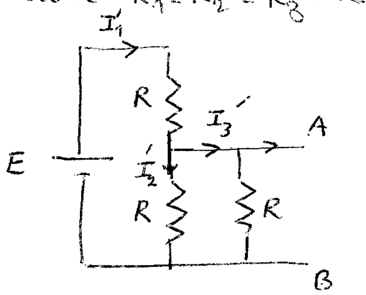
Par la suite on prendra $R_1 = R_2 = R_3 = R$

2 – Application du théorème de Thevenin

* On enlève la branche AB contenant le dipôle $(E', r')$

le montage devient celui de la figure 2-a avec $R_1 = R_2 = R_3 = R$

* Tension de Thevenin $E_{Th}$.




$$E_{Th} = (V_A - V_B)_{\text{à vide}} = R I_3'$$

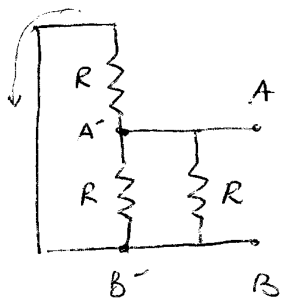
avec $I_3' = \dfrac{RE}{R^2 + R^2 + R^2} = \dfrac{\cancel{R}E}{3R^{\cancel{2}}}$

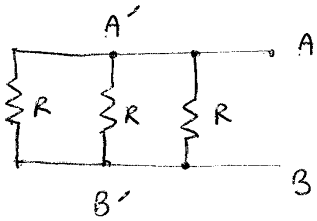
donc $I_3' = \dfrac{E}{3R}$

$$\Rightarrow \quad E_{Th} = \frac{\cancel{R}E}{3\cancel{R}} \quad \Rightarrow \quad E_{Th} = \frac{E}{3}$$

* Résistance de Thevenin $R_{Th}$

on court-circuite le générateur E



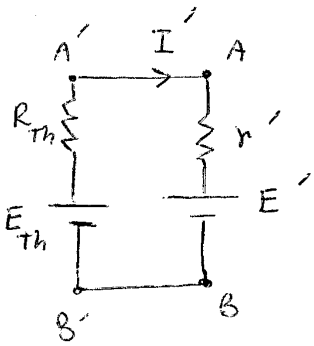

→ 


$$R_{Th} = R // R // R \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}$$

$$\Rightarrow \quad R_{Th} = \frac{R}{3}$$

* On remet la branche AB enlevée

Soit le montage suivant




$$V_{AB} = V_{A'B'} \qquad \begin{cases} V_{AB} = E_{Th} - R_{Th} I' \\ V_{A'B'} = E' + r' I' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Th} - R_{Th} I' = E' + r' I' \quad \Rightarrow \quad E_{Th} - E' = (r' + R_{Th}) I'$$

$$\Rightarrow \quad I' = \frac{E_{Th} - E'}{R_{Th} + r'} = \frac{\frac{E}{3} - E'}{r' + \frac{R}{3}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{I' = \frac{E - 3E'}{3r' + R}}$$

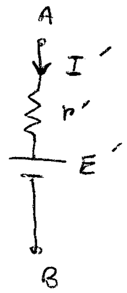
3 - Application numérique

$E = 40\,V$ , $E' = 10\,V$ ; $r' = 2\,\Omega$ et $R = 24\,\Omega$

$$I' = \frac{E - 3E'}{R + 3r'} = \frac{40 - 3\times 10}{24 + 3\times 2} = 0,33\,A$$

on a $I' > 0$ $\Rightarrow$ le dipôle $(E', r')$ se comporte comme un récepteur

4 - La puissance consommée par le récepteur $(E', r')$




$$P = (E' + r'I')I'$$

$$= E'I' + r'I'^2$$

A.N $E' = 10\,V$ , $I' = 0,33\,A$ et $r' = 2\,\Omega$

$\Rightarrow P = 10\times 0,33 + 2\times(0,33)^2$

$P = 3,52\,W$.

# Contrôle 2 Electricité 1: 2007/2008

**Filières : SMP-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit un conducteur (A) sphérique de rayon $R_1$ portant la charge Q. (A) est supposé en équilibre.

1.Comment est répartie la charge Q dans le conducteur (A) et avec quelle densité ?

2.Quel est le champ au voisinage du conducteur ? Justifier votre réponse.

3.Quel est le potentiel dV crée au centre O du conducteur (A) par un élément de sa surface dS portant la charge dQ ? En déduire le potentiel V du conducteur (A).

4.En déduire la capacité du conducteur (A).

Un autre conducteur (B) sphérique et creux, de rayon interne $R_2$ et externe $R_3$ ($R_1<R_2<R_3$) initialement neutre, entoure le premier conducteur (A) (qui porte toujours la charge Q).

5.Quelle est la charge $Q_B$ de (B) et comment est elle répartie ?

6.On met le conducteur (B) au sol. Quelle est la nouvelle répartition de charge ? Justifier votre réponse.

7.Quel est le potentiel $V_B$ du conducteur (B) ?

8.Déterminer le nouveau potentiel $V_A$ du conducteur (A).

9.Que représente l'association des conducteurs (A) et (B) ? Quelle est sa capacité ?

## Exercice 2

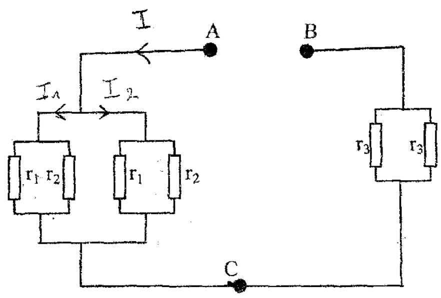


Figure1

Soit le circuit de la figure1 constitué de résistances $\mathbf{r_i}$ **(i=1, 2,3)** .

**1**-Exprimer les résistances équivalentes $\mathbf{R_{AC}}$ entre **A** et **C** et $\mathbf{R_{AB}}$ entre **A** et **B** en fonction des $\mathbf{r_i}$ et calculer leurs valeurs.

On donne : $\mathbf{r_1 = 20\ \Omega}$ ; $\mathbf{r_2 = 30\ \Omega}$ ; $\mathbf{r_3 = 40\ \Omega}$ .

**2**-Supposons que l'on branche entre **A** et **C** un générateur de force électromotrice E et de résistance interne **r**.

a- Déterminer la ddp $\mathbf{U_{AC}}$ entre **A** et **C**,

b- Déduire les intensités des courants qui circulent dans les résistances $\mathbf{r_i}$ **(i=1, 2,3)**.

c- Trouver le courant $\mathbf{I_1}$ débité par le générateur. (On donnera l'expression littérale puis la valeur numérique). On donne **r = 1 Ω** **et E = 60 V**

**3**-Le générateur précédent **(E, r)** est maintenant branché entre **A** et **B**. Calculer le courant $\mathbf{I_2}$ débité par le générateur.

**4**-Comparer les expressions de $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{I_2}$. A quelle condition sont-t elles égales ? Le courant délivré par un générateur de tension dépend-il du circuit que l'on branche à ses bornes ? Justifier votre réponse.

**5**- Calculer pour chacune des situations des questions **2** et **3 :** (On donnera les expressions littérales puis les valeurs numériques).

**a**- les puissances fournies par le générateur. On notera $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ ces puissances.

**b**- les puissances dissipées par effet Joule dans le générateur. On les notera $\mathbf{P_3}$ et $\mathbf{P_4}$ .

**c**- les puissances dissipées par effet Joule dans le circuit extérieur au générateur. On les notera $\mathbf{P_5}$ et $\mathbf{P_6}$.

**d**- Vérifier la conservation des puissances

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice 1 :

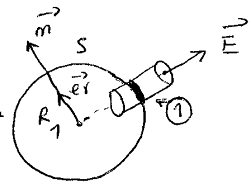
1/ comme le conducteur (A) est supposé en équilibre donc la charge $Q$ est répartie sur la surface, avec une densité surfacique $\sigma = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$

En effet : $Q = \iint \sigma\, ds$

comme le conducteur (A) est sphérique donc le rayon de courbure est uniforme $\Rightarrow Q = \sigma \iint ds = \sigma S$ où $S$ la surface de (A)

$\Rightarrow Q = \sigma 4\pi R_1^2 \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$

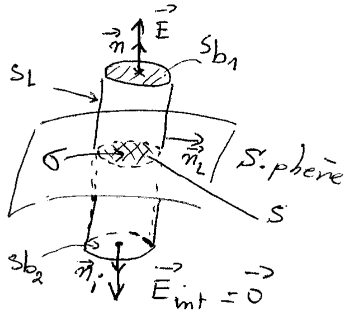
2/ le champ au voisinage de (A)




la surface S du conducteur est une équipotentielle (car $V_{surface} = V_{int} = cte$), et les ligne de champ sont normales aux équipotentielles (car $\vec{E} = -\vec{grad}\,V$), où bien la distribution admet une symétrie sphérique donc le champ est porté par $\vec{er}$ ($\vec{er} \perp$ au surface S)

avec $\vec{er} = \vec{n}$ ($\vec{er} \parallel \vec{n}$) où $\vec{n}$ la normal au conducteur

$\Rightarrow \vec{E} = E\,\vec{n}$




théorème de Gauss : $\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

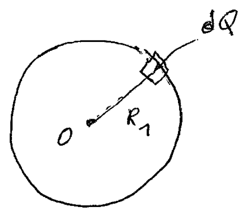
$\phi = \iint_{Sb_1} E\,\vec{n}.dSb_1\vec{n} + \underbrace{\iint_{Sb_2} E_{int}(-\vec{n}).dSb_2\,\vec{n}_i}_{0 \quad E_{int}=0} + \underbrace{\iint E\vec{n}.dS_L\vec{n}_2}_{0 \quad \vec{n} \perp \vec{n}_2}$

$\phi = E\,Sb_1 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ (avec $S = Sb_1$)

$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$

donc le champ au voisinage du conducteur est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ avec $\sigma$ la densité surfacique et $\vec{n}$ la normal au conducteur (th. de coulomb)

* <u>la réponse au question 2 est :</u> le champ au voisinage du conducteur est $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ avec $\sigma$ la densité surfacique et $\vec{n}$ la normal au conducteur. d'après théorème de Coulombe




3/ le potentiel dV crée au centre O du conducteur.

$dV(O) = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

* pour V(o) : $V(0) = \iint dV(0) = \iint \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon R_1} \iint ds = \frac{\sigma S}{4\pi\varepsilon R_1}$

S: la surface de la sphère (conducteur (A))

$$V(0) = \frac{\sigma \times \cancel{4\pi} R_1^{\cancel{2}}}{\cancel{4\pi\varepsilon} \cancel{R_1}} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}$$

Le conducteur (A) est en équilibre, donc d'après (1) on a $\sigma = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$

$$\Rightarrow V(0) = \frac{Q R_1}{\varepsilon 4\pi R_1^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \Rightarrow \boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \text{cte}}$$

donc le potentiel **V** est le même que celui crée par la charge Q placée au centre O

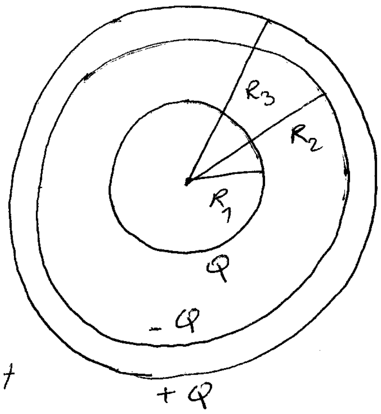
4/ la capacité c par définition est : $c = \frac{Q}{V}$

$$\Rightarrow c = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

5/ le conducteur (B) est initalement neutre donc $Q_B = 0$

* la répartition des charges sur les deux conducteur

- influence total $\Rightarrow Q_{B_{int}} = -Q$

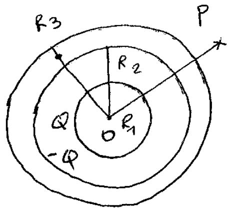



et puisque (B) est neutre

$$\Rightarrow Q_B = Q_{B_{int}} + Q_{B_{ext}} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{B_{ext}} = -Q_{B_{int}} = Q$$

6/ si on met le conducteur (B) au sol les charges (+Q) de la face exterieur vont s'écouler vers la terre ce qui implique que la charge sur cette face devient nulle.




7/ potentiel $V_B$

on a $V_B = \frac{\cancel{Q} - \cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0 OP}$ pour un point P

pour $OP = R_2$ ou $R_3 \Rightarrow V_B = 0$

8/ on a pour un point O , $V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$ $\left( V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{ d'après (3)} \right)$

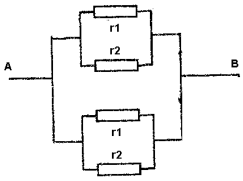
$$\Rightarrow V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right)$$ , comme A en équilibre $V_0 = V_A = \text{cte}$

9/ l'association des conducteurs (A) et (B) représente un condensateur sa capacité est donné par $c = \frac{Q}{V_A - V_B}$ ; $V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$ , $V_B = 0$

$\Rightarrow$ ~~Cra~~ $c = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$ ( voire la page ... )

## Exercice 2:

1/ - la résistance équivalente $R_{AC}$




$$R_{AC} = \underbrace{(r_1 // r_2)}_{R_{12}} // (r_1 // r_2)$$

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \Rightarrow R_{12} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

$$\Rightarrow R_{AC} = \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right) // \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)$$

$$= \frac{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \times \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{\frac{(r_1 r_2)^{\cancel{2}}}{(r_1 + r_2)^{\cancel{2}}}}{\frac{2\, \cancel{r_1 r_2}}{\cancel{(r_1 + r_2)}}} = \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}$$

- La résistance équivalent $R_{AB}$

$$R_{AB} = R_{AC} + R_{CB} = R_{AC} + (r_3 // r_3)$$

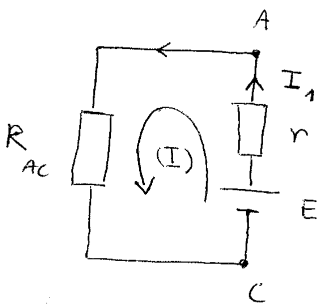
$$= \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)} + \frac{r_3^2}{r_3 + r_3} = R_{AC} + \frac{r_3}{2}$$

A.N $R_{AC} = \frac{20 \times 30}{2(20 + 30)} = 6\,\Omega$

$R_{AB} = 6 + \frac{40}{2} = 26\,\Omega$

2/ a

on a $U_{AC} = R_{AC}\, I_1$ ①

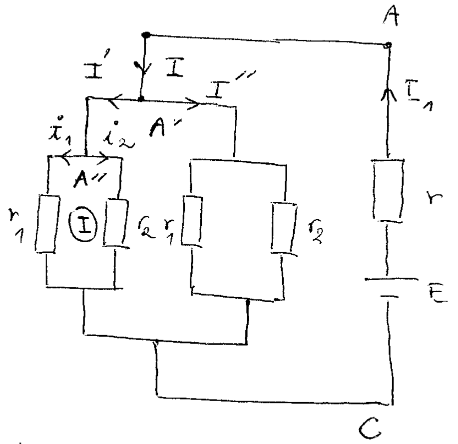



Loi de maille : $-E + r I_1 + R_{AC} I_1 = 0$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{E}{R_{AC} + r} \quad ②$$

② dans ① $\Rightarrow$ $U_{AC} = \frac{R_{AC}\, E}{R_{AC} + r}$

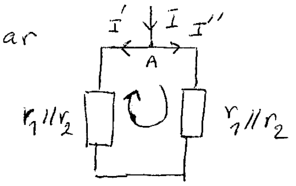
b/ - L'intensité de courant qui circule dans $r_1$



maille (I) : $r_1 i_1 - r_2 i_2 = 0$

* nœud A' $I_1 = I' + I'' = 2I'$

car



$(r_1 /\!/ r_2) I' - (r_1 /\!/ r_2) I'' = 0$

$\Rightarrow I' = I''$

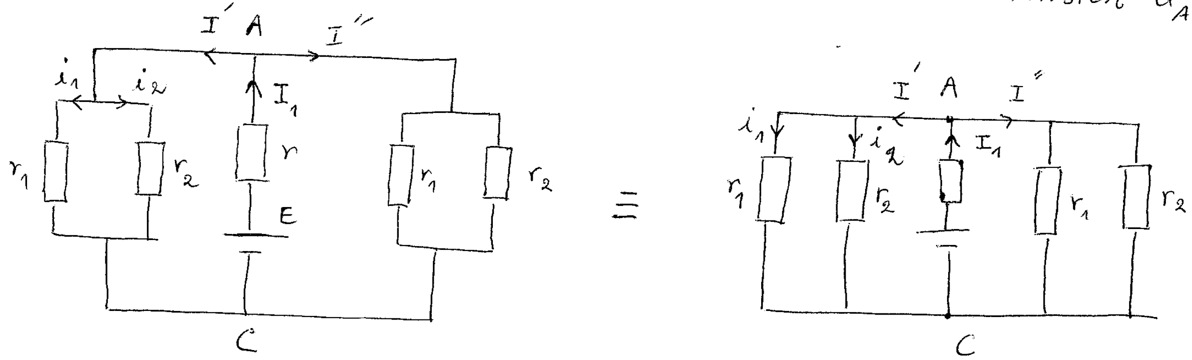
* nœud A'' $I' = i_1 + i_2 = \frac{I_1}{2}$ $(I_1 = 2I')$

$$\begin{cases} r_1 i_1 - r_2 i_2 = 0 \\ i_1 + i_2 = \frac{I_1}{2} = \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{r_2}{r_1} i_2 \\ \frac{r_2}{r_1} i_2 + i_2 = \frac{I_1}{2} = \frac{U_{AC}}{2R_{AC}} \end{cases}$$ (d'après relation ① 2.a)

$$\Rightarrow i_2\left(\frac{r_1 + r_2}{\cancel{r_1}}\right) = \frac{U_{AC}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}(r_1 + r_2)}{\cancel{r_1} r_2}$$ $\left(R_{AC} = \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}\right)$

$\Rightarrow i_2 = \frac{U_{AC}}{r_2}$ de même $i_1 = \frac{U_{AC}}{r_1}$

* ou plus simple, toutes les résistances ont la même tension $U_{AC}$



donc $U_{AC} = r_1 i_1 = r_2 i_2 \Rightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{U_{AC}}{r_1} \\ i_2 = \frac{U_{AC}}{r_2} \end{cases}$

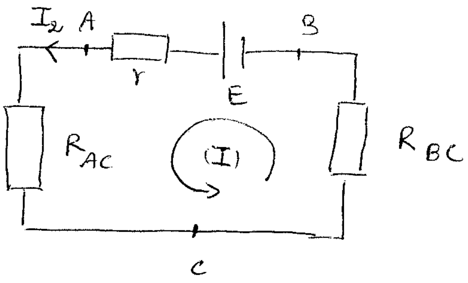
* $i_3 = 0$ car le circuit est ouvert.

c/ d'après la relation (1) de 1/a -

$I_1 = \frac{E}{R_{AC} + r}$ , AN $I_1 = \frac{60}{6 + 1} = 8,57$ A.

3/ le générateur $(E,r)$ est branché entre A et B

maille (I) :




$$-E + rI_2 + R_{AC}I_2 + R_{BC}I_2 = 0$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_{AC}+R_{BC}+r}$$

avec $R_{BC} = r_3 // r_3 = \frac{r_3 r_3}{r_3+r_3} = \frac{r_3}{2}$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{E}{R_{AC}+\frac{r_3}{2}+r} \quad ; \quad A.N \quad I_2 = \frac{60}{6+\frac{40}{2}+1} = 2{,}22\ A$$

4/

on a $I_1 = 8{,}57\ A$ et $I_2 = 2{,}22\ A$

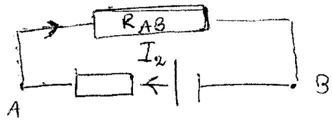
donc $I_1 > I_2$

* $I_1 = I_2 \Leftrightarrow \frac{\cancel{E}}{R_{AC}+r} = \frac{\cancel{E}}{R_{AC}+\frac{r_3}{2}+r} \Leftrightarrow \cancel{R_{AC}} + \cancel{r} = \cancel{R_{AC}} + \frac{r_3}{2} + \cancel{r}$

$\Leftrightarrow \frac{r_3}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{r_3 = 0\ \Omega}$

il est donc évident que le courant délivré par un générateur de tension dépend du circuit branché entre ses bornes.

5/




a/ $P_1 = EI_1 = 514{,}28\ W$

$P_2 = EI_2 = 133{,}3\ W$

$\underbrace{U_{AB} I_2}_{P_6} = \underbrace{P}_{} = \underbrace{EI_2}_{P_2} - \underbrace{rI_2^2}_{P_4}$

b/ $P_3 = rI_1^2 = 73{,}47\ W$

$P_4 = rI_2^2 = 4{,}94\ W$

$\Rightarrow P_6 = P_2 - P_4$

$\boxed{P_2 = P_4 + P_6}$

c/ $P_5 = R_{AC}\,U_{AC} = R_{AC} I_1^2 = 440{,}8\ W$

$P_6 = R_{AB}\,U_{AB} = R_{AB} I_2^2 = 128{,}4\ W$

d/ on vérifie bien que $P_1 = P_3 + P_5$ et $P_2 = P_4 + P_6$

# Contrôle 2 Electricité 1: 2006/2007

**Filières : SMP-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Une sphère conductrice pleine de centre **O** et de rayon **R** portant une charge Q uniformément répartie avec une densité $\sigma$ est en équilibre électrostatique.

**1°-** Déterminer le potentiel électrostatique **V** de ce conducteur

**2°-** Déterminer la capacité **C** de ce conducteur

**3°-** Déterminer la valeur du rayon **R** pour réaliser une capacité de **1 Farad**

**4°-** Physiquement cette capacité est elle réalisable ? Justifier votre réponse.

On donne $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\,\pi} 10^{-9}$ **(M.K.S.A.)**

## Exercice 2:

Dans une salle de travaux pratiques, on dispose d'un générateur idéal de force électromotrice **E** **supérieure** à **12 V**. On veut alimenter une lampe de **12 V** (la lampe ne s'allume que lorsque **la tension à ces bornes est égale à 12 V**). Pour ce faire on a réalisé le montage de la figure 1. La lampe a une résistance **r**. La résistance entre **A** et **B** est **R**. Lorsque le curseur mobile C est au niveau de B, la lampe est éteinte. On déplace doucement le curseur à partir du niveau B jusqu'à la position où la lampe s'allume. La résistance entre **A** et **C** est alors **xR** $(0 \le x \le 1)$. On donne : $r = R/2 = 1\Omega$ et $x = 0.5$.

**1°** - En appliquant les lois de Kirchhoff, déterminer les courants dans les différentes branches en fonction de **E, x, r et R** et calculer les valeurs de ces courants.

**2°** - Quelle est la valeur de la d.d.p. **U** aux bornes de la lampe ? Exprimer **U** en fonction de **E, x, r et R**. .

**3°** - En déduire la valeur de **E** .

**4°** - En comparant E et U, quel est le rôle de ce montage ?

**5°** - Calculer la puissance fournie $P_f$ par le générateur et la puissance perdue $P_r$ dans la lampe. Comparer $P_f$ et $P_r$ et conclure.

Une deuxième lampe identique à la première est branchée comme le montre la figure 2.

**6°**- Par application du théorème de Thevenin, trouver le courant **I'** traversant la deuxième lampe.

**7°**- Déterminer la valeur de **I'**.

**8°**- Les lampes seront-elles allumées ou éteintes ? Justifier votre réponse.

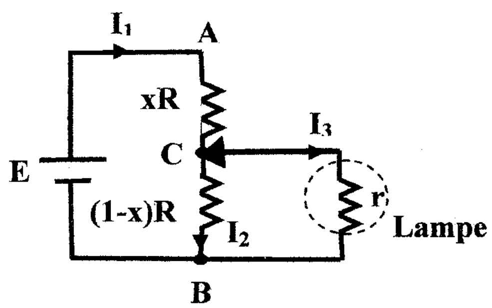



**Figure 1**

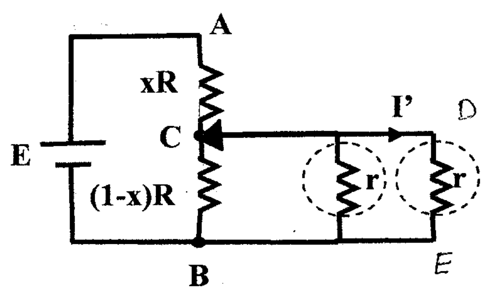


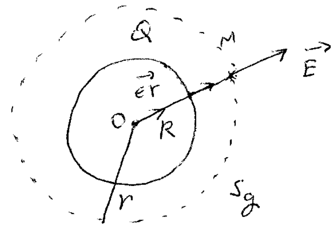

**Figure 2**

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

## Correction :

## Exercice 1 :

1/ le potentiel V de conducteur




le conducteur possède une symétrie sphérique donc $\vec{E}$ est porté par $\vec{er}$ et ne dépend que de r

$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\,\vec{er}$

Surface de Gauss : la sphère de centre o et de rayon r

théorème de Gauss : $\phi = \oiint_{S_g} E(r)\,\vec{er} \cdot dS\,\vec{er} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec $Q_{int} = Q$

$\Rightarrow E(r) \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

on a $\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Rightarrow E(r)\cancel{\vec{er}} = -\frac{dV}{dr}\cancel{\vec{er}} \Rightarrow dV = -E(r)\,dr$

$\Rightarrow V = \int -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

comme le conducteur en équilibre $V_{int} = cst$

pour $r = R$ on a $\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

2/ la capacité C

on a $C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$

3/ calculons R pour $C = 1F$

on a $C = 4\pi\varepsilon R = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ avec $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ (M.KSA)

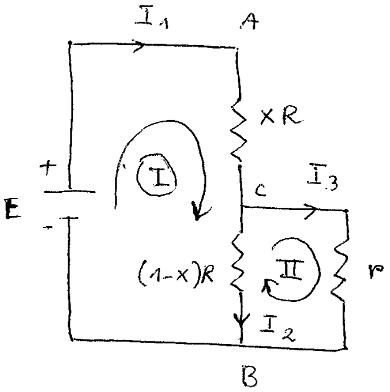
A.N $R = \frac{1}{4\pi \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}}$

$\Rightarrow R = 9 \cdot 10^{-9}$ m $\simeq 0{,}9$ Å

4/ physiquent cette capacité n'est pas réalisable à cause de dimension du Rayon R est très petit

## Exercice 2 :

1/ Application des lois de Kirchoff ( loi des noeud et loi des mailles




* loi des nœuds

nœud c $\rightarrow$ $I_1 = I_2 + I_3$

$\Rightarrow$ $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ (1)

* loi des mailles

dans le circuit il y a deux mailles indépendantes

* maille (I) : $-E + xRI_1 + (1-x)RI_2 = 0$

$\Rightarrow$ $xRI_1 + (1-x)RI_2 = +E$ (2)

* maille (II) :

$rI_3 - (1-x)RI_2 = 0$ (3)

Les relation (1), (2) et (3) forment le système suivant :

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ xRI_1 + (1-x)RI_2 + 0 = E \\ 0 - (1-x)RI_2 + rI_3 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ xR & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix}$$

$\Delta$ : le déterminant associé au système

donc $I_1 = \dfrac{\Delta I_1}{\Delta}$ , $I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta}$ et $I_3 = \dfrac{\Delta I_3}{\Delta}$

avec $\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix}$ ; $\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ xR & E & 0 \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix}$ et $\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ xR & (1-x)R & E \\ 0 & -(1-x)R & 0 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ xR & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} (1-x)R & 0 \\ -(1-x)R & r \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} xR & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} xR & (1-x)R \\ 0 & -(1-x)R \end{vmatrix}$$

$$= r(1-x)R + xRr + x(1-x)R^2$$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & (1-x)R & 0 \\ 0 & -(1-x)R & r \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} (1-x)R & 0 \\ -(1-x)R & r \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} E & (1-x)R \\ 0 & -(1-x)R \end{vmatrix}$$

$$= Er + E(1-x)R$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ xR & E & 0 \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} xR & 0 \\ 0 & r \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} xR & E \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= Er$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ xR & (1-x)R & E \\ 0 & -(1-x)R & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} (1-x)R & E \\ -(1-x)R & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} xR & E \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} xR & (1-x)R \\ 0 & -(1-x)R \end{vmatrix}$$

$$= E(1-x)R$$

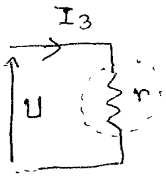
pour $I_1$ : on a $I_1 = \dfrac{\Delta I_1}{\Delta} = \dfrac{Er + E(1-x)R}{r(1-x)R + xRr + x(1-x)R^2} = \dfrac{E(r + R - xR)}{rR + xR^2 - x^2R^2}$

A.N $I_1 =$

pour $I_2$ on a $I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta} = \dfrac{Er}{r(1-x)R + xRr + x(1-x)R^2} = \dfrac{Er}{rR + xR^2 - x^2R^2}$

pour $I_3$ on a $I_3 = \dfrac{\Delta I_3}{\Delta} = \dfrac{E(1-x)\cancel{R}}{r(1-x)\cancel{R} + x\cancel{R}r + x(1-x)R^{\cancel{2}}} = \dfrac{E(1-x)}{r + x - x^2}$

2/ la valeur de la ddp $U$ au bornes de la lamp.




$U = rI_3$

$\Rightarrow U = \dfrac{rE(1-x)}{r(1-x) + xr + x(1-x)}$

$\Rightarrow U = \dfrac{rE(1-x)}{r + x - x^2}$

3/ d'après (2) $E = \dfrac{U(r + x - x^2)}{r(1-x)}$

A.N $E = \dfrac{12(1 + 0{,}5 - (0{,}5)^2)}{1(1 - 0{,}5)} \Rightarrow E = 30\ V$

4/ $E = 30V > U = 12V$ le montage jeut le rôle

5/ La puissance fourni par le générateur

$P_f = EI_1^2$ , $I_1 = \dfrac{30(1 + 2 - 0{,}5 \times 2)}{1 \times 2 + 0{,}5 \times 4 - 0{,}25 \times 4} = 20\ A$

$\Rightarrow P_f = 30 \times (20)^2 = 12\ KW$

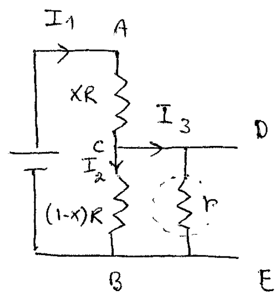
* $P_r = U \times I_3 = r \times I_3^2$ , avec $I_3 = \dfrac{30(1 - 0{,}5)}{1 + 0{,}5 - 0{,}25} = 12\ A$

$\Rightarrow P_r = 12 \times (12)^2 = 1728\ W$

$P_f - P_r = 10\,272 \Rightarrow 85\,\%$ perdu dans la branche AB par effet Joule.

6/ Application du théorème de thevenin

* on enlève la branche 2ème Lampe

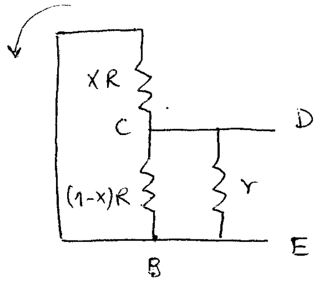



* Tension de thevenin $E_{Th}$

$$E_{th} = (V_D - V_E)_{\text{à vide}} = r I_3^*$$

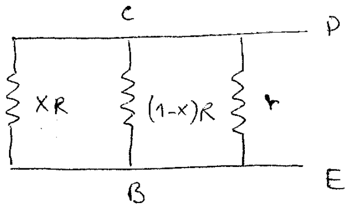
avec $I_3^* = \dfrac{E(1-x)}{r + x - x^2}$

$$\Rightarrow E_{Th} = \frac{rE(1-x)}{r + x - x^2}$$




* Résistance de thevenin $R_{th}$

on court-circuite le générateur E

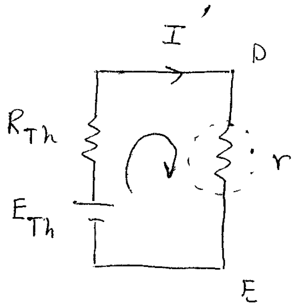



$$R_{Th} = (xR) // (1-x)R // r$$

$$= \frac{x\cancel{R}(1-x)\cancel{R}}{x\cancel{R} + (1-x)\cancel{R}} // r$$

$$= x(1-x)R // r = \frac{r(1-x)xR}{r + (1-x)xR}$$

* on remet la branche enlevée




$$-E_{Th} + R_{Th} I' + r I' = 0$$

$$\Rightarrow I' = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + r}$$

$$\Rightarrow I' = \frac{\dfrac{rE(1-x)}{r + x - x^2}}{\dfrac{r(1-x)xR}{r + (1-x)xR} + r} = \frac{\cancel{r}E(1-x)}{r + x - x^2} \times \frac{r + (1-x)xR}{\cancel{r}\left[(1-x)xR + r + (1-x)xR\right]}$$

$$I' = \frac{(1-x)(E + xR) + r}{r + x - x^2\left(2(1-x)xR + r\right)} \Rightarrow I' =$$

8/ les 2 lampes seront allumées car la tension aux bornes égale à 12 V (4)

# Contrôle 1 Electricité 1: 2005/2006

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

**(conducteurs en équilibre électrostatique)**

**A** - Soit une sphère **($S_1$)** pleine, conductrice, de centre **O** et de rayon **$R_1$**, en équilibre électrostatique et portant une charge **Q** positive.

Répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses :

1° Que vaut le champ électrique en un point à l'intérieur de ce conducteur ?

2° Que peut on dire du potentiel du conducteur à l'intérieur et en surface ?

3° Où est située la charge **Q** ?

**B** – On met le conducteur **($S_1$)** portant toujours la charge **Q**, à l'intérieur d'un conducteur **($S_2$)** creux , de forme sphérique, de même centre **O**, de rayon intérieur **$R_2$** et extérieur **$R_3$** et initialement neutre et isolé. Les deux conducteurs **($S_1$)** et **($S_2$)** sont en équilibre électrostatique.

1° Les conducteurs $S_1$ et $S_2$ sont – il en influence partielle ? Justifier votre réponse.

2° Illustrer sur un schéma la répartition des charges sur les conducteurs **($S_1$)** et **($S_2$)**.

3° Que se passe – t – il lorsqu'on relie **($S_1$)** et **($S_2$)** par un fil conducteur ? Donner la nouvelle répartition de charge et la capacité du système

**C** - Les deux conducteurs **($S_1$)** et **($S_2$)** représentent respectivement les armatures interne et externe d'un condensateur. Le conducteur **($S_1$)** porte la charge **Q**. **$U = V_1 - V_2$** étant la différence de potentielle entre les deux armatures.

1° Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures et en déduire **$U = V_1 - V_2$**.

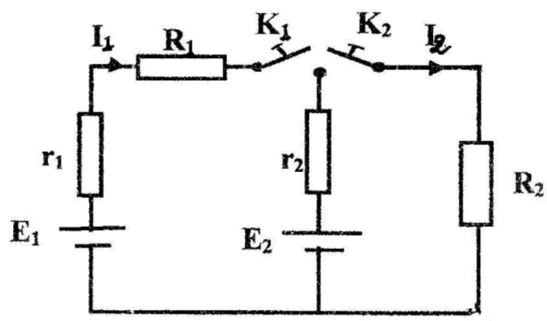
2° En déduire la capacité **C** du condensateur.

3° Quelle est l'énergie emmagasinée dans ce condensateur.

## Exercice II :

**(Electrocinétique):**

On considère le circuit de la figure ci-contre, contenant deux dipôles actifs **($E_1$, $r_1$)** et **($E_2$,$r_2$)** et deux dipôles passifs de résistances **$R_1$** et **$R_2$**. **$K_1$** et **$K_2$** étant deux interrupteurs.




**A** – L'interrupteur **$K_1$** est **<u>fermé</u>** et **$K_2$** est **<u>ouvert</u>** :

1° Déterminer le courant **$I_1$**. On suppose **$E_1 > E_2$** .

2° Quelle est le fonctionnement des dipôles **($E_1$,$r_1$)** et **($E_2$,$r_2$)** ? Justifier votre réponse.

3° Déterminer la puissance **$P_1$** dans la branche contenant le dipôle **($E_2$,$r_2$)** et expliquer la nature de chaque terme.

**B** - L'interrupteur **$K_1$** est **<u>ouvert</u>** et **$K_2$** est **<u>fermé</u>** :

1° Déterminer le courant **$I_2$**.

2° Quelle est le fonctionnement du dipôle **($E_2$,$r_2$)** ? Justifier votre réponse.

3° Déterminer la puissance **$P_2$** dans la branche contenant le dipôle **($E_2$,$r_2$)** et expliquer la nature de chaque terme.

**C** – Les interrupteurs **$K_1$** et **$K_2$** sont **<u>fermés</u>** :

1° Déterminer le courant **$I'_2$** dans la résistance **$R_2$** en appliquant le théorème de Thevenin.

2° Déterminer la puissance **$P_3$** dissipée par la résistance **$R_2$** et préciser quelle est la nature de cette puissance.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

# Exercice I :

Exercice 1 : ( conducteurs en équilibre électrostatique )

A -

1 - le champ est nul à l'interieur d'un conducteur en équilibre car: les charges immobiles à l'interieur du conducteur ce qui implique que la vitesse moyenne est nulle ( $m\gamma = \Sigma F$ )

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

2 - le potentiel est constant à l'interieur et en surface du conducteur car:

Le conducteur en équilibre électrostatique $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

on a $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \Rightarrow V = cste$

3 - la charge Q situee répartie en surface car:

d'aprés la relation de la forme local du theoreme de Gauss

$\text{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et puisque $\vec{E} = \vec{0}$ à l'interieur du conducteur

$\Rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = 0$, Alors Q repartie en surface.

B -

1 - Non, les deux conducteurs sont en influence total car: toutes les lignes de champ partant du conducteur $(S_1)$ arrivent totalement au conducteur $(S_2)$.

2 - La répartition des charges sur les deux conducteurs

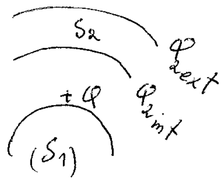
influence totale $\Rightarrow$

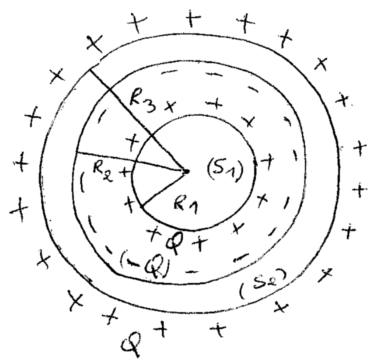
$\Rightarrow Q_{2int} = -Q$

et puisque $S_2$ est neutre

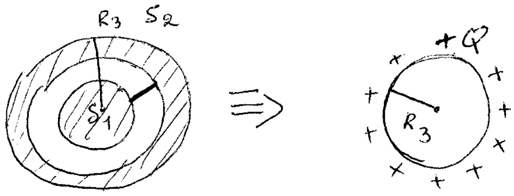
$\Rightarrow Q_2 = Q_{2int} + Q_{2ext} = 0$

$\Rightarrow Q_{2ext} = -Q_{2int} = Q$



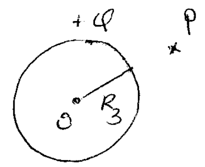




3. Lorsque on relie $(S_1)$ et $(S_2)$ par un fil conducteur, on a qu'un seul conducteur en équilibre



* toute la charge Q set met en surface de rayon $R_3$

➤ La capacité du système



au point P, on a $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon (OP)}$

Sur la surface de Rayon $R_3$ :

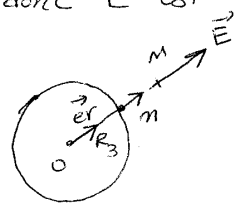
$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R_3}$ , $OP = R_3$

on déduit, $C = \dfrac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R_3$

C/-1 le champ électrique $\vec{E}$ entre les armateures

* la direction et le sens

le système possède la symétrie sphérique donc $\vec{E}$ est porté par $\vec{e_r}$ et ne dépend que de r



$\Rightarrow \vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$

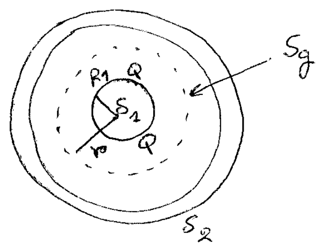
* Surface de Gauss ($S_g$)

le champ $\vec{E}$ est radial et constant sur une sphère de rayon r, La surface de Gauss convenable sera une sphère de rayon r

* le théorème de Gauss :

$\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ , $\phi$ : étant le flux de $\vec{E}$ à travers $S_g$

* pour $R_2 < r < R_3$ ( entre les armateures )



$\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_{S_g} E(r)\,\vec{e_r}\cdot dS\,\vec{n}$ avec ($\vec{n} // \vec{e_r}$)

$= E(r)\oiint_{S_g} dS = E(r)\,S = E(r) \times 4\pi r^2$

S : surface de la sphère de rayon r

$\Rightarrow \phi = 4\pi r^2 E(r) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ ( les charges sont au surface de la sphère de rayon $R_1$ donc (+Q) )

$\Rightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e_r}$

* le potentiel ( entre $R_1$ et $R_2$ )

on a $\vec{E} = -\vec{grad}\,V \Rightarrow E(r)\,\vec{e_r} = -\dfrac{dV}{dr}\,\vec{e_r}$

$\Rightarrow dV = -E(r)\,dr$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr$

$$\Rightarrow \quad V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}\,dr = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} =$$

$$-(V_1 - V_2) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad U = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

2 - La capacité C du conducteur

on a $\quad C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{Q}{V_1 - V_2}$

$$\Rightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = 4\pi\varepsilon\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

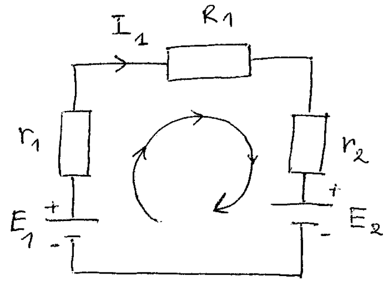
3 - l'énergie emmagasinée dans ce condensateur :

on a $\quad W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ donc $\quad W = \dfrac{1}{2} Q^2 \times \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{Q^2 (R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon\, R_1 R_2}$$

Exercice 2 : ( Electrocinétique ) :

A - L'interrupteur $K_1$ est fermé et $K_2$ est ouvert



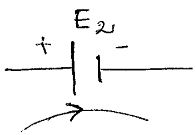

1 - le courant $I_1$

* Loi des mailles :

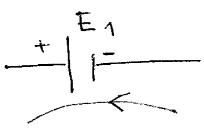
$$R_1 I_1 + r_2 I_2 + E_2 - E_1 + r_1 I_1 = 0$$

$$I_1 (R_1 + r_1 + r_2) = E_1 - E_2$$

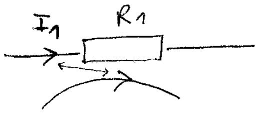
$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + r_1 + r_2}$$




on met $+E_2$ car on rencontre le pôle (+) en premier




on met $(-E_1)$ car on rencontre le pôle (−) en premier.



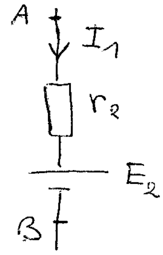

on met (+) devant $R_1 I_1$ car le sens de parcours est le même que celui du courant $I_1$

2) le fonctionnement des dipôles $(E_1, r_1)$ et $(E_2, r_2)$

on a $E_1 > E_2 \Rightarrow E_1 - E_2 > 0$ donc $\dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + r_1 + r_2} > 0$

Alors $I_1 > 0$

* $I_1$ sort par la borne (+) de $E_1 \Rightarrow (E_1, r_1)$ est un générateur
* $I_2$ entre par la borne (+) de $E_2 \Rightarrow (E_2, r_2)$ est un récepteur.




3) la puissance $P_1$

La puissance consommée par le récepteur $(E_2, r_2)$

est : $P_1 = U_{AB} I_1 = (r_2 I_1 + E_2) I_1$

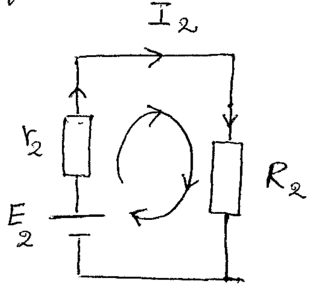
$$\Rightarrow \quad P_1 = E_2 I_1 + r_2 I_1^2$$

$E_2 I_1$ : la puissance transformée par le récepteur.

$r_2 I_1^2$ : la puissance perdue par effet Joule dans la résistance interne.

B. L'interrupteur $K_1$ est ouvert et $K_2$ est fermé

1 -




Loi de maille.

$$R_2 I_2 - E_2 + r_2 I_2 = 0$$

$$I_2 (R_2 + r_2) = E_2$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{E_2}{R_2 + r_2}$$

2 - on a $I_2 > 0$ donc $(E_2, r_2)$ est un générateur car le courant sort par sa borne (+).

3 - la puissance $P_2$

on a $P_2 = (E_2 \overset{\text{générateur}}{-} r_2 I_2) \times I_2 = E_2 I_2 - r_2 I_2^2$

$E_2 I_2$ : puissance fournie par le générateur.

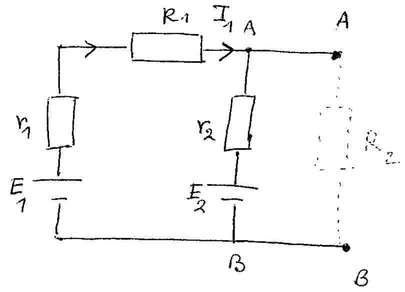
$r_2 I_2^2$ : puissance perdue par effet de Joule dans la résistance interne $(r_2)$

c - Les interrupteur $K_1$ et $K_2$ sont fermés

1 - théorème de thevenin.

* Tension de Thevenin $E_{th}$

- on enlève $R_2$ et on remplace le reste du circuit par le générateur de thevenin équivalent $(E_{Th}, R_{Th})$




$$E_{Th} = (V_A - V_B)_{\text{à vide}}$$

$$= E_2 + r_2 I_1$$

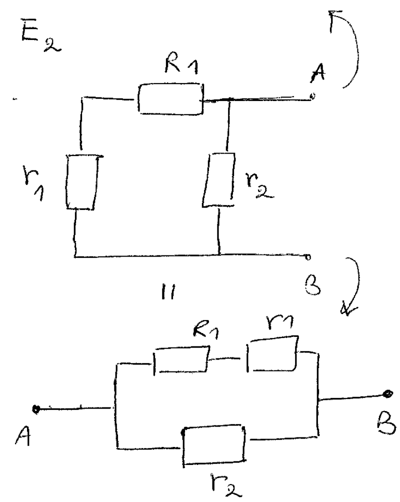
D'après A-1 on a $I_1 = \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2 + R_1}$

donc $E_{Th} = E_2 + r_2 \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2 + R_1}$

$$= \frac{r_1 E_2 + \cancel{r_2 E_2} + R_1 E_2 + r_2 E_1 \cancel{- r_2 E_2}}{r_1 + r_2 + R_1} = \frac{r_2 E_1 + (r_1 + R_1) E_2}{r_1 + r_2 + R_1}$$

* Résistance de thevenin $R_{Th}$

- on court-circuite les générateur $E_1$ et $E_2$




$$R_{th} = (R_1 + r_1) // r_2$$

$$\frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_1 + r_1} + \frac{1}{r_2}$$

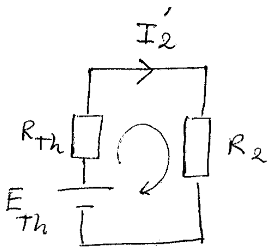
$$= \frac{r_2 + R_1 + r_1}{r_2 (R_1 + r_1)}$$

$$\Rightarrow R_{Th} = \frac{r_2 (r_1 + R_1)}{r_1 + r_2 + R_1}$$

* On remet la branche enlevée

soit le montage suivant

$$R_2 I_2' - E_{Th} + R_{th} I_2' = 0$$




$$\Rightarrow I_2' (R_2 + R_{Th}) = E_{Th}$$

$$\Rightarrow \quad I_2' = \frac{E_{Th}}{R_2 + R_{Th}} \quad , \text{avec } E_{Th} = \frac{r_2 E_1 + (r_1 + R_1)}{r_1 + r_2 + R_1}$$

$$R_2 + R_{Th} = R_2 + \frac{r_2(r_1+R_1)}{r_1+r_2+R_1} = \frac{r_1 R_2 + r_2 R_2 + R_1 R_2 + r_2 r_1 + r_2 R}{r_1 + r_2 + R_1}$$

$$= \frac{R_2(r_1+r_2+R_1) + r_2(R_1+r_1)}{r_1+r_2+R_1}$$

$$\Rightarrow \quad I_2' = \frac{r_2 E_1 + (r_1+R_1) E_2}{r_1+r_2+R_1} \times \frac{r_1+r_2+R_1}{R_2(r_1+r_2+R_1) + r_2(R_1+r_1)}$$

$$\Rightarrow \quad I_2' = \frac{r_2 E_1 + (r_1+R_1) E_2}{R_2(r_1+r_2+R_1) + r_2(R_1+r_1)}$$

2 – La puissance $P_3$ dissipée par la résistance $R_2$

on a $P_3 = R_2 I_2' \times I_2' = R_2 I_2'^2$

c'est une puissance dissipée par effet Joule.

# Contrôle 2 Electricité 1: 2008/2009

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit le montage de la figure 1 avec les générateurs $(E_1, r_1)$, $(E_2, r_2)$, et X une résistance.

1) Calculer les intensités des courants $I_1$ et $I_2$
2) calculer le courant I dans la résistance X:
   a) par application du théorème de superposition
   b) par application du théorème de Thevenin

## Exercice II :

Soient deux sphères $S_1$ et $S_2$ concentriques conductrices, placées dans le vide (voir figure 2). $S_1$ est pleine de rayon $R_1$, $S_2$ est creuse et infiniment mince de rayon $R_2$, ($R_{2i} = R_{2e} = R_2$)

1) $S_1$ et $S_2$ sont reliées par un fil conducteur et portées au potentiel V, calculer les charges $Q_1$ de la sphère $S_1$, $Q_{2i}$ de la face interne de $S_2$ et $Q_{2e}$ de la face externe de $S_2$
2) Le fil est maintenant rompu; $S_1$ est portée au potentiel $V_1$ et $S_2$ est portée au potentiel $V_2$ tels que $V_1 \neq V_2$, Donner les charges $Q'_1$, $Q'_{2i}$ et $Q'_{2e}$ en fonction de $R_1$, $R_2$, $V_1$ et $V_2$
3) En déduire la capacité du condensateur ainsi formé.

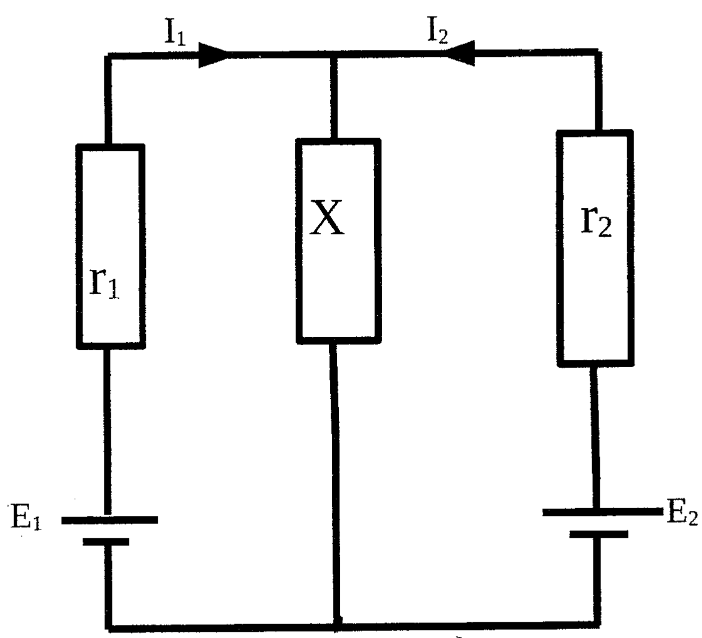



**Figure 1**

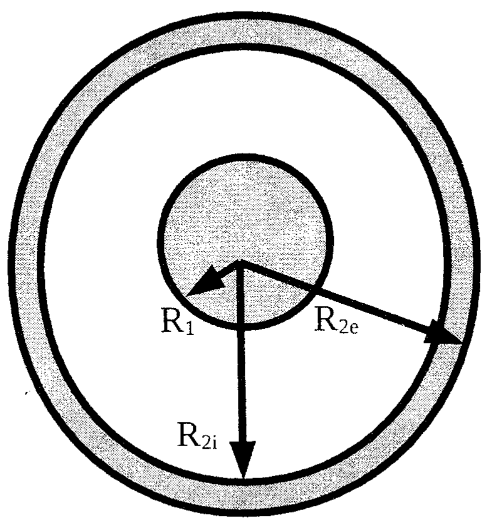
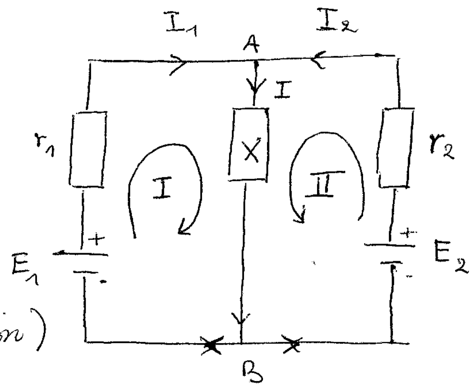



**Figure 2**

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

# Correction :

## Exercice I :




1/ Calculons $I_1$ et $I_2$

* pour $I_1$ et $I_2$

✳ Loi des noeuds

noeud A → $I_1 + I_2 = I$

noeud B → $I = I_1 + I_2$ (même équation)

$$\Rightarrow \quad I_1 + I_2 - I = 0 \qquad (1)$$

✳ Loi des mailles

dans le circuit il y a deux mailles indépendantes (I) et (II)

* maille (I)

$$-E_1 + r_1 I_1 + XI = 0 \Rightarrow r_1 I_1 + XI = E_1 \qquad (2)$$

* maille (II)

$$-E_2 + r_2 I_2 + XI = 0 \Rightarrow r_2 I_2 + XI = E_2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I = 0 \\ r_1 I_1 + 0 + XI = E_1 \\ 0 + r_2 I_2 + XI = E_2 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ r_1 & 0 & X \\ 0 & r_2 & X \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 0 & X \\ r_2 & X \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} r_1 & X \\ 0 & X \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{vmatrix}$$

$$= -r_2 X - r_1 X - r_1 r_2$$

$$\Delta = -\left[ X(r_1 + r_2) + r_1 r_2 \right]$$

pour $I_1$ $\qquad I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta}$

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ E_1 & 0 & X \\ E_2 & r_2 & X \end{vmatrix} = -1(E_1 X - E_2 X) - E_1 E_2 = -\left[ X(E_1 + E_2) + E_1 E_2 \right.$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = \frac{X(E_1 + E_2) + E_1 E_2}{X(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$

(1)

pour $I_2$ $\qquad I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta}$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ r_1 & E_1 & X \\ 0 & E_2 & X \end{vmatrix} = XE_1 - XE_2 - r_1E_2 = X(E_1-E_2) - r_1E_2$$

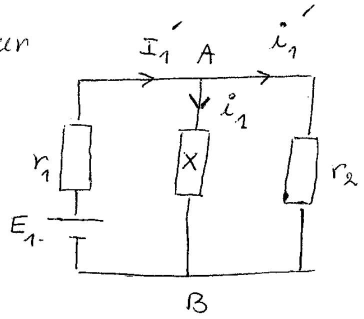
$$\Rightarrow I_2 = \frac{\Delta I_2}{\Delta} = \frac{X(E_1-E_2) - r_1E_2}{-(X(r_1+r_2)+r_1r_2)} = \frac{r_1E_2 - X(E_1-E_2)}{X(r_1+r_2)+r_1r_2}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{X(E_2-E_1)+r_1E_2}{X(r_1+r_2)+r_1r_2}$$

2/ calculon $I$ le courant dans la résistance $X$

a - théorème de superposition

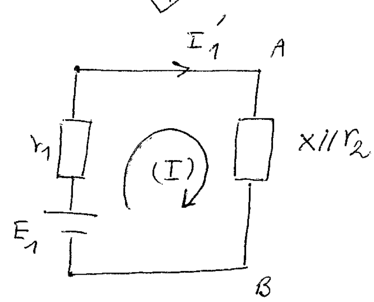
$I = i_1 + i_2$ les intensités des courants $i_1$ et $i_2$ se calculent à partir des états 1 et 2




<u>Etat 1 :</u> on considère le premier générateur $E_1$ débite un courant d'intensité $I_1$ dans l'ensemble de résistances $X$ et $r_2$ en parallèle.

D'aprés La différence de potentiel entre les points A et B est telle que :

$$V_A - V_B = X i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{V_A - V_B}{X}$$




$$* \; V_A - V_B = I_1' \times (X // r_2) = I_1' \frac{X r_2}{X + r_2}$$

- d'après la loi de Pouillet, on a

$$I_1' = \frac{E_1}{r_1 + (X//r_2)} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{X r_2}{r_2 + X}}$$

- ou bien la maille (I) donne $\quad r_1 I_1' + I_1'(X//r_2) - E_1 = 0$

$$\Rightarrow [r_1 + (X//r_2)]\, I_1' = E_1 \qquad \text{avec} \qquad X//r_2 = \frac{X r_2}{r_2 + X}$$

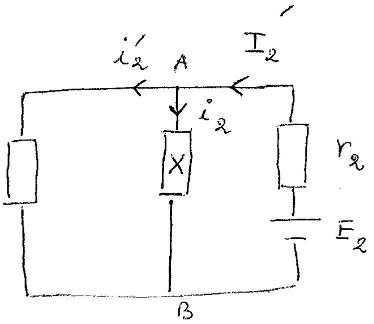
$$\Rightarrow I_1' = \frac{E_1}{r_1 + \frac{X r_2}{r_2 + X}}$$

$$\Rightarrow V_A - V_B = I_1' \frac{X r_2}{X + r_2} = \frac{E_1}{r_1 + \frac{X r_2}{r_2 + X}} \times \frac{X r_2}{X + r_2}$$

$$= \frac{E_1 (r_2 + X)}{r_1 r_2 + r_1 X + X r_2} \times \frac{X r_2}{X + r_2} = \frac{E_1 X r_2}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

donc $$i_1 = \frac{V_A - V_B}{X} = \frac{E_1 X r_2}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)} \times \frac{1}{X}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{E_1 r_2}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)}}$$

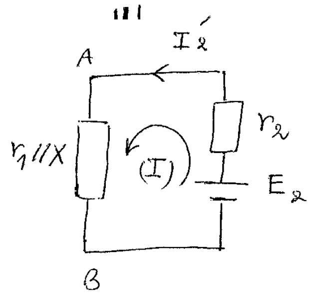



* Etat 2 : le générateur $E_2$ fonctionne seul

le générateur $E_2$ débite un courant d'intensité $I_2'$ dans l'ensemble de résistances $r_1$ et $X$ en parallèle

La d.d.p entre les deux points A et B est telle que

$$V_A - V_B = X i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{V_A - V_B}{X}$$




$$* \quad V_A - V_B = I_2' (r_1 // X)$$
$$= I_2' \frac{r_1 X}{r_1 + X}$$

pour $I_2'$,

La maille (I) $\Rightarrow (r_1 // X) I_2' - E_2 + r_2 I_2' = 0$ avec $r_1 // X = \dfrac{r_1 X}{r_1 + X}$

$$\Rightarrow I_2' = \frac{E_2}{r_2 + r_1 // X} = \frac{E_2}{r_2 + \frac{r_1 X}{r_1 + X}} = \frac{E_2 (r_1 + X)}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

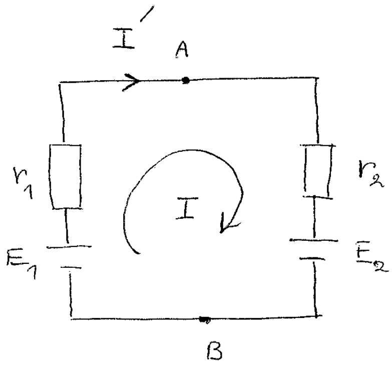
donc $$i_2 = \frac{V_A - V_B}{X} = \frac{I_2'}{X} \frac{r_1 X}{r_1 + X} = \frac{E_2 (r_1 + X) \times r_1}{[r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)](r_1 + X)}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{r_1 E_2}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)}}$$

d'où $$I = i_1 + i_2 = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

b- Application du théorème de Thevenin.

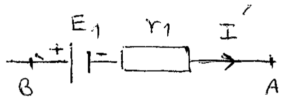
* on enlève la résistance X et on calcule la d.d.p $V_A - V_B$ à vide



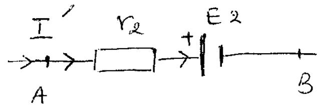

* Tension de thevenin $E_{Th}$

$$E_{Th} = (V_A - V_B)_{\text{à vide}} = E_1 - r_1 I'$$

ou $$E_{Th} = (V_A - V_B)_{\text{à vide}} = E_2 + r_2 I'$$




$V_A - V_B = E_1 - r_1 I'$




$V_A - V_B = E_2 + r_2 I'$

* le courant I' est donné par la loi de pouillet : $I' = \dfrac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$

* ou bien

la maille (I) $\Rightarrow -E_1 + r_1 I' + r_2 I' + E_2 = 0$

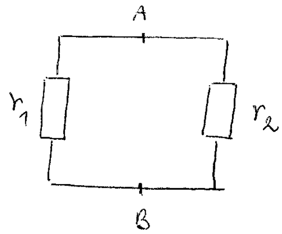
$$\Rightarrow (r_1 + r_2) I' = E_1 - E_2 \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$$

donc $$E_{Th} = E_2 + r_2 \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \frac{E_2 r_1 + \cancel{E_2 r_2} + r_2 E_1 - \cancel{r_2 E_2}}{r_1 + r_2}$$

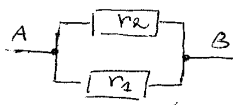
$$\Rightarrow E_{Th} = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2}$$

* Résistance de thevenin $R_{th}$

on court-circuite les générateur $E_1$ et $E_2$

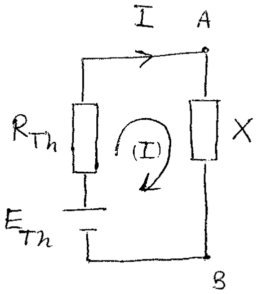



$$R_{th} = r_1 // r_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$




* On remet la résistance X enlevée

maille (I) : $X I - E_{Th} + R_{Th} I = 0$




$$\Rightarrow I = \frac{E_{th}}{R_{Th} + X} = \frac{(E_2 r_1 + r_2 E_1)/r_1 + r_2}{\dfrac{r_2 r_1}{r_1 + r_2} + X}$$

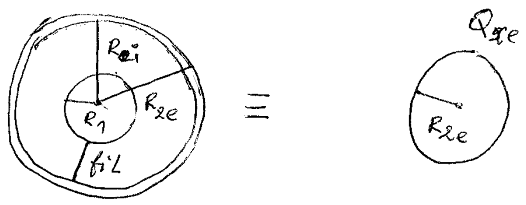
$$\Rightarrow I = \frac{E_2 r_1 + r_2 E_1}{\cancel{r_1 + r_2}} \cdot \frac{\cancel{r_1 + r_2}}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

$$\Rightarrow I = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2 + X(r_1 + r_2)}$$

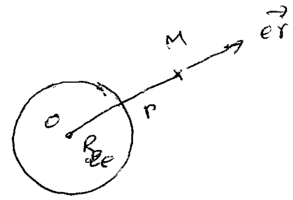
## Exercice II :

1 - Lorsqu'on relie $(S_1)$ et $(S_2)$ par un fil conducteur on a qu'un seul conducteur en équilibre

toute la charge est répartie sur la surface exterieur de rayon $R_{2e} = R_2$




* à l'intérieur, il n'a pas de charge donc $Q_1 = 0$ et $Q_{2i} = 0$
* toute la charge est répartie sur la surface de rayon $R_{2e}$ cette charge $Q_{2e}$ qui crée le potentiel V du conducteur.
* la distribution admet une symétrie sphérique donc le potentiel à l'exterieur est le même que celui crée par la charge $Q_{2e}$ placée au centre O




- pour $r > R_{2e}$

$$V(r) = \frac{Q_{2e}}{4\pi\varepsilon r}$$

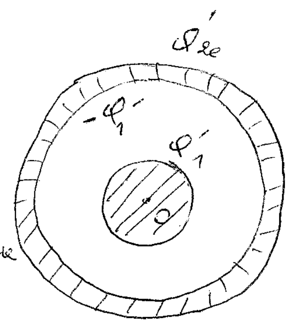
- pour $r = R_{2e} = R_2$

$$V(r = R_2) = V = \frac{Q_{2e}}{4\pi\varepsilon R_2} \Rightarrow \boxed{Q_{2e} = 4\pi\varepsilon R_2 V}$$

finalement $\begin{cases} Q_1 = 0 \\ Q_{2i} = 0 \\ Q_{2e} = 4\pi\varepsilon R_2 V \end{cases}$

2)

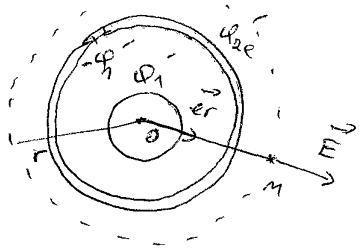
les deux conducteurs sont en influence total donc $Q'_{2i} = -Q'_1$




à l'extérieur

- la distribution admet une symétrie sphérique $\Rightarrow \vec{E} = E(r)\,\vec{er}$
- Surface de Gauss : la sphère de rayon r et de centre O

théorème de Gauss :




$$\phi = \oint\!\!\oint_{S_g} E(r)\vec{e_r}\cdot dS\vec{e_r} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E\, S_g = \frac{Q'_1 - Q'_1 + Q'_{2e}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{Q'_{2e}}{\varepsilon_0}$$

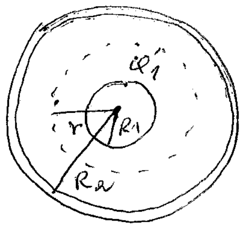
$$\Rightarrow E = \frac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E\,dr = -\frac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 r} + C \quad \left( V(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0 \right)$$

pour $r = R_{2e} = R_2 \Rightarrow V_2 = \dfrac{Q'_{2e}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow \boxed{Q'_{2e} = 4\pi\varepsilon_0 R_2 V_2}$

pour $R_1 \leqslant r < R_2$




$$\Rightarrow \phi = E\cdot S = \frac{Q'_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q'_1}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

on a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow E = -\dfrac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E\,dr$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{+Q'_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\right)$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q'_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \Rightarrow Q'_1 = 4\pi\varepsilon_0 (V_1 - V_2)\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

Alors $Q'_{2i} = -Q'_1 = -4\pi\varepsilon_0 (V_1 - V_2)\dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$

3/ par définition $C = \dfrac{Q'_1}{V_1 - V_2}$

$$\Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

# Exercice

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

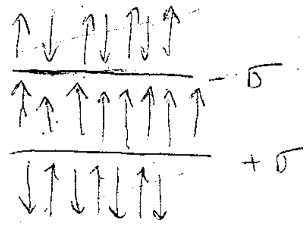
## Exercice I :

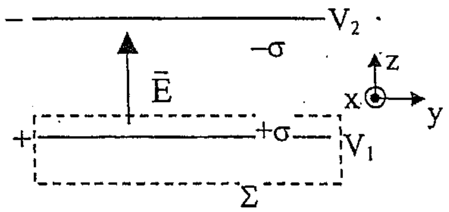
1. Un condensateur plan est constitué de deux armatures A et B planes, de surface S et séparées par une distance e.
Déterminer la capacité de ce condensateur.
2. Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique constitué de deux cylindres coaxiaux de rayons $R_1$ et $R_2$ ($R_1 < R_2$) et de hauteur h.
3. Calculer la capacité d'un condensateur sphérique constitués de deux sphères concentriques de rayons $R_1$ et $R_2$ ($R_1 < R_2$).

## Correction :

## Exercice I :

**1.** Condensateur plan
On néglige les effets de bord.




Tout plan perpendiculaire aux armatures est un plan de symétrie. Le champ $\vec{E}$ étant contenu dans ces plans, celui ci est perpendiculaire aux plaques. le champ est invariant par translation le long des axes Ox et Oy. Le champ électrostatique ne dépend que de z.

$$\vec{E} = E(z)\ \vec{e}_z$$

Les lignes de champ sont parallèles entre les deux armatures, par conséquent, le champ $\vec{E}$ est uniforme.

$$\vec{E} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

– Circulation du champ électrostatique

$$\int \vec{E}.\vec{d\ell} = V_1 - V_2 \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

– Expression de la capacité

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma S}{V_1 - V_2}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

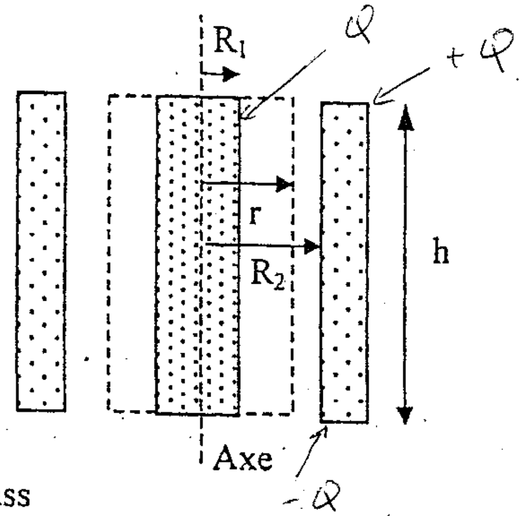
**2.** Condensateur cylindrique

Soient deux cylindres infinis coaxiaux de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ avec $R_1 < R_2$.

L'armature interne porte la charge Q.

Le champ $\vec{E}$ est ,par raison de symétrie, radial (voir chapitre 1), on ne considère donc que la surface latérale du cylindre, le flux sortant par les bases étant nul.

Vue en coupe du cylindre




– Théorème de Gauss

On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon r ($r > R_1$) et de hauteur h.

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E.2\pi rh = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rh}$$

– Circulation du champ électrostatique

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\vec{dr} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

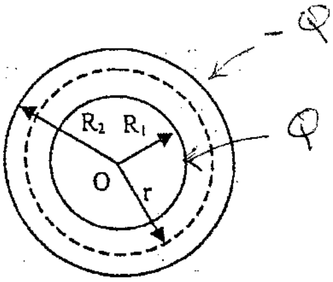
On en déduit C : $C = \dfrac{Q}{V_1 - V_2}$

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}}$$

**3.** Condensateur sphérique

Soit un condensateur formé par deux sphères concentriques de rayons $R_1$ et $R_2$ avec $R_2 > R_1$. L'armature interne porte la charge +Q.

Le système possède la symétrie sphérique (voir chapitre 1) le champ électrostatique est donc radial.




– Théorème de Gauss

On choisit comme surface de Gauss, une sphère de rayon r.

$$\oiint_S \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ avec $Q_{int} = Q$

$$E.4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

– Circulation du champ électrostatique

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\vec{dr} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

– Expression de la capacité

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

مـــــــنتدى طريق المـــــــعرفة
www.rapideway.com/vb

# Contrôle 2 Optique géométrique 2004/2005

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

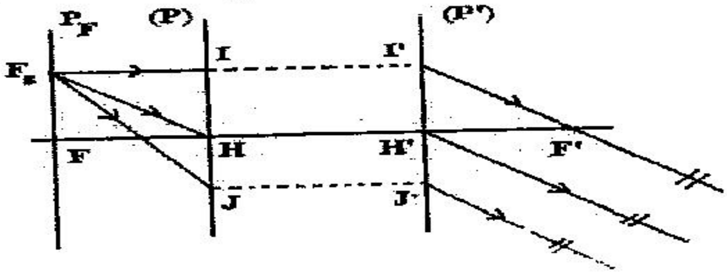
## Questions de cours:

1- a) Rappeler, dans le cadre de l'approximation de Gauss, l'équation de conjugaison avec origine au centre d'un dioptre sphérique de centre C et de sommet S séparant deux milieux d'indices différents $n_1$ et $n_2$.

b) En déduire les expressions de la distance focale image $f'$ et la distance focale objet $f$.

2- Quels sont les différents défauts de l'œil, pour chaque défaut donner une explication brève et proposer la correction à apporter.

3- Commenter le schéma suivant en rappelant les définitions des points cardinaux du système.




## Exercice I :

Une lentille mince L de centre O et de distance focale image $f'$, donne d'un objet réel AB une image A'B', droite et plus petite que l'objet. On note $p = \overline{OA}$, $p' = \overline{OA'}$ et $\Gamma$ le grandissement linéaire transversal de L.

1- Déterminer l'expression de $f'$ en fonction de p et $\Gamma$. En déduire la nature de L. Expliquer.

2- Calculer $f'$ et p' si $\Gamma = 0.5$ et l'objet AB est placé à 6 cm de la lentille.

3- Faire une construction géométrique.

## Exercice II :

On considère un système optique afocale formé d'une lentille $L_1$ de centre $O_1$ ; de distance focale image $f_1' = 10\,\text{cm}$ et d'une lentille $L_2$ de centre $O_2$ ; de distance focale image $f_2' = -5\,\text{cm}$. Le foyer image de $L_1$ est confondu avec le foyer objet de $L_2$.

1-. Calculer la distance $e = \overline{O_1O_2}$.

2-. Tracer la marche d'un rayon incident parallèle à l'axe optique du système. Conclure.

3-. Déduire, géométriquement à partir du schéma, le grandissement linéaire transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ où $\overline{A'B'}$ est l'image d'un objet $\overline{AB}$ réel. Conclure.

4-. Trouver l'expression de la position de l'image $\overline{A'B'}$ d'un objet $\overline{AB}$ situé à 15 cm en avant de $L_1$. Donner sa valeur numérique. On donnera $\overline{O_2A'}$.

5-. Déterminer l'expression du grandissement linéaire transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ et donner sa valeur numérique.

6. Faite une construction géométrique de l'image $\overline{A'B'}$ de l'objet de taille 4 cm. Echelle 1/2.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

### Questions de cours:

1°) a: l'equation de conjugaison des dioptres sphériques avec origine au centre :

$$\frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} = \frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}}$$

On peut ecrire si $R = \overline{CS}$ $\Rightarrow$ $\frac{(n_1 - n_2)}{R} = \frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}}$

b°) - Distance focale image $f'$:

pour un objet à l'infini $\Rightarrow$ l'image A' situé au foyer image on remplace dans la formule de conjugaison.

$$\frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} = \frac{n_1}{\overline{CF'}} - 0 \quad \text{Alors} \quad \overline{CF'} = \frac{n_1}{(n_1 + n_2)} \overline{CS}$$

or $f' = \overline{H'F'} = \overline{H'C} + \overline{CF'} = \overline{SC} + \frac{n_1}{n_1 - n_2}$ (dioptre sphérique $H \neq H' \neq S$)

Donc $\boxed{f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC}}$

- Distance focale objet $f$:

Pour un objet placé au foyer objet $\Rightarrow$ l'image sera situé à l'infini on remplace dans la formule de conjugaison.

$$\frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} = - \frac{n_2}{\overline{CF}} + 0 \quad \text{Alors} \quad \overline{CF} = - n_2 \cdot \frac{\overline{SC}}{n_1 - n_2}$$

or : $f = \overline{HF} = \overline{HC} + \overline{CF} = \overline{SC} - \frac{n_2}{n_1 - n_2} \overline{CS}$ (dioptre sphérique $H \neq H' \neq S$)

Donc $\boxed{f = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC}}$

2°) Défauts de l'oeil :

a) - Myopie : oeil trop convergent : Plan focal image $P_{F'}$

en avant de la rétine pour un rayon lumineux arrivant de l'infini, on corrige l'oeil myope avec une lentille divergente devant l'oeil

b°) - Hypermétrie : oeil pas assez convergent. Plan focale image $P_{F'}$ derriere la rétine pour les rayons lumineu arrivant de l'infini, on corrige l'oeil Hypermétrie avec une lentille convergente devant l'oeil.

c°) - Presbytie : l'accommodation faiblit avec l'age, on corrige La presbytie avec des lentilles bifocales ou progressives pour la vision de près et celle de loin.

3°) - le schema représente un système centré convergent ($\overline{HF} = f < 0$ et $\overline{H'F'} = f' > 0$) avec les points cardinaux $F$, $F'$, $H$ et $H'$

- $F$ et $F'$ points focaux objet et image respectivement.
- $H$ et $H'$ points principaux objet et image respectivement.

On note aussi :

- $P_F$ et $P_{F'}'$ plans focaux et images respectivement.
- $P_H$ et $P_{H'}'$ plans principeux objet et image respectevement (tout objet situé sur $P_H$ aura l'image sur $P_{H'}'$ avec $\gamma = 1$)

$F_S$ : est un point focale objet secondaire.

## Exercice I :

1°) - a) On a la formule de conjugaison : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$

et $\Gamma = \frac{p'}{p} \Rightarrow p' = p \cdot \Gamma$

On remplace dans la formule de conjugaison.

$$\Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1}{p\Gamma} - \frac{1}{p} \Rightarrow f' = \frac{p.\Gamma}{1-\Gamma}$$

On a $0 < \Gamma < 1$ et $p' = \overline{OA'}$ , $p = \overline{OA} < 0$

$f' = \frac{P.\Gamma}{1-\Gamma} < 0 \Rightarrow f' < 0$ donc la lentille L est divergente.

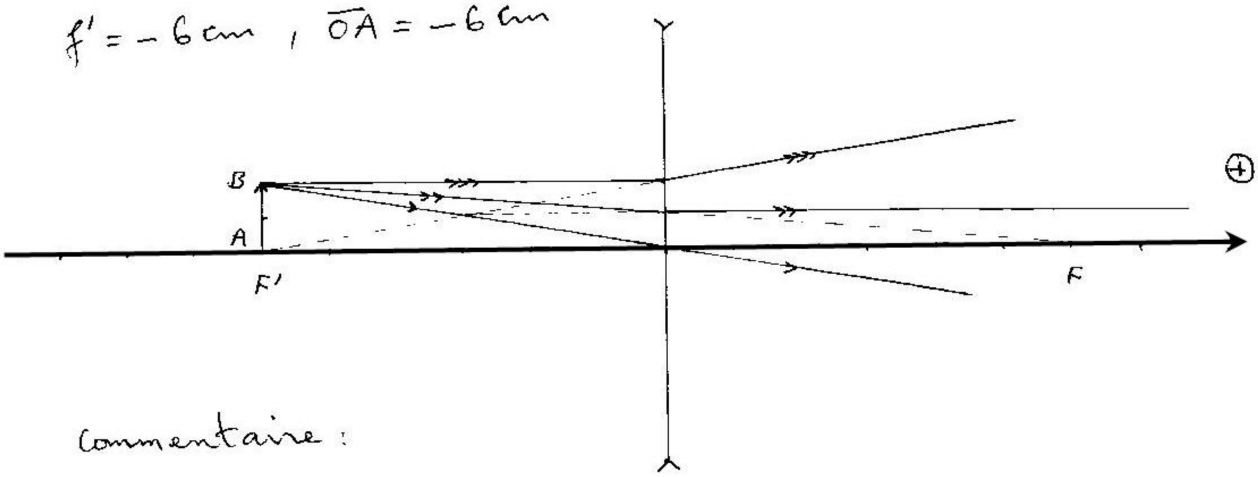
2°) pour $\Gamma = 0,5$ et $p = \overline{OA} = -6\,cm$

AN: $f' = \frac{-6 . 0,5}{-0,5+1} = -6\,cm < 0$

$p' = \overline{OA'} = p.\Gamma = -6 . 0,5 = -3\,cm$

3°)- construction géométrique:

$f' = -6\,cm$ , $\overline{OA} = -6\,cm$




Commentaire :

A'B : image virtuelle.

A'B' : égale la moitié de AB.

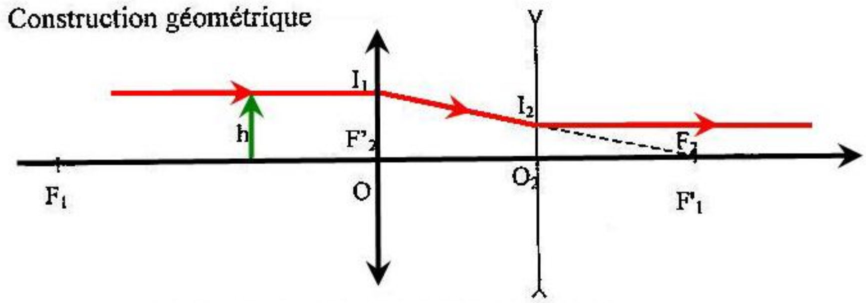
$A \equiv F'$

## Exercice II :

1- $F'_1$ est confondu avec $F_2$ :

$$\Delta = \overline{F_1'F_2} = 0 = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' + \overline{O_1O_2} + f_2 \Rightarrow \overline{O_1O_2} = f_1' + f_2' = 5\ cm$$

2- Un rayon incident parallèle sort parallèlement à l'axe optique




les foyers de ce système rejetée à l'infini

**3-** Un objet de hauteur h placé sur l'axe optique aura une image de hauteur h'.

Les triangles $O_1I_1F_2$ et $O_2I_2F_2$ sont semblables : $\dfrac{\overline{O_1I_1}}{\overline{O_1F_2}} = \dfrac{\overline{O_2I_2}}{\overline{O_2F_2}}$ soit donc :

$\dfrac{h}{f_1'} = \dfrac{h'}{f_2} \Rightarrow \gamma = \dfrac{h'}{h} = -\dfrac{f_2'}{f_1'} = 0.5$ l'image est deux fois plus petite que l'objet.

**4-** $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$ ;

En utilisant la formule de Newton pour $L_1$: $\overline{F_1A}\ \overline{F_1'A_1} = -f_1'^2$

En utilisant la formule de Newton pour $L_2$: $\overline{F_2A_1}\ \overline{F_2'A'} = -f_2'^2 \Rightarrow \overline{F_2'A'} = -\dfrac{f_2'^2}{\overline{F_2A_1}}$

$\overline{F_2A_1} = \overline{F_2F_1'} + \overline{F_1'A_1} = -\Delta + \overline{F_1'A_1} = \overline{F_1'A_1}$ ;

Soit donc : $\Rightarrow \overline{F_2'A'} = -\dfrac{f_2'^2}{\overline{F_1'A_1}} = -\dfrac{f_2'^2}{-\dfrac{f_1'^2}{\overline{F_1A}}} = \dfrac{f_2'^2}{f_1'^2}\overline{F_1A}$

AN : $\overline{F_1A} = -5\ cm$ ; et $\Rightarrow \overline{F_2'A'} = -1.25\ cm$ ;

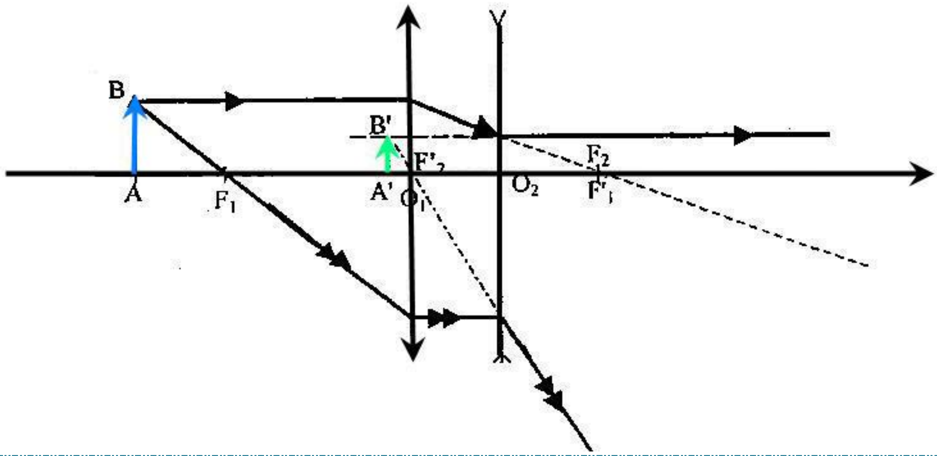
$\Rightarrow \overline{F_2'A'} = \overline{F_2'O_2} + \overline{O_2A'} \Rightarrow \overline{O_2A'} = \overline{F_2'A'} + f_2' = -6.25\ cm$

**5-** le grandissement $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} * \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_2\gamma_1$ ,

$\gamma_2 = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = -\dfrac{\overline{F_2'A'}}{f_2'}$ et $\gamma_1 = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\dfrac{f_1}{\overline{F_1A}}$ ;

alors : $\gamma = \dfrac{\overline{F_2'A'}}{f_2'} * \dfrac{f_1}{\overline{F_1A}} = \dfrac{f_1}{f_2'} * \dfrac{\overline{F_2'A'}}{\overline{F_1A}} = -\dfrac{f_1'}{f_2'}\dfrac{f_2'^2}{f_1'^2} = -\dfrac{f_2'}{f_1'}$ ; le grandissement est indépendant de la position de l'objet. Il ne dépend que de $f_1'$ et de $f_2'$.

**6-** Construction géométrique


B
B'
F'2
A
F1
A'
O1
O2
F2
F'1

…

# Contrôle 2 Optique géométrique: 2004

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

On considère un dioptre sphérique concave de sommet S, de centre C et de rayon $R = |\overline{SC}| = 4cm$ , séparant deux milieux homogènes et transparents d'indices $n_1$=1.5 et $n_2$=1.

1°/ a- Donner dans les conditions de Gauss, l'expression de la relation de conjugaison du dioptre sphérique, avec origine au centre C. Quelle est la nature de ce dioptre sphérique ?

b- Rappeler la relation du grandissement transversal en fonction de $\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$.

2°/ Donner la définition des plans principaux objet $\pi$ et image $\pi'$. Montrer que les points principaux objet H et image H'du dioptre sphérique sont confondus avec S.

3°/ Déterminer les foyers principaux objet F et image F' (on demande $\overline{CF}$ et $\overline{CF'}$).

4°/ Etablir la relation entre la distance focale objet f, la distance focal image f', $n_1$ et $n_2$.

5°/ Ce dioptre donne d'un objet réel AB de hauteur 1 cm placé sur l'axe optique, une image virtuelle A'B' droite de hauteur 2 cm. Déterminer la position de l'objet $\overline{CA}$ et celle de l'image $\overline{CA'}$.

6°/ Faite une construction géométrique à l'échelle 1/2.

## Exercice II :

Soit une lentille mince convergente, de centre optique O, de foyers F et F' et de convergence C = 20 dioptries.

1°/ Où doit – on placer un objet réel AB pour obtenir une image A'B' droite quatre fois plus grande que l'objet ?

2°/ Cette lentille est destinée à servir d'une loupe pour observer un objet AB proche de petite taille. L'œil d'observation étant normal et placé en un point O' au voisinage du foyer image F' sur l'axe optique de la lentille.

a- S'agit – il dans ce cas d'un instrument objectif ou subjectif ? justifier votre réponse.

b- Donner l'expression de la puissance P de la loupe en fonction de $f'$, la position du foyer image F' et celle de l'image A'B' par rapport à l'œil placé en O'.

c- Calculer sa puissance intrinsèque et sa latitude de mise au point.

On donne les distances minimale et maximale de vision distincte : d =25 cm, D=∞

## Exercice III :

On considère un doublet constitué de deux lentilles minces $L_1$ et $L_2$ de centres optiques $O_1$ et $O_2$, de même axe principale et baignant dans l'air. Le doublet a pour symbole (3, 2,1) et pour épaisseur optique $e = \overline{O_1O_2}$

1°/ Donner la relation qui lie $f_1'$ , $f_2'$ et e au symbole du doublet.

2° / Sachant que l'épaisseur optique e =30 mm, calculer les distances focales images $f_1'$ et $f_2'$.

3°/ Déterminer par calcul les positions des points cardinaux du doublet : F, F', H et H' (on donnera $\overline{F_1F}$, $\overline{F_2'F'}$, $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ ).

4°/ Construire géométriquement les points cardinaux puis mesurer les grandeurs algébriques : $\overline{F_1F}$, $\overline{F_2'F'}$, $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ . Comparer aux résultats obtenus en 3°/.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

### Exercice I :

$R = |\overline{SC}| = 4$ cm $\quad n_1 = \frac{3}{2} \; , \; n_2 = 1$

1°) – a) $\underset{\text{objet}}{A} \xrightarrow{DS} \underset{\text{image}}{A'}$ formule de conjugaison d'un dioptre sphérique : $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$

* C ∈ au milieu plus réfreingent ⇒ Dioptre convergent.

b) $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ : grandissement transversale.

2°) * Le plan principal objet est le lieu d'intersection des incident passant par F et leurs émergent correspendant.

* Le plan principal image est le ~~milieu~~ lieu des points d'intersection d'incident // à l'axe optique et leurs émergents correspendant.

les deux plans principale objet et image sont ⊥ à l'axe optique pour lequels $\gamma = 1$

* $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 1 \Rightarrow \overline{CA'} = \overline{CA}$

$H \xrightarrow{DS} H' \Rightarrow \frac{n_1}{\overline{CH'}} - \frac{n_2}{\overline{CH}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$

$\overline{CH'} = \overline{CH} \Rightarrow \frac{n_1 - n_2}{\overline{CH}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow H \equiv S$

de m̂ on remplace CH par CH' ( CH' = CH )

$$\Rightarrow \frac{n_1}{\overline{CH'}} - \frac{n_2}{\overline{CH'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \frac{n_1 - n_2}{\overline{CH'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$$

$\Rightarrow H' \equiv S$

donc $H \equiv S \equiv H'$.

3°)- Position des foyer : F et F'

- Pour un objet A situé à F ($A \equiv F$) $\xrightarrow{DS}$ l'image A' sera à l'infini

$$\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \quad \text{pour } A \equiv F \Rightarrow 0 + \frac{n_2}{\overline{CF}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$$

$$\Rightarrow \overline{CF} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot \overline{CS} \quad AN: \overline{CF} = -8\ cm$$

- si l'objet A poser à l'infini son image A' à travers DS. sera au foyer image $A' \equiv F'$

$$\frac{n_1}{\overline{CF'}} + 0 = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \overline{CF'} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{CS}$$

$$AN: \overline{CF'} = +12\ cm.$$

4°)- Relation entre la distance focale objet f et la distance focale image f'.

$$\overline{CF} = \overline{CS} + \overline{SF} \Rightarrow \overline{SF} = f = \overline{CF} - \overline{CS} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{CS} - \overline{CS}$$

$$= \overline{CS}\left(\frac{n_2}{n_2 - n_1} - 1\right)$$

soit $\|\ f = \dfrac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot \overline{CS}$

• $\overline{CF'} = \overline{CS} + \overline{SF'} \Rightarrow \overline{SF'} = f' = \overline{CF'} - \overline{CS} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{CS} - \overline{CS}$

$$= \overline{CS}\left(\frac{n_1}{n_1 - n_2} - 1\right)$$

Soit $f' = \frac{n_2}{n_1 - n_2}\overline{CS}$

On fait le rapport de $f'$ par $f$

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_2}{n_1}$$

5°) La position de l'objet $\overline{CA}$ et de l'image $\overline{CA'}$

On a $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 2 \Rightarrow \overline{CA'} = 2\overline{CA}$

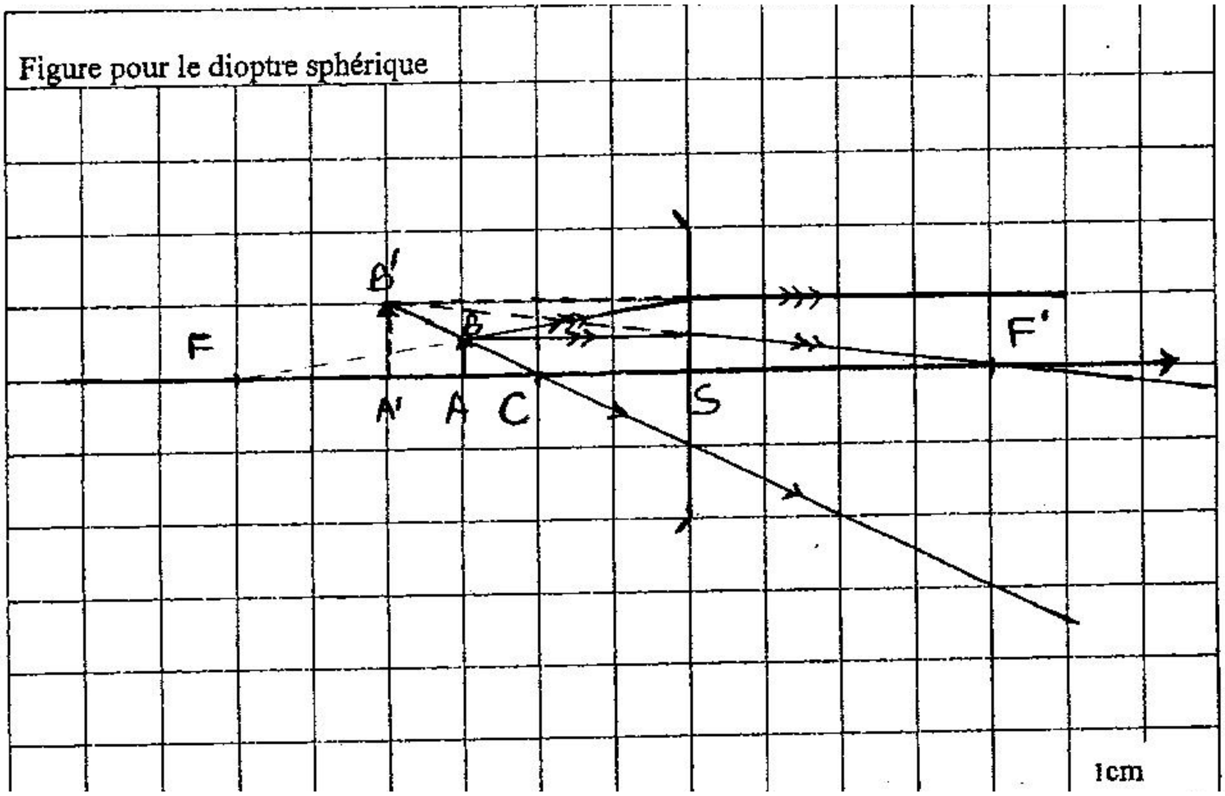
On a $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \frac{n_1}{2\overline{CA}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$

$$\frac{1}{\overline{CA}} \cdot \frac{(n_1 - 2n_2)}{2} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$$

$$\Rightarrow \overline{CA} = \frac{(n_1 - 2n_2)}{2(n_1 - n_2)}\overline{CS}$$

AN: $\overline{CA} = -2\ \text{cm}$. et $\overline{CA'} = 2\overline{CA} = -4\ \text{cm}$.

6°) Construction géométrique




## Exercice II :

$C = 20\delta \Rightarrow f' = \frac{1}{C}$ AN: $f' = 5$ cm.

1°)- objet réel AB $\longrightarrow$ image A'B' droite.

A'B' droite $\Rightarrow \gamma > 0$

A'B' plus grand 4 fois de l'objet $\Rightarrow \overline{A'B'} = 4 \cdot \overline{AB}$

donc $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +4$

On a $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 4 \Rightarrow \overline{OA'} = 4\overline{OA}$

or : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{4\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{4} f'$

AN: $\overline{OA} = -3{,}75$ Cm.

2°) a- comme l'objet est proche et réel et donne une image virtuelle Alors cet instrument est subjectif.

b- La puissance P de la loupe.

$$P = \frac{1}{f'}\left(1 - \frac{\overline{O'F'}}{\overline{O'A'}}\right)$$

C- La puissance intrinsèque $P_i$

$P_i = \frac{1}{f'}$ AN: $P_i = 20\,\delta = 20\,m^{-1}$

Latitude de mise au point de la loupe.

$$A_r A_p = f'^2\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right)$$

AN : $d = 25$ Cm $\quad D \to \infty$

$\Rightarrow \overline{A_n A_p} = 1$ Cm.

## Exercice III :

1°) - Relation entre $f_1'$, $e$, $f_2'$ :

le doublet a pour symbole (3, 2, 1).

$$\frac{f_1'}{3} = \frac{e}{2} = \frac{f_2'}{1}$$

2°) - l'épaisseur $e = 30$ mm. $\overline{O_1O_2} = e = 30$ mm.

* On a $\frac{f_1'}{3} = \frac{e}{2} = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow f_1' = 45$ mm.
* $\frac{f_2'}{1} = \frac{e}{2} \Rightarrow f_2' = 15$ mm.

3°) - Position des points cardinaux du doublet :
F, F', H et H'

$\Delta = -f_1' + e + f_2$ AN : $\Delta = 30$ mm.

* foyer F et F'

$$\overline{F_1F} = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \Rightarrow \overline{F_1F} = \frac{(-45)\cdot(45)}{(-30)} = 67,5 \text{ mm.}$$

(application de formule de Newton)

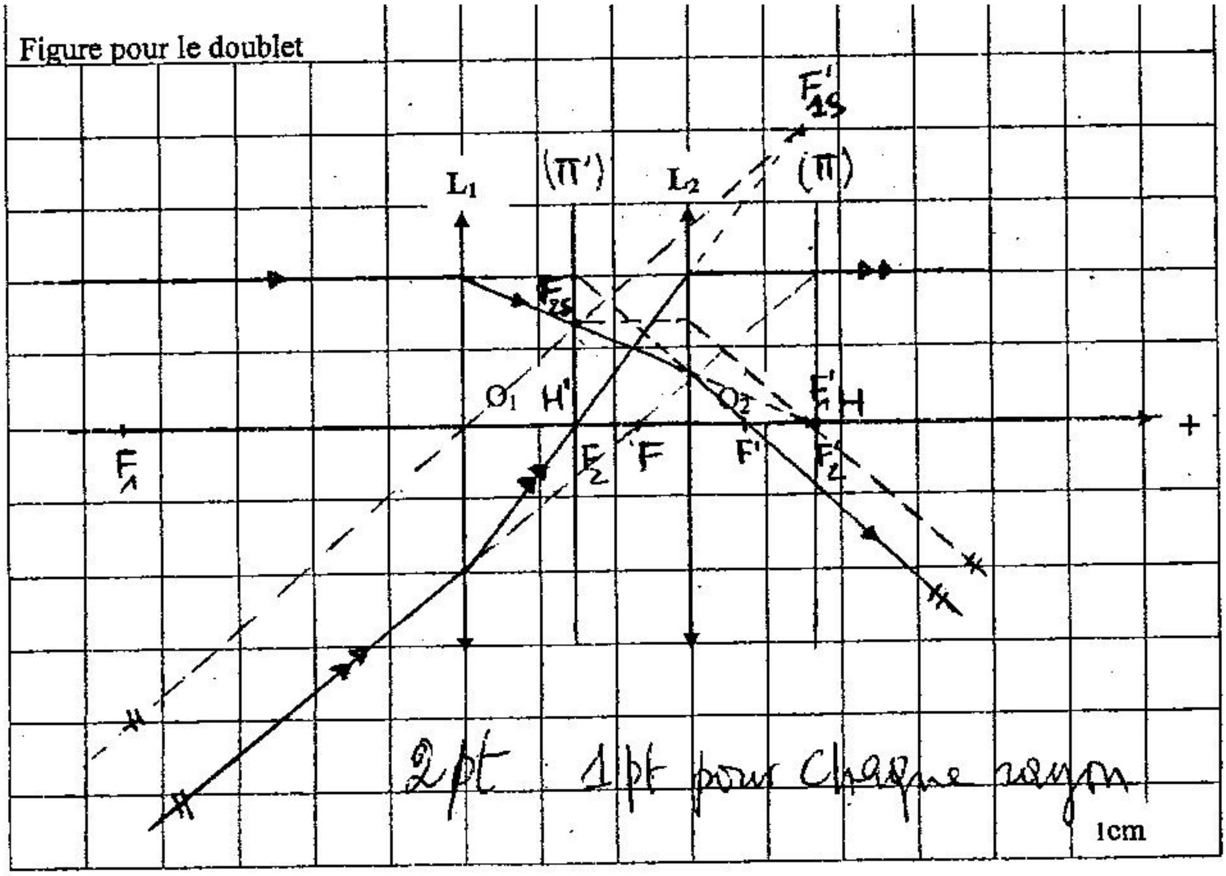
$$\overline{F_2'F'} = -\frac{f_2 \times f_2'}{\Delta} \Rightarrow \overline{F_2'F'} = -\frac{(-15)(15)}{(-30)} = -7,5 \text{ mm.}$$

* Points Principaux H et H'.

$$HF = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \Rightarrow \overline{HF} = \frac{(-45)\times(-15)}{(-30)} = -22,5 \text{ mm.}$$

• $\overline{H'F'} = -\frac{f'_1 \times f_2}{\Delta} = -\overline{HF} \Rightarrow \overline{HF} = 22,5$ mm.

4°)- Construction géométrique.



# Contrôle 2 Optique géométrique : 2008/2009

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

Soit un système optique (S) de points cardinaux (F, F', H, H').
a- Donner la relation de Newton pour un couple de point conjugué (A, A').
b- Définir ses plans principaux (P) et (P').
c- Définir ses plans focaux ($P_F$) et ($P_{F'}$).
d- Construire l'image A'B' de l'objet AB si : $\overline{AB} = 1\,cm$ ; $\overline{FA} = 1\,cm$ ; $\overline{AH} = 2\,cm$ ; $\overline{HH'} = 2\,cm$ et $\overline{H'F'} = 4\,cm$. Quelle est la nature de A'B'?
e- Calculer $\overline{F'A'}$ en cm.
Soient n l'indice d'entré et n' l'indice de sortie du système (S). On place un objet AB au plan focal objet.
f- Où sera l'image A'B' de AB? Faire une construction géométrique.
g- Démonter (en supposant que AB est un objet très petit) que $f.n' = -f'.n$
h- Calculer n' si le milieu d'entré est l'air.

## Exercice II :

Le microscope est un instrument d'optique destiné à l'observation d'objets dont les dimensions sont de l'ordre du micromètre. On peut le modéliser par un système de deux lentilles minces convergentes de même axe principal : l'objectif et l'oculaire.
**A)** 1) Exprimer un micromètre en mètre et donner deux autres unités sous multiples du mètre utilisées dans le domaine de l'infiniment petit et indiquer la conversion en mètre.
2) Dans un microscope où se situe l'objectif ? Quel est son rôle ?
L'objectif est modélisé par une lentille mince convergente $L_1$ de centre optique $O_1$, de foyer objet $F_1$, de foyer image $F'_1$, de distance focale image $f'_1 = 16$ mm. L'oculaire est modélisé par une lentille $L_2$ de centre optique $O_2$, de distance focale image $f'_2 = 50$ mm. On souhaite observer un grain de pollen de longueur <u>l = 50 µm</u>. Ce grain sera représenté par un segment fléché AB, perpendiculaire à l'axe optique. A est placé sur l'axe optique à <u>17,6 mm</u> de $O_1$. L'image de AB donnée par l'objectif est notée $A_1B_1$ ; l'image de AB donnée par le microscope est notée A'B'.
On donne : $\overline{F_1'F_2} = 160$ mm.
3) a) Déterminer par le calcul la position de l'image intermédiaire $A_1B_1$. (on calculera $\overline{O_1A_1}$ et $\overline{O_2A_1}$).
b) En déduire que l'image définitive A'B' est rejetée à l'infini.
4) Calculer le grandissement $\gamma_1$ et déduire la taille de l'image intermédiaire $A_1B_1$
5) Faire une construction géométrique (sur le papier millimétré ci-joint) en tenant compte de l'échelle ci-dessous :
- sur l'axe des abscisses : 1 cm → 0,5 cm
- sur l'axe des ordonnées : 50 µm → 1 cm

**B)** Par convention la distance minimale de vision distincte pour un œil normal est $d_m$= 25 cm.
1) Calculer α le diamètre apparent du grain de pollen pour un œil normal, placé à la distance $d_m$.
2) Le grossissement d'un microscope est défini par G= α'/α ; α' représente l'angle sous lequel l'œil observe l'image A'B'. Donner l'expression de α' en fonction de $f'_2$ et $A_1B_1$. Calculer α'.
3) Calculer le grossissement du microscope.
4) Avec quelle unité propre à l'optique exprime-t-on la puissance P d'un microscope ?
5) Montrer que : P= 4 G.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice I :

a) La relation de Newton pour un couple $(A, A')$

$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$

b°) Les plans principaux.

(P) et (P') sont deux plans conjugues pour $\gamma = 1$

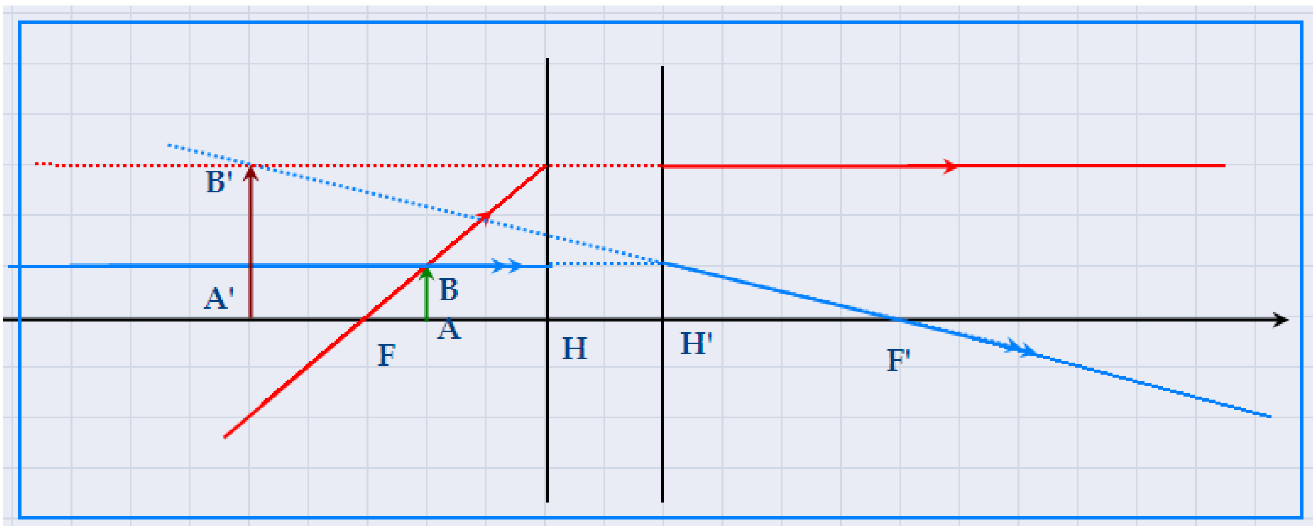
c°) - $(P_F)$ : plan principal objet ; le plan ⊥ à l'axe optique et passant par F.

$(P_{F'})$ : plan principal image ; le plan ⊥ à l'axe optique et passant par F'.

d°) - Construction géométrique.

$\overline{AB} = 1$ cm, $\overline{FA} = 1$ cm ; $\overline{AH} = 2$ cm $HH' = 2$ cm et $\overline{H'F'} = 4$ cm.

l'image A'B' est virtuelle.

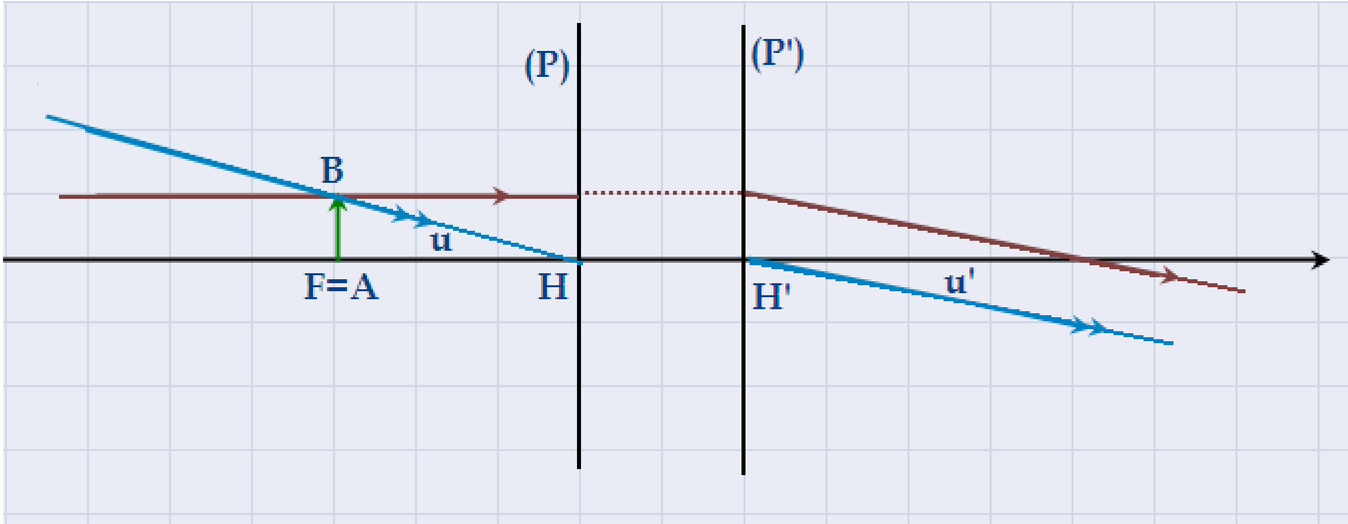



e°) - formule de Newton : $\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = ff' \Rightarrow \overline{F'A'} = \dfrac{ff'}{\overline{FA}}$

AN : $f = \overline{HF} = -3$ cm et $f' = \overline{H'F'} = 4$ cm, $f = -3$ cm.

$\overline{F'A'} = -12$ cm.

f°) - l'objet en $(P_F)$ Alors A'B' l'image sera à l'$\infty$




9°) - AB est très petit ⇒ on a les conditions de Gauss

on peut faire les approximation de Gauss.

on a $tg\,u = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FH}} = -\frac{\overline{AB}}{f}$ et $tg\,u' = \frac{\overline{H'J}}{\overline{H'F'}} = \frac{\overline{H'J}}{f'}$

or : $\overline{AB} = \overline{HI} = \overline{H'J}$ et $tg\,u \approx u$ ; $tg\,u' \approx u'$

$n \sin u \simeq n u$ et $n' \sin u' \approx n' u'$

Alors $n'u' = n u$

$nu \simeq -n \frac{\overline{AB}}{f}$ et $n'u' \simeq n' \frac{\overline{H'J}}{f'}$

d'ou $-\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} \Leftrightarrow f n' = -f' n$.

10°) milieu d'entré est l'aire ⇒ $n = 1$

$f' = 4$ ; $f = -3$

AN, $n' = -\frac{f'}{f} = -\frac{4}{(-3)} = \frac{4}{3}$.

## Exercice II :

A) - 1°) $1\,\mu m = 10^{-6}\,m$ ; $1\,nm = 10^{-9}\,m$ ; $pm = 10^{-12}$

$1\,fm = 10^{-15}\,m$.

2°) * L'objectif est la lentille la plus proche de l'objet

ou* l'objectif est situé avant l'oculaire
rôle de l'objectif : L'objectif "lentille" donne de l'objet réel une image réelle inversé plus grand que l'objet.

3°/ a – Position de l'image intermédiaire

Formule de Conjugaison : $\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}}$ avec $f_1' = 1{,}6\,cm$

$\overline{O_1A} = -1{,}76\ cm$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{\overline{O_1A}} \Rightarrow \overline{O_1A_1} = \frac{f_1' \cdot \overline{O_1A}}{f_1' + \overline{O_1A}}$$

AN : $\overline{O_1A_1} = 17{,}6\ cm = 176\ mm$.

* $\overline{O_2O_1}$ ? on calcule $\overline{O_1O_2}$

On a $\overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}$

$$\Rightarrow \overline{O_1O_2} = \overline{F_1'F_2} - \overline{F_1'O_1} - \overline{O_2F_2}$$

AN : $\overline{O_1O_2} = 160 + 16 + 50 = 226\ mm$.

Et . $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} \Rightarrow \overline{O_2A_1} = \overline{O_1A_1} - \overline{O_1O_2}$

AN : $\overline{O_2A_1} = 176 - 226 = -50\ mm$.

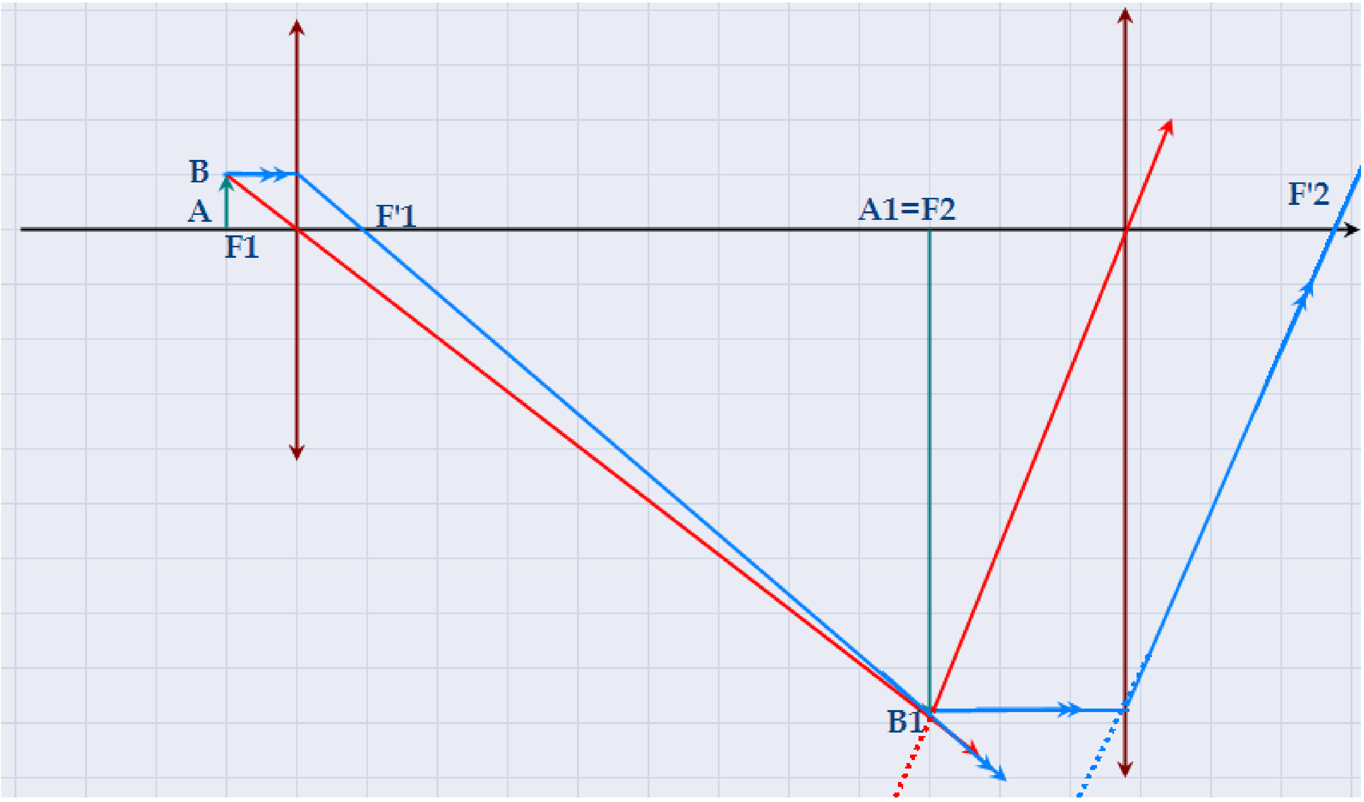
b°) – La position de $A_1B_1$ est confondue avec le foyer objet $F_2$ de l'oculaire : par conséquence l'image définitive sera rejetée à l'infini

4°) – Calcule du grandissement $\gamma_1$ :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{17{,}6}{-1{,}76} = -10$$

La taille de l'image $A_1B_1$ $\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \gamma_1 = 10 \times 50 = 500\ \mu m$.

5°). Construction géométrique.




B)- 1°) Le diamètre apparent du grain pollen pour l'œil normal, placé à dm est :

$$\alpha = \frac{50.10^{-6}}{0,25} = 2.10^{-4}\ rad.$$

2°) Expression de $\alpha'$

$$tg\alpha' = \frac{A_1B_1}{f'_2} (\equiv \alpha')$$

$$d'où \quad \alpha' = \frac{A_1B_1}{f'_2} = \frac{500.10^{-6}}{50.10^{-3}} \Rightarrow \alpha = 10^{-2}\ rad$$

$(A_1B_1 = 500\mu m = 500.10^{-6}\ m \quad f'_2 = 50mm = 50.10^{-3}\ m.)$

3°)- Le grossissement du microscope G :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = 10^{-2}/2.10^{-4} = 50$$

5°) $P = \frac{\alpha'}{AB}$ or $\alpha = \frac{AB}{0{,}25}$

d'où $P = \frac{\alpha'}{0{,}25\,\alpha} = \frac{4\alpha'}{\alpha} = 4G.$

# Controle 2 Optique géométrique 2006

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

On considère un dioptre sphérique de centre C, de sommet S et de rayon R= $|\overline{SC}|$ égal à 2cm. Ce dioptre sépare deux milieux transparents et homogènes d'indices d'entrée $n_1$ et de sortie $n_2$ tel que $n_1/n_2= 4/3$. La distance focale image de ce dioptre est f '=6cm.

1. Sachant que le milieu de sortie $n_2$ est l'air, déterminer $n_1$.
2. Construire géométriquement ce dioptre sphérique et placer ses foyers objet F et image F'.
3. On place un objet réel AB de hauteur 1cm à 4cm du sommet S du dioptre sphérique.
   a. Déterminer la position $\overline{SA'}$ de l'image A'B'. En déduire sa nature.
   b. Faire une construction à l'échelle unité.
4. Où faut-il placer un objet AB réel, par rapport à S, pour obtenir une image A'B' réelle, renversée et 2 fois plus grande que AB ?

## Exercice II :

Un oculaire est constitué par deux lentilles minces $L_1$ et $L_2$ de distances focales images respectives $f'_1$=60mm et $f'_2$=20mm. La distance $O_1O_2$ entre leurs centres optiques est e=40mm.

1. Déterminer par construction géométrique (utiliser la feuille graduée) :
   a. Les foyers objet $F_{oc}$ et image $F'_{oc}$ de l'oculaire, on donnera $\overline{F_1F_{oc}}$ et $\overline{F'_2F'_{oc}}$ ($F_1$ étant le foyer objet de $L_1$ et $F'_2$ le foyer image de $L_2$).
   b. Les points principaux objet $H_{oc}$ et image $H'_{oc}$ de l'oculaire, on donnera $f_{oc}= \overline{H_{oc}F_{oc}}$ et $f'_{oc}=\overline{H'_{oc}F'_{oc}}$.
2. Utiliser les formules d'association de deux systèmes centrés pour calculer $\overline{F_1F_{oc}}$ et $\overline{F'_2F'_{oc}}$, $f_{oc}= \overline{H_{oc}F_{oc}}$ et $f'_{oc}=\overline{H'_{oc}F'_{oc}}$.
3. En déduire la puissance intrinsèque $P_{ioc}$ et le grossissement commercial $G_{oc}$ de cet oculaire.

## Exercice III :

On associe un oculaire de distance focale image $f'_{oc}$= 30 mm à un objectif de distance focale image $f'_{ob}$= 2,5 mm pour constituer un microscope ayant un intervalle optique $\Delta$= 18 cm.

1. Calculer la puissance intrinsèque $P_i$ et le grossissement commercial $G_c$ de ce microscope.
2. L'objectif de ce microscope donne d'un point objet A une image située au foyer objet de l'oculaire.
   a. Déterminer le grandissement linéaire $\Gamma_{ob}$ de cet objectif.
   b. Retrouver à partir de $\Gamma_{ob}$ les valeurs de la puissance intrinsèque $P_i$ et du grossissement commercial $G_c$ du microscope (On utilisera pour cette question $P_{oc}=1/f'_{oc}$).

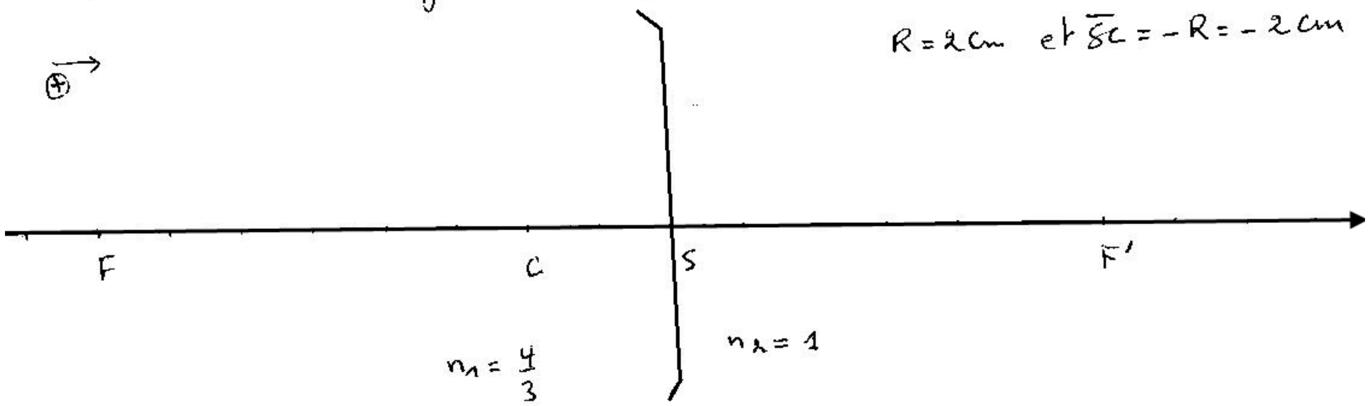
# Correction :

## Exercice I :

1°) On a $\frac{n_1}{n_2} = \frac{4}{3} \Rightarrow n_1 = \frac{4}{3} n_2 = \frac{4}{3}$ ($n_2 = 1$ air)

2°) construction géométrique du dioptre

$R = 2cm$ et $\overline{SC} = -R = -2cm$




$\overline{SF'} = f' = 6 cm$.

$$\overline{SF} = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \overline{SC} = \frac{4/3}{\frac{4}{3} - 1} \cdot (-2) = -8 Cm$$

$$\left( A \equiv F \Rightarrow A' \to \infty \Rightarrow \frac{n_1}{\overline{SF}} - 0 = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \right)$$

3°) $\overline{AB} = 1 cm$ réel ($SA < 0$)

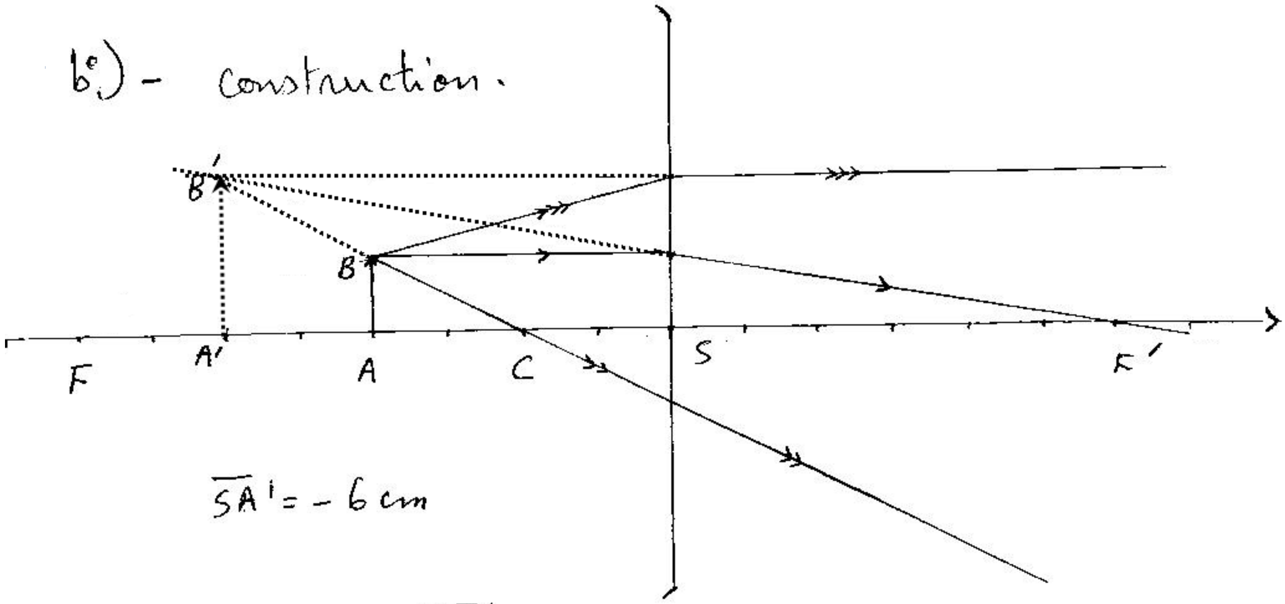
a) - $\overline{SA} = -4 Cm$

On a $\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \Rightarrow \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} + \frac{n_1}{\overline{SA}}$

$$\Rightarrow \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{(n_2 - n_1)\overline{SA} + n_1 \overline{SC}}{\overline{SC} \cdot \overline{SA}}$$

Alors $\overline{SA'} = \frac{n_2 \overline{SC} \cdot \overline{SA}}{(n_2 - n_1)\overline{SA} + n_1 \overline{SC}}$ AN: $\overline{SA'} = -6 Cm$

b°) - construction.




$\overline{SA'} = -6\,cm$

4°) - On a $\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -2$ (1)

et on a $\frac{n_1}{\overline{SA}} - \frac{n_2}{\overline{SA'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}}$ (2)

$\Gamma = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -2 = \frac{4}{3} \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow \overline{SA'} = -\frac{6}{4} \overline{SA} = -\frac{3}{2} \overline{SA}$

on remplace dans la formule (2) $\frac{4/3}{\overline{SA}} - \frac{1}{-\frac{3}{2}\overline{SA}} = \frac{1/3}{-2}$

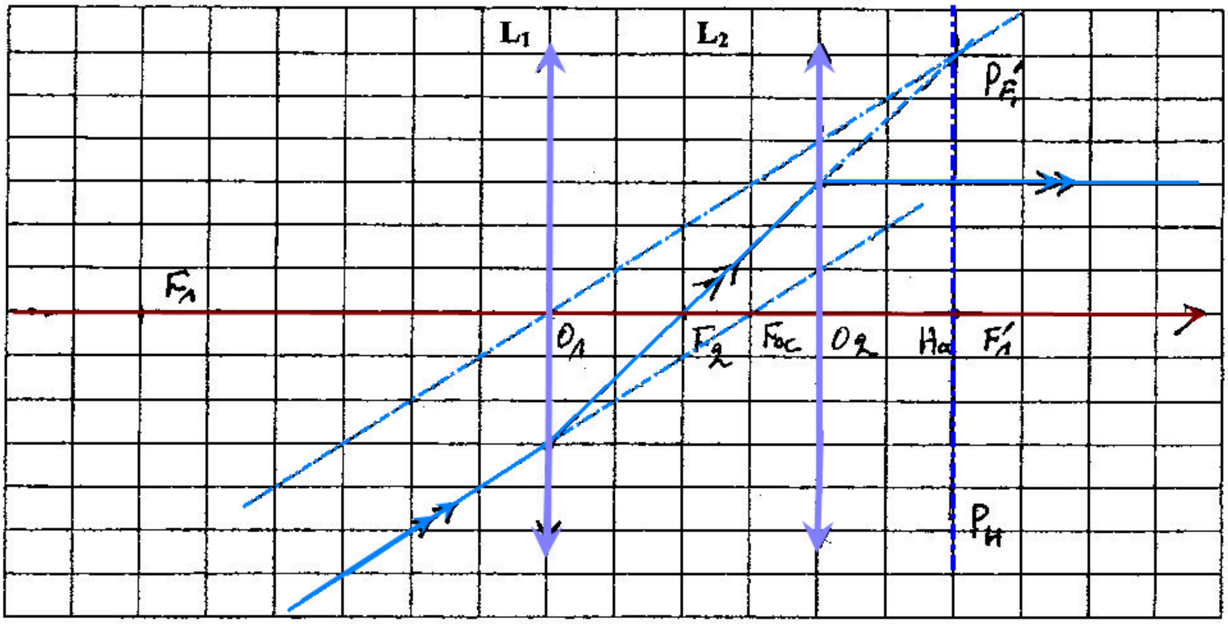
$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA}} \left( \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{6}$ donc $\overline{SA} = -12\,cm$

l'objet AB à 12 cm du sommet S. $\overline{SA} < 0 \Rightarrow$ AB réel.

## Exercice II :

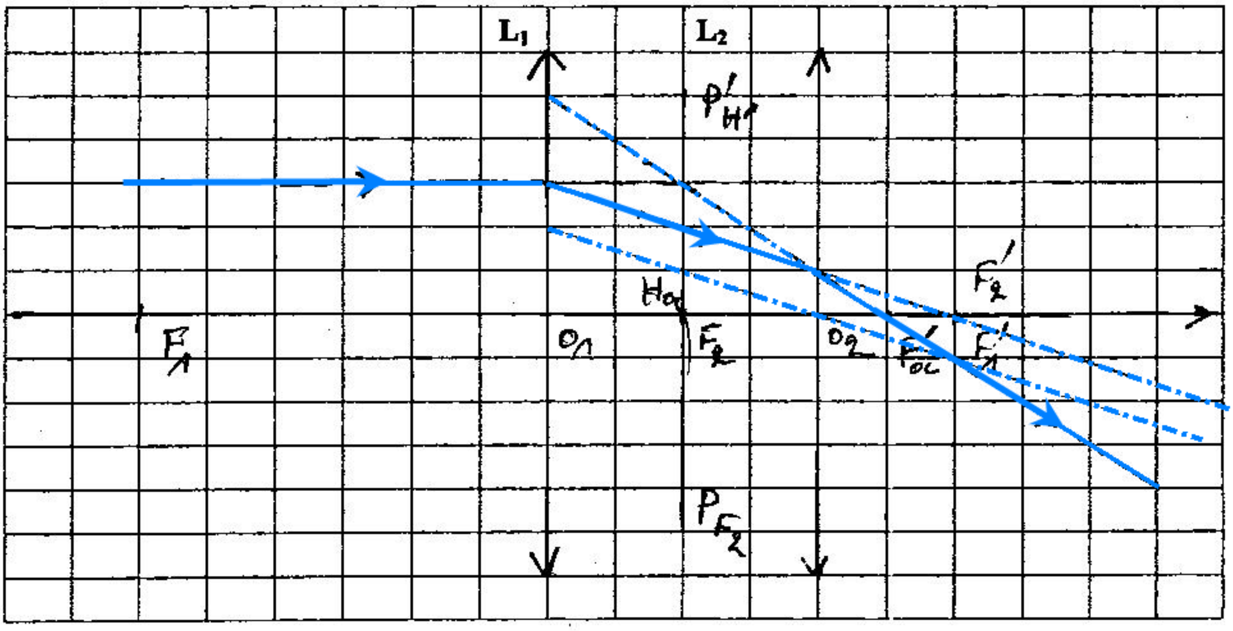
**1/ représentation de $F_{oc}$ et de $H_{oc}$**

- ____ $L_1$, $L_2$, $F_1$, $F'_1$, $F_2$ et $F'_2$ la position de $F_{oc}$ et de $H_{oc}$
- $\overline{F_1F_{oc}} = +9$ cm et $f_{oc} = \overline{H_{oc}F_{oc}} = -3$ cm




**2/ représentation de $F'_{oc}$ et de $H'_{oc}$**

- Placer $L_1$, $L_2$, $F_1$, $F'_1$, $F_2$ et $F'_2$. la position de $F'_{oc}$ et de $H'_{oc}$
- $\overline{F'_2F'_{oc}} = -1$ cm et $f'_{oc} = \overline{H'_{oc}F'_{oc}} = +3$ cm




**N.B.:** On pourra considérer que les carreaux de la feuille sont de 1cm de coté, échelle unité.

2°/ $\Delta = -f'_1 + f_2 + e = -40$ mm $= -4$ cm .

$$\overline{F_1F_{oc}} = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} = +9\ cm$$

$$\overline{F_2F'_{oc}} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta} = -1\ cm$$

$$f_{oc} = \overline{H_{oc}F_{oc}} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = -3\ cm.$$

$$f'_{oc} = \overline{H'_{oc}F'_{oc}} = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = +3\ cm$$

3°) - $P_{i_{oc}} = \left|\frac{1}{f'_{oc}}\right| = 33\ \delta = 33\ m^{-1}$

$$G_{com} = \frac{P_{i\,oc}}{4} = 8{,}33.$$

---

## Exercice III :

1°) la puissance intrinsèque $P_i$ du microscope.

$P_{i\,mic} = \left|\frac{1}{f'_{mic}}\right| = \left|-\frac{\Delta}{f'_{oc} f_{ob}}\right|$ car $f'_{mic} = \frac{f'_{oc}\cdot f'_{ob}}{\Delta} = -\frac{f'_{oc} f_{o}}{\Delta}$

AN : $P_{i\,mic} = 2440\ m^{-1} = 2440\ \delta$

$\Rightarrow \quad f'_{mic} = -0{,}041\ cm.$

le grossissement commerciale $G_c$ du microscope.

$G_c = \frac{P_{i\,mic}}{4}$. AN : $\| G_c = 610$.

2°) - a) le grandissement linéaire $\Gamma_{ob}$ de l'objectif.

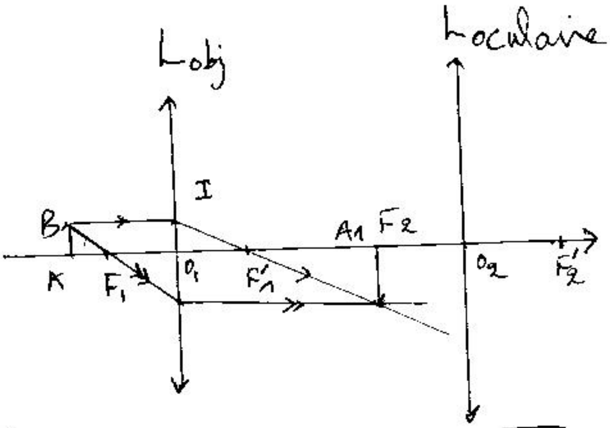
$$\Gamma_{ob} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{-\Delta}{f'_{ob}} = -72 < 0$$

$$AB \xrightarrow[\text{objectif}]{} A_1B_1 \xrightarrow[\text{oculaire}]{} A'B'$$ avec $A_1B_1 \in P_{F_2} \Rightarrow A_1 \equiv F_2$

$\parallel$ $\Gamma_{ob} = -72 < 0$

On a $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1I}} = \dfrac{\overline{F_2F'_1}}{\overline{O_1F_1}} = -\dfrac{\Delta}{f'_{ob}} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \Gamma = -\dfrac{\Delta}{f'_{obj}}$

( $IO_1F_1$ et $O_1F_2B_1$ sont deux triangulaire semblable.




$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1I}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{\Delta}{f'_{ob}} \Rightarrow \Gamma = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\Delta_{obj}}{f'_{ob}}$$

b°) Puissance intrinsique

$\Gamma_{ob} = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\dfrac{\Delta}{f'_{ob}}$ et $P_{mic} = \dfrac{\alpha'}{\overline{AB}} = P_{oc} \cdot \Gamma_{obj}$

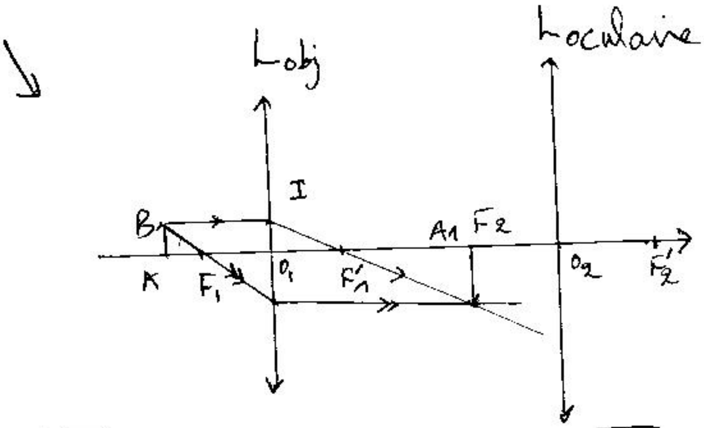
$$\Gamma_{ob} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{-\Delta}{f'_{ob}} = -72 < 0$$

$$AB \xrightarrow[\text{objectif}]{} A_1B_1 \xrightarrow[\text{oculaire}]{} A'B'$$ avec $A_1B_1 \in P_{F_2} \Rightarrow A_1 \equiv F_2$

|| $\Gamma_{ob} = -72 < 0$

On a $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1I}} = \frac{\overline{F_2F'_1}}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{\Delta}{f'_{ob}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow \Gamma = -\frac{\Delta}{f'_{obj}}$

( $IO_1F'_1$ et $O_1F_2B_1$ sont deux triangulaire semblable.




$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1I}} = \frac{\overline{F_2F_1}}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{\Delta}{f'_{ob}} \Rightarrow \Gamma = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\Delta_{obj}}{f'_{ob}}$$

b) Puissance intrinsique.

$\Gamma_{ob} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\Delta}{f'_{ob}}$ et $P_{mic} = \frac{\alpha'}{\overline{AB}} = P_{oc} \cdot \Gamma_{obj}$

# Contrôle 2 Optique Géométrique : 2007

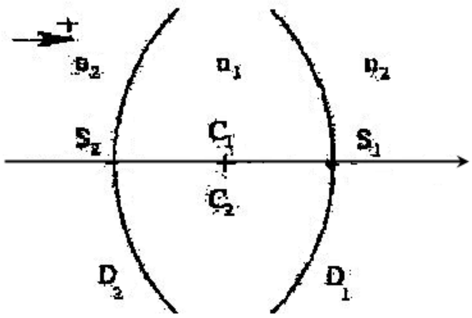
**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

(A traiter dans les conditions de l'approximation de Gauss)

On considère un dioptre sphérique convergent $D_1$ de centre $C_1$, de sommet $S_1$ et de rayon $R_1$=4 cm. Ce dioptre sépare deux milieux homogènes et transparents d'indices $n_1$=1,5 (milieu d'entrée) et $n_2$=1 (milieu de sortie).

1. Rappeler la relation de conjugaison ainsi que celle du grandissement linéaire γ pour un dioptre sphérique avec origine au centre.
2. Déterminer la position des foyers principaux objet F et image F' de ce dioptre (On donnera $\overline{CF}$ et $\overline{CF'}$).
3. Où doit-on placer, sur l'axe principal de $D_1$, un objet réel AB de hauteur 1 cm pour que son image A'B' à travers ce dioptre soit virtuelle, droite et deux fois plus grande que l'objet ? En déduire la position de l'image. On donnera $\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$.
4. Faire une construction géométrique à l'échelle 1/2.
5. On associe au dioptre $D_1$ un autre dioptre sphérique $D_2$ de centre $C_2$, de sommet $S_2$ et de rayon $R_2$=$R_1$=R, comme indiqué sur la figure ci-contre.
   a. En utilisant la relation de conjugaison avec origine au centre pour $D_1$ et $D_2$, montrer que le système optique obtenu est équivalent à une lentille mince ?
   b. En déduire sa distance focale f en fonction de $n_1$ et R.




## Exercice II :

On considère deux lentilles $L_1$ et $L_2$ de centres optiques $O_1$ et $O_2$, placées dans l'air et ayant même axe optique, tel que $\overline{O_1O_2} = 2\,\text{cm}$. On donne les distances focales images $f_1' = -2\,\text{cm}$ et $f_2' = 2\,\text{cm}$.

1. Calculer les distances focales $f$ et $f'$ du système optique équivalent aux deux lentilles $L_1$ et $L_2$ (On donnera $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ ). En déduire la nature du système ainsi formé.
2. a) Construire géométriquement les positions des foyers objet et image et les positions des points et plans principaux objet et image (On donnera $\overline{F_1F}$, $\overline{F_2'F'}$ , $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ ). Utiliser la feuille jointe.
   b) Comparer $\overline{HF}$ et $\overline{H'F'}$ à celles de la Question 1.

## Exercice III :

Le système construit par les deux lentilles de l'Exercice 2 ci-dessus, forme un oculaire $L_{oc}$ de distance focale image $f_{oc}' = 2\,cm$, pour un microscope dont l'objectif est une lentille $L_{ob}$ de distance focale image $f_{ob}' = 5\,\text{mm}$. Ce microscope d'intervalle optique $\Delta_{mic} = 17\,cm$ est utilisé par un œil d'observation normal placé au foyer image de l'oculaire. Il sert à analyser un objet réel AB placé sur son axe optique devant l'objectif.

1. Construire géométriquement l'image A'B' obtenue à travers ce microscope dans le cas d'une vision à l'infini.
2. Calculer la distance focale $f_{mic}'$ du microscope. En déduire sa puissance pour une mise au point à l'infini.
3. Etablir et calculer le grossissement commercial.

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

## Correction :

### Exercice I :

1°) * Relation de conjugaison avec origine au centre pour un dioptre sphérique : $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$

* Grandissement linéaire : $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

2°) Position des foyer principaux.

* Foyer objet :

objet A placé à F $\xrightarrow{DS}$ l'image sera à l'infini

$\Rightarrow 0 - \frac{n_2}{\overline{CF}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \overline{CF} = -\frac{n_2}{n_1 - n_2}\overline{CS}$ , $\overline{CS} = R > 0$

* Foyer image :

objet A à l'infini $\xrightarrow{DS}$ l'image confondue avec F'

$\Rightarrow \frac{n_1}{\overline{CF'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$ Alors : $\overline{CF'} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{CS}$

AN : $R = 4$ cm , $n_1 = \frac{3}{2}$ , $n_2 = 1$

|| $\overline{CF} = -8$ Cm.

|| $\overline{CF'} = +12$ Cm.

3°) On a L'objet AB ~~est~~ réel donne une image droite et deux fois plus grande que l'objet

$\gamma = 2 = \frac{A'B'}{AB} > 0$ or $A'B' > 0 \Rightarrow \overline{AB} = +$ Cm.

$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = 2 \Longrightarrow \overline{CA'} = 2\overline{CA}$.

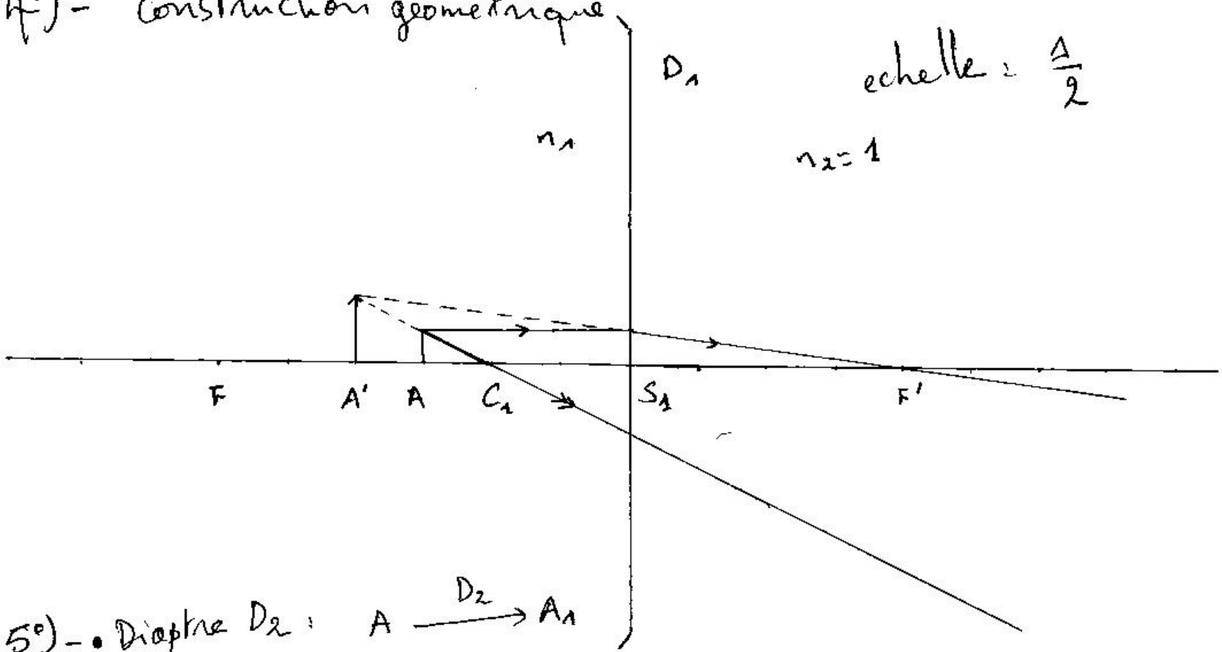
$$\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_1}{\overline{CA}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{CA}}\left(\frac{n_1}{2} - n_2\right) = \frac{n_1 - n_2}{\overline{CS}}$$

$$\rightarrow \overline{CA} = \frac{n_1 - 2n_2}{2(n_1 - n_2)} \cdot \overline{CS} \quad AN : \overline{CA} = -2\,cm.$$

On a $\overline{CA'} = 2\overline{CA} \Rightarrow \overline{CA'} = -4\,cm.$

$\overline{SA} = \overline{SC} + \overline{CA}$ AN: $\overline{SA} = -6\,cm.$
$\overline{SA'} = \overline{SC} + \overline{CA'}$ AN: $\overline{SA'} = -8\,cm$
$\overline{SF} = \overline{SC} + \overline{CF}$ AN, $\overline{SF} = -12\,cm$
$\overline{SF'} = \overline{SC} + \overline{CF'}$ AN: $\overline{SF'} = +8\,cm$

4°)- construction géométrique




5°)- • Dioptre $D_2$ : $A \xrightarrow{D_2} A_1$

✓ $\frac{n_2}{\overline{CA_1}} - \frac{n_1}{\overline{CA}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{C_2S_2}}$ ① $\qquad R_2 = -\overline{S_2C_2} = S_2C_1 > 0$

• Dioptre $D_1$ : $A_1 \xrightarrow{D_1} A'$

✓ $\frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{C_1S_1}}$ ② $\qquad R_1 = -\overline{S_1C_1} = C_1S_1 > 0$

$$(1)+(2) \Rightarrow \frac{n_2}{\overline{CA_1}} - \frac{n_1}{\overline{CA}} + \frac{n_1}{\overline{CA'}} - \frac{n_2}{\overline{CA_1}} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{C_2S_2}} + \frac{n_1 - n_2}{\overline{C_1S_1}}$$

$$\Rightarrow -\frac{n_1}{\overline{CA}} + \frac{n_1}{\overline{CA'}} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{\overline{C_2S_2}} - \frac{1}{\overline{C_1S_1}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{\overline{C_2S_2}} - \frac{1}{\overline{C_1S_1}}\right).$$

$$= \frac{n_1 - n_2}{n_1}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

$$= \frac{n_1 - n_2}{n_1}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right). = \frac{1}{f'}$$

$$\| \frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{f'}.$$

b°)- Soit $f' = \dfrac{n_1 R_1 R_2}{(n_1 - n_2)(R_1 + R_2)} = \dfrac{n_1 R}{2(n_1 - n_2)}$ $\quad (R_1 = R_2 = R)$

$$\| f = -f' = \frac{n_1 R}{2(n_2 - n_1)}.$$

## Exercice II :

1°)- les distances focales f et f' du système optique equivalent aux deux lentilles $L_1$ et $L_2$.

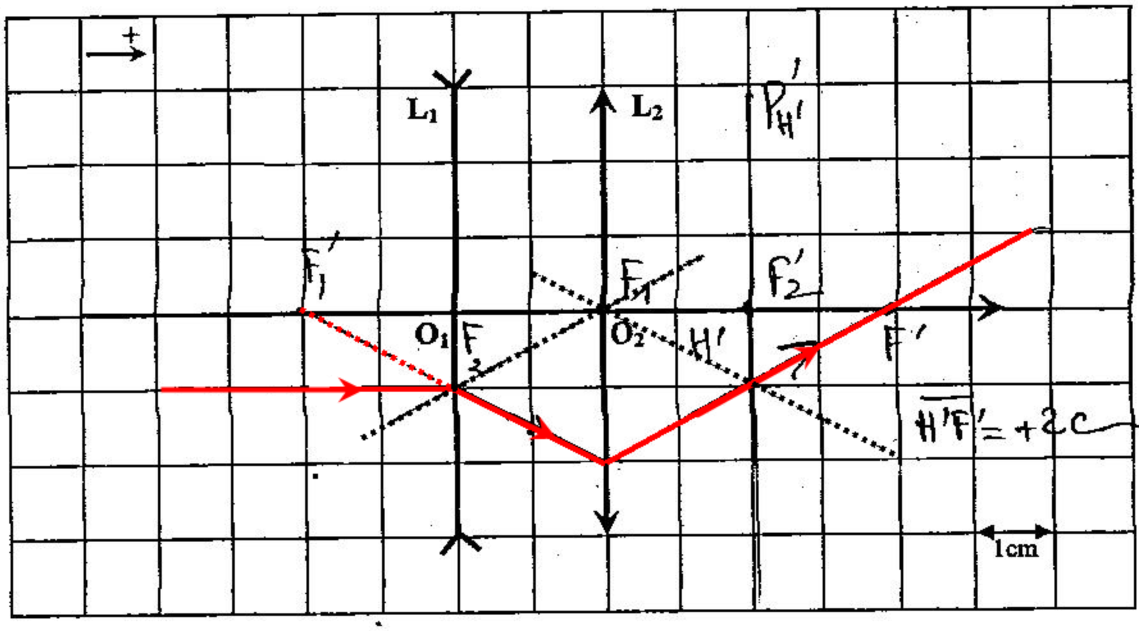
1°). On a $HF = \dfrac{f_1 f_2}{\Delta}$ avec $\Delta = -f'_1 + e + f_2 = +2\,cm.$

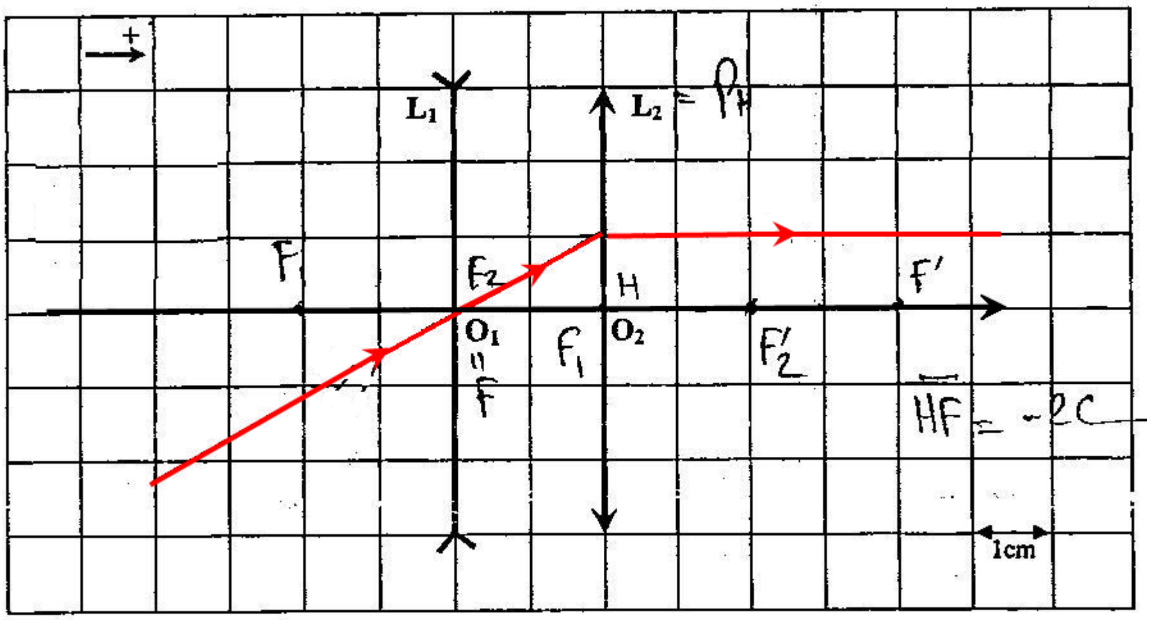
$HF = f = -2\,cm.$ $\quad (f'_1 = -2\,cm.,\ f'_2 = 2\,cm)$

$\overline{H'F'} = f' = -\dfrac{f'_1 f'_2}{\Delta} = +2\,cm.$

On a $f' > 0 \Rightarrow$ système equivalent est convergent.

2°)- a) Construction geométrique.




à partir de la construction :

On a : $\overline{HF} = -2cm$ ; $\overline{H'F'} = +2cm$.

$\overline{F_1F} = -2cm$ ; $\overline{F_2F'} = +2cm$

b) - les valeurs des distances focales calculées en 1°) sont égales aux valeurs trouvées géométriquement.

## Exercice III :

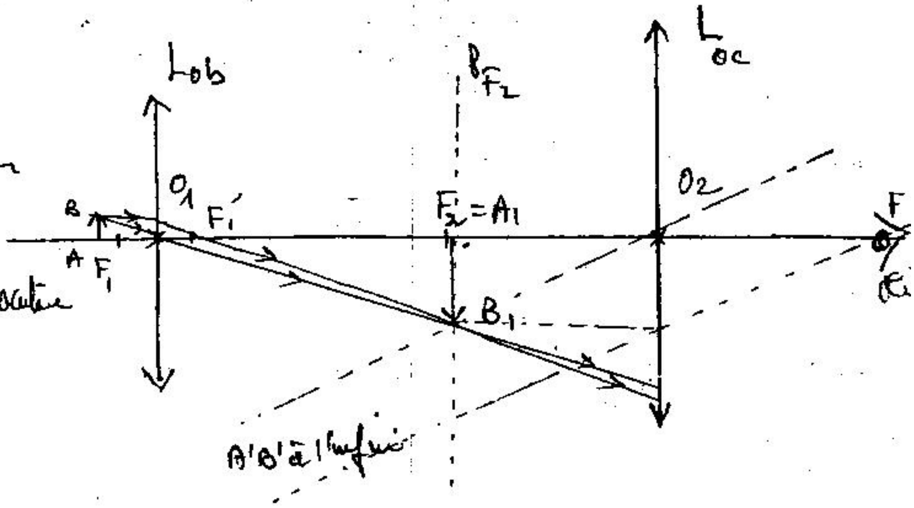
1°/

→ Les étudiants doivent noter que dans ce cas

$A_1B_1 \in P_{F_2}$ = Plan focal oculaire

$A_1 \equiv F_{oculaire}$

L'œil n'accommode pas !




2°) - La distance focale $f'_{mic}$ du microscope.

$$f'_{mic} = -\frac{f'_{ob}\cdot f'_{oc}}{\Delta} = \frac{-2\cdot 0,5}{17} = -\frac{1}{17} = -0,058 \text{ cm}$$

Pour une mise au point à l'infini, la puissance P

$$P = P_{intrinsèque} = \left|\frac{1}{f'_{mic}}\right| \quad \text{AN: } P_{mic} = 1724\ \delta$$

3°) - le grossissement commercial :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha'}{AB}\cdot\frac{AB}{\alpha} = P\cdot d$$ : pour l'observatoire normale.

$d = 0,25\ \text{m} = \frac{1}{4}\ \text{m}$

$$G = \frac{P}{4} \quad \text{AN: } G_{com} = \frac{P_i}{4} = 430.$$

$$G_{com} = 430$$

# Controle 2 Optique géométrique 2007/2008

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

## Question de cours :(4 pts)

Pour un instrument optique définir :

a- Le grandissement linéaire
b- Le grossissement
c- La puissance
d- Le grossissement commercial.

## Problème : (16 pts)

Sur un banc optique, on place deux lentilles minces $L_1$ ($O_1$, $F_1$, $F'_1$) et $L_2$ ($O_2$, $F_2$, $F'_2$) de distances focales images respectives $f'_1$=20 mm et $f'_2$ = 15 mm. $\overline{O_1O_2} = 70mm$. Un objet réel AB, de hauteur 1,5 mm, est placé à 30 mm du centre optique de $L_1$.

1. Déterminer la position de l'image intermédiaire $A_1B_1$, par rapport à $O_1$, et la position de l'image finale A'B' par rapport à $O_2$.
2. Calculer le grandissement linéaire $\gamma$ de l'image finale.
3. Construire géométriquement (Figure 1, une demi page) les deux images $A_1B_1$ et A'B' (échelle 1/1 sur x'x et 10/1 sur y'y, **à respecter SVP**). Quelle est la nature de l'image A'B' ?
4. Déterminer par construction géométrique (Figure 2, même échelle, une demi page) les points cardinaux (F, F', H, H') du système optique (S) constitué de $L_1$ et $L_2$. En déduire **approximativement** $\overline{F_1F}$ ; $\overline{F'_2F'}$ ; $\overline{H'F'}$ et $\overline{HF}$.
5. Calculer l'intervalle optique : $\Delta = \overline{F'_1F_2}$
6. Calculer, en utilisant les formules de Newton, $\overline{F_1F}$ et $\overline{F'_2F'}$.
7. Calculer : $$\overline{H'F'} = f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \qquad et \qquad \overline{HF} = f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$$
En déduire $\overline{AH}$ et $\overline{HH'}$ **(ne pas utiliser les valeurs de la question 4.)**
8. Construire l'image A'B' de l'objet AB à travers le système centré (S)= (F, F', H, H') **(Figure 3; même échelle). Quelle est la nature de l'image A'B'** ?
9. Le système est-il convergent ou divergent ? Justifier.
10. Quelle utilité peut avoir le système étudié.

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

## Correction :

### Question de cours :

**a-Grandissement linéaire Γ.**

On appelle grandissement linéaire ou transversal le rapport de la mesure algébrique de A'B' à celle de AB :

$$\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

**b- Grossissement G.**

G est le rapport de l'angle α' sous lequel on voit l'image depuis la pupille de sortie (Os) du système à l'angle α sous lequel on voit l'objet là où il est à l'œil nu sans instrument.

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

**c- Puissance P**

La puissance d'un instrument est le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image donnée par l'instrument à la longueur de l'objet.

$$P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}$$

**d- Grossissement commercial**

$G_C$ est défini en choisissant la distance minimum de vision distincte d égale à 0, 25 m

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_0}, \text{ avec : } \alpha_0 = \frac{\overline{AB}}{0{,}25}, \text{ d'où : } G_C = \frac{0{,}25\,\alpha'}{\overline{AB}} = \frac{p_i}{4} = \frac{1}{4.f'}$$

## Problème :

1°) – $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1$ : $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$

$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{O_1A}}$ donc $\overline{O_1A_1} = \frac{f'_1 \cdot \overline{O_1A}}{f'_1 + \overline{O_1A}}$

AN : $\overline{O_1A_1} = 60\ mm$.

$\overline{A_1B_1} \xrightarrow{L_2} \overline{A'B'}$ : $\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A'}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}}$ donc $\overline{O_2A'} = \frac{f'_2 \cdot \overline{O_2A_1}}{f'_2 + \overline{O_2A_1}}$

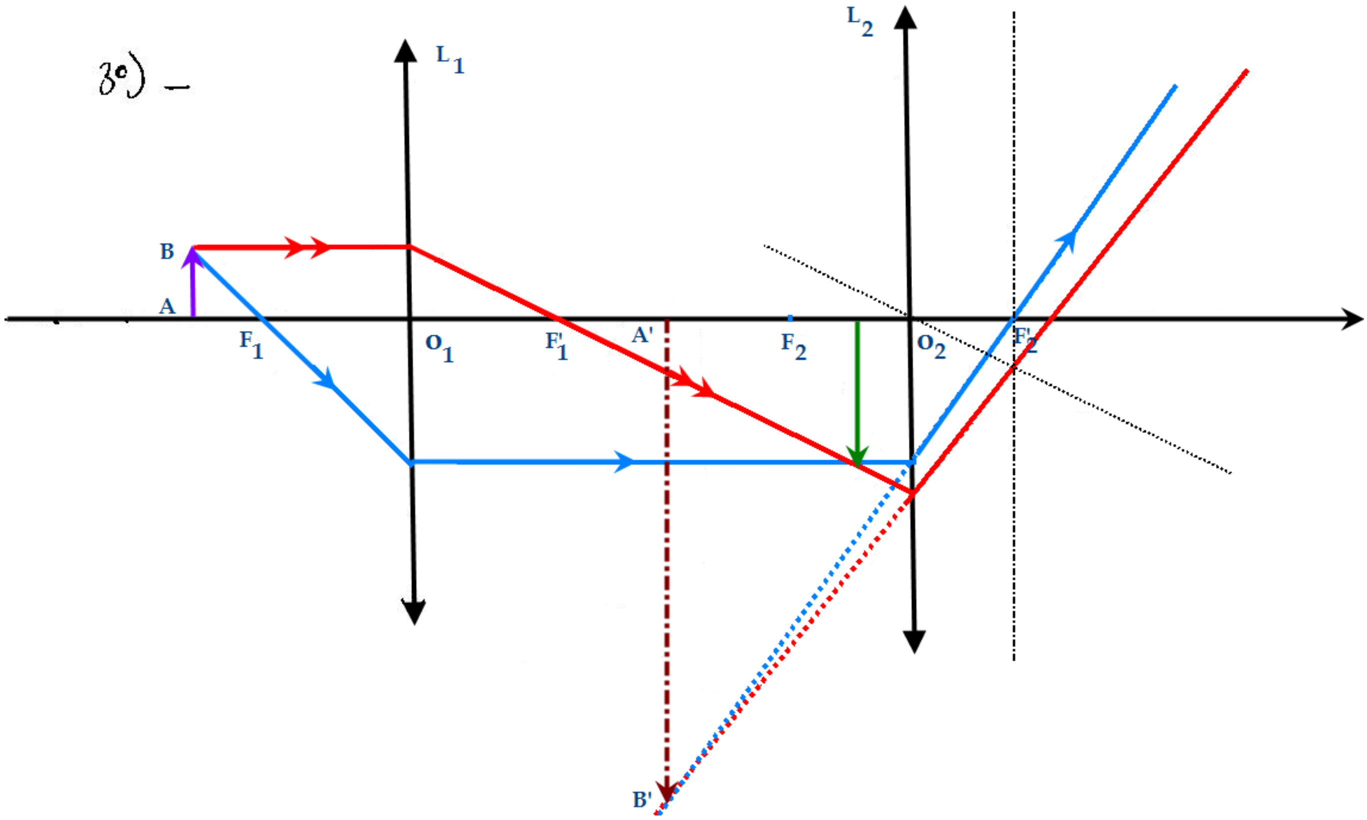
avec $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2A_1} + \overline{O_1A_1} = -10\ mm$.

AN : $\overline{O_2A'} = -30\ mm$.

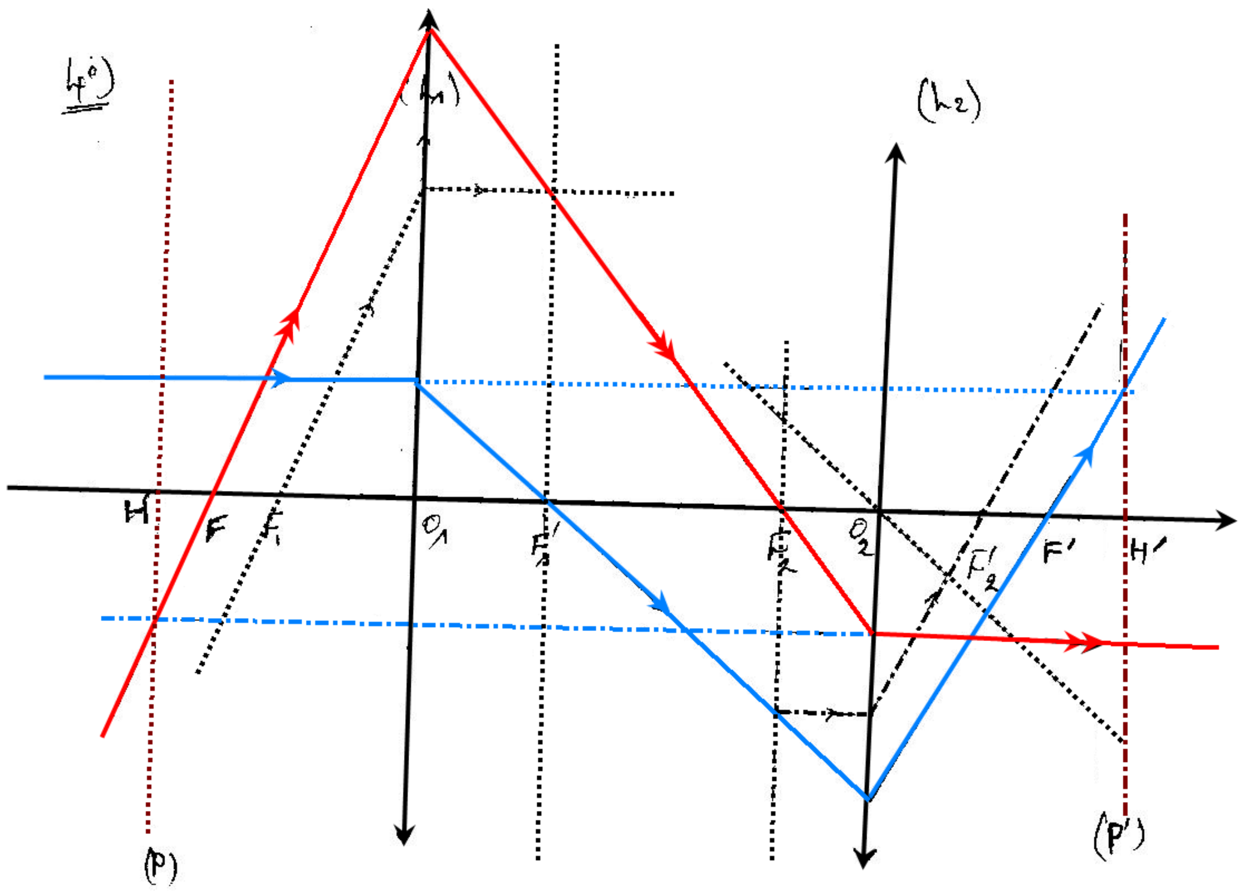
2°) – Grandissement :

On a $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \cdot \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = -2 \cdot 3 = -6$

3°) –




4°)



Mesure approximative D'après la construction géométrique

$\overline{F_1F} \simeq -10\,mm$

$\overline{F_2'F'} \simeq 10\,mm$

$\overline{H'F'} \simeq -10\,mm$

$\overline{HF} \simeq 10\,mm$

5°). $\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2}$

$= -f_1' + \overline{O_1O_2} + f_2$

AN : $\Delta = 35\ mm$.

6°)- $F \xrightarrow{(L_1)} F_2$

$(L_1)$ : formule de Newton : $\overline{F_1F} \cdot \overline{F_1'F_2} = f_1' f_1$

$$\overline{F_1F} = \frac{f_1' f_1}{\overline{F_1'F_2}} = \frac{f_1' f_1}{\Delta} = -\frac{400}{35} = -11{,}4\ mm$$

* $F_1' \xrightarrow{L_2} F'$ : on applique la formule de Newton pour la lentille $(L_2)$ : $\overline{F_2F_1'} \cdot \overline{F_2'F'} = f_2 f_2'$

$$\Rightarrow \overline{F_2'F'} = \frac{f_2 f_2'}{\overline{F_2F_1'}} = -\frac{f_2 f_2'}{\overline{F_1'F_2}} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$

AN : $\overline{F_2'F'} = +6{,}5\ mm$

7°)- $f' = \overline{H'F'} = -\dfrac{f_1' f_2}{\Delta}$ AN : $f' = -8{,}5\ mm$.

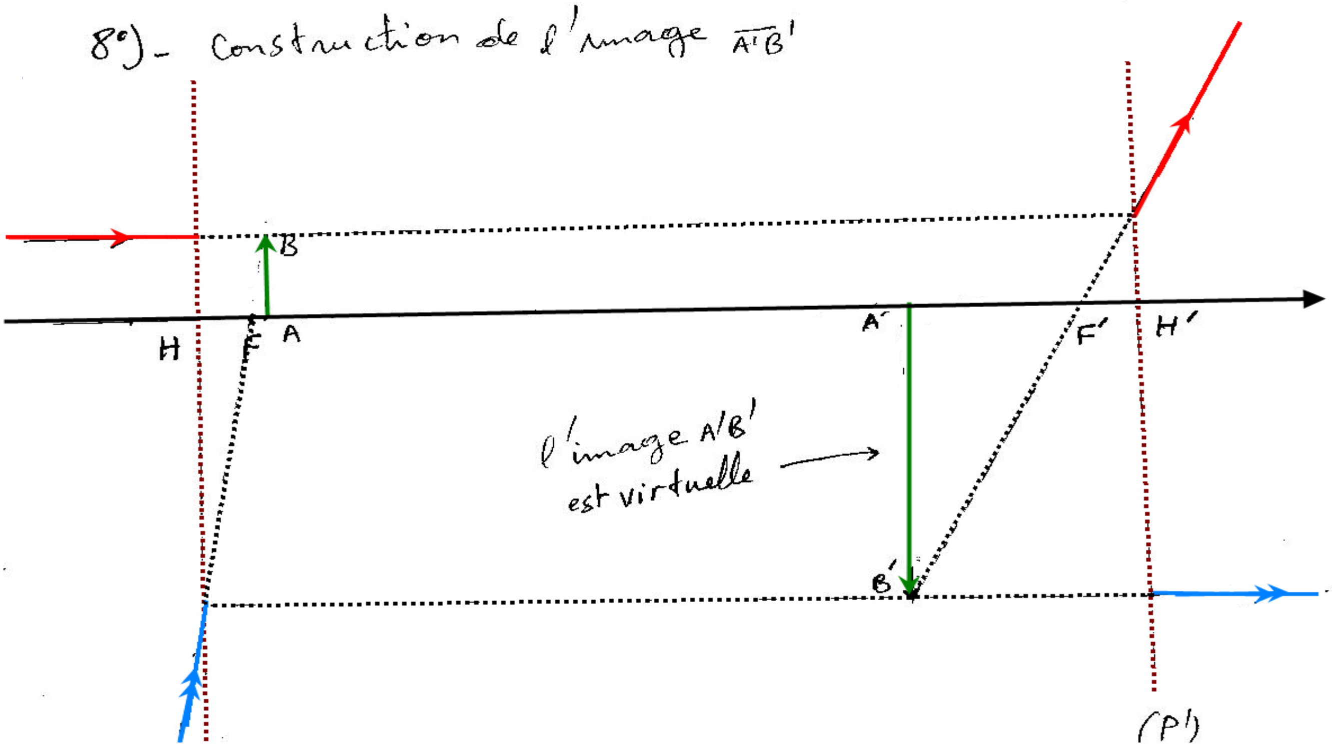
$f = \overline{HF} = \dfrac{f_1 f_2}{\Delta}$ AN : $f = +8{,}5\ mm$.

$\overline{AH} = \overline{AO_1} + \overline{O_1F_1} + \overline{F_1F} + \overline{FH} \Rightarrow \overline{AH} = -10\ mm$.

$\overline{HH'} = \overline{HF} + \overline{FF_1} + \overline{F_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2'} + \overline{F_2'F'} + \overline{F'H'}$

AN : $\overline{HH'} = 140\ mm$.

8°)- Construction de l'image $\overline{A'B'}$




9°)- On a $f' < 0$ ou $f > 0$

$\Rightarrow$ le système centré est divergente.

10°) ce système donne une image virtuel agrandit d'un objet virtuelle

Alors on parle d'un oculaire.

# Extrait du Contrôle rattrapage : 2004/2005

**Filières : SMP -SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

On se propose d'étudier la réaction d'oxydo-réduction entre les couples $Br_2/Br^-$ et $BrO_3^-/Br_2$, notés respectivement 1 et 2.

1- Ecrire en milieu acide, les demi-réactions d'oxydo-réduction relatives aux couples 1 et 2.

2-

a- Donner les expressions des potentiels d'électrode de ces deux couples.

b- En se plaçant dans les conditions données ci-dessous, déterminer à 298K, les valeurs de ces potentiels.

3- Ecrire la réaction globale susceptible d'avoir lieu dans ces conditions entre les couples considérés.

4- Exprimer la constante d'équilibre K de la réaction globale en fonction des potentiels standards $\pi°_1$ et $\pi°_2$ et calculer sa valeur.

**Données:** $\pi° (Br_2/Br^-) = \pi°_1 = 1{,}08$ V; $\pi° (BrO_3^-/Br_2) = \pi°_2 = 1{,}5$ V

$P(Br_2) = 1$ atm; $[BrO_3^-]_0 = 10^{-1}$ M; $[Br^-]_0 = 10^{-1}$M;

pH = 2; $(RT/F)LnX = 0{,}06\log_{10}X$ à T=298K.

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

## Exercice I :

$$Br_2(g) + 2e^- \rightleftarrows 2Br^-(aq)$$

$$2BrO_3^-(aq) + 10e^- + 12H^+ \rightleftarrows Br_2(g) + 6H_2O$$

$$\pi_1 = \pi_1^\circ + \frac{RT}{2F} Ln \frac{P_{Br_2}}{[Br^-]^2}$$

$$\pi_2 = \pi_2^\circ + \frac{RT}{10F} Ln \frac{[BrO_3^-]^2[H^+]^{12}}{P_{Br_2}}$$

$$\pi_1 = 1{,}08 + \frac{0{,}06}{2}\log\left(\frac{1}{10^{-2}}\right) = 1{,}14V$$

$$\pi_2 = 1{,}5 + \frac{0{,}06}{10}\log\left(\frac{10^{-2}\times 10^{-24}}{1}\right) = 1{,}344V$$

$$2BrO_3^- + 12H^+ + 10Br^- \longrightarrow 6Br_2 + 6H_2O$$

A l'équilibre $\Delta G = 0$, donc $\Delta G° = -RTLnK$

D'autre part, $\Delta G° = -10F(\pi_2^\circ - \pi_1^\circ)$

Finalement $K = 10^{\frac{(\pi_2^\circ - \pi_1^\circ)}{0{,}006}} = 10^{70}$

# Extrait du Contrôle rattrapage : 2008/2009

**Filières : SMP -SMC** **Semestre 2**

## Exercice I :

I- On considère les deux solutions aqueuses suivantes :

- Solution $S_1$ : **Monoacide fort** $A_1H$ de concentration $C_1 = 10^{-3}M$
- Solution $S_2$ : **Monoacide faible** $A_2H$ de concentration $C_2 = 5.10^{-2}M$

1- Calculer la valeur du pH de la solution $S_1$ (justifier les approximations faites).

2- Sachant que les deux solutions ont la même valeur de pH, déterminer la valeur du pKa de l'acide faible $A_2H$ (justifier les approximations faites).

3- On prépare une solution $S_3$ en mélangeant $V_1 = 50$ mL de $S_1$ et $V_2 = 50$ mL de $S_2$.

a- Écrire les réactions en solution.

b- Écrire les relations entre les concentrations des espèces en solution.

c- En supposant que le milieu est assez acide, établir l'expression de la concentration en $H_3O^+$ (la résolution d'une équation de 2ème degré est nécessaire).

d- Déduire la valeur du pH de la solution $S_3$.

**Données** : A T = 25°C : pKe = 14

**II- On plonge un fil de platine dans une solution acide contenant des ions cobalt $Co^{2+}$ et $Co^{3+}$ telle que $[Co^{2+}] = [Co^{3+}] = 10^{-4}M$.**

1- Calculer la valeur du potentiel pris par le fil de platine.

2- On impose à ce fil un potentiel égal à 1,90 V et on attend que l'équilibre soit rétabli.

a- Prévoir qualitativement l'évolution des concentrations en solution.

b- Calculer les concentrations des ions $Co^{2+}$ et $Co^{3+}$ en solution.

3- A quelle valeur du potentiel faut-il porter le fil de platine pour que la concentration en ions $Co^{3+}$ soit égale à $10^{-6}M$ ?

**Données** : $\pi°(Co^{3+}/Co^{2+}) = 1{,}84$ V; à T = 298K: $\frac{RT}{F} Ln(x) = 0{,}06 \log_{10}(x)$ .../...

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

## Correction :

## Exercice I :

1- $S_1$ : Sol. acide fort
Approx. : Milieu assez acide $\Rightarrow [OH^-] \ll [H_3O^+]$
$\Rightarrow [H_3O^+] = C_1$ et $pH(S_1) = -\log C_1 = 3$
Approx. justifiée

2- $pH(S_2) = 3$
Sol. Acide faible $\Rightarrow$ Approx (1) $[OH^-] \ll [H_3O^+]$ ($pH = 3$)
Approx (2) $[A_2^-] \ll [A_2H]$
$\Rightarrow [H_3O^+] = (K_a \cdot C_2)^{1/2} \Rightarrow K_a = \frac{[H_3O^+]^2}{C_2} = 2.10^{-5}$
$\frac{K_a}{C_2} < 10^{-2} \Rightarrow$ Approx (2) justifiée $\rightarrow pK_a = 4,70$

3- $S_3$ : $V_1 = 50\,mL\,(S_1) + V_2 = 50\,mL\,(S_2) \Rightarrow C'_1 = 5.10^{-4}M$
$C'_2 = 2,5.10^{-2}M$

a- Réactions :
$A_1H + H_2O \rightarrow H_3O^+ + A_1^-$
$A_2H + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + A_2^-$ $= 3 \times 0,25$
$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

b- Relations :
$C'_1 = [A_1^-]$
$C'_2 = [A_2^-] + [A_2H]$
$[H_3O^+] = [A_1^-] + [A_2^-] + [OH^-]$
$K_a = \frac{[A_2^-].[H_3O^+]}{[A_2H]}$
$K_e = [H_3O^+].[OH^-]$

c- Milieu assez acide $\Rightarrow [OH^-] \ll [H_3O^+]$
On aboutit à : $[H_3O^+]^2 + (K_a - C'_1).[H_3O^+] - K_a(C'_1 + C'_2) = 0$
$\Rightarrow [H_3O^+] = \frac{(C'_1 - K_a) + \sqrt{(K_a - C'_1)^2 + 4K_a(C'_1 + C'_2)}}{2}$

d- $[H_3O^+] = 9,934.10^{-4}M$ ; $pH = 3,003 \approx 3$

II
1- $\pi = \pi^0_{Co^{3+}/Co^{2+}} + 0,06 \log \frac{[Co^{3+}]}{[Co^{2+}]} = 1,84\,V$

2- a- $\pi \nearrow \Rightarrow [Co^{3+}] \nearrow$ et $[Co^{2+}] \searrow$

b- $\begin{cases} \frac{[Co^{3+}]}{[Co^{2+}]} = 10^{\frac{\pi - \pi^0}{0,06}} = 10 \\ [Co^{3+}] + [Co^{2+}] = 2.10^{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} [Co^{3+}] = 1,82.10^{-4}M \\ [Co^{2+}] = 1,82.10^{-5}M \end{matrix}$

3- $[Co^{3+}] = 10^{-6}M \Rightarrow [Co^{2+}] = 2.10^{-4} - [Co^{3+}] = 1,99.10^{-4}M$
$\Rightarrow \pi = \pi^0 + 0,06 \log \frac{[Co^{3+}]}{[Co^{2+}]} = 1,702\,V$

# Contrôle rattrapage : 2008/2009

**Filières : SV –STU** **Semestre 2**

## Exercice I :

I- On désire comparer les forces de deux monoacides faibles $A_1H/A_1^-$ et $A_2H/A_2^-$.
Pour cela on dispose des solutions aqueuses suivantes :

* Solution $S_1$ : Acide cyanhydrique HCN ($A_1H$) ; $C_1$ $pH_1 = 5{,}65$
* Solution $S_2$ : Acide acétique $CH_3CO_2H$ ($A_2H$) ; $C_2$ $pH_2 = 4{,}75$
* Solution $S_3$ : Hydroxyde de sodium (NaOH) ; $C_3 = 2\ 10^{-2}$ M

On considère que $S_1$ et $S_2$ ne sont pas trop diluées et que $(K_{a_i} / C_i) << 10^{-2}$.

1- Ecrire les réactions mises en jeu dans les solutions considérées.

2- On dose un volume $V_1 = 20$ mL de la solution $S_1$ par la solution $S_3$ ; le volume versé à l'équivalence est $V_B = 10$ mL.

a- Ecrire la réaction globale du dosage (réaction bilan).

b- Calculer la concentration $C_1$ de l'acide $A_1H$ dans la solution $S_1$.

c- Déterminer le $pK_a$ du couple $A_1H/A_1^-$.

d- Calculer le pH du mélange à l'équivalence. Justifier les approximations faites.

3-a- Déterminer le $pK_a$ du couple $A_2H/A_2^-$ sachant que $C_2 = C_1$.

b- Classer les deux acides par ordre croissant d'acidité. Justifier.

II - On se propose d'utiliser le couple ($H_2PO_4^-$ / $HPO_4^{2-}$) pour stabiliser le pH d'un milieu biologique. Pour cela on dispose à 25 °C des solutions aqueuses suivantes:

- Solution $S_1$ : Hydrogénophosphate de sodium ($Na_2HPO_4$) ; $C_1 = 5{,}5\ 10^{-2}$ M
- Solution $S_2$ : Dihydrogénophosphate de sodium ($NaH_2PO_4$) ; $C_2 = C_1$

1- Ecrire les réactions mises en jeu dans les solutions considérées.

2- Calculer le pH de chaque solution. Justifier les approximations faites.

3- A un volume $V_1$ de la solution $S_1$ on ajoute un volume $V_2$ de la solution $S_2$. On obtient un mélange de volume V égal à 600 mL et de pH égal à 6,9.

a- Ecrire la réaction qui se produit lors du mélange et préciser son bilan molaire.

b- Donner l'expression du pH de ce mélange en fonction de $pK_a$, $C_1$, $C_2$, $V_1$ et $V_2$.

c- Déterminer la valeur de $V_1$ et celle de $V_2$.

d- On ajoute au mélange une quantité ($n_B = 10^{-3}$ mol) de base forte sans variation de volume. Calculer la variation de pH qui en résulte ($\Delta pH$).

e- Quelle est la caractéristique du mélange préparé ? Justifier votre réponse.

***Donnée*** : Constante d'acidité à 25°C : $pK_a$ ($H_2PO_4^-$ / $HPO_4^{2-}$) = 7,2

**III-** A un volume $V_1 = 0{,}6$ L d'une solution aqueuse de nitrate de baryum ($Ba(NO_3)_2$) de concentration $C_1$ ($C_1 = 10^{-2}$ M), on ajoute un volume $V_2 = 0{,}4$ L d'une solution de permanganate de potassium ($KMnO_4$) de concentration $C_2$.

**1-** Ecrire la réaction de dissociation de chacun des électrolytes.

**2- a-** Donner l'équilibre de précipitation du composé insoluble susceptible de se former dans le mélange.

**b-** Déterminer la concentration $C_2$ nécessaire pour avoir la saturation.

***Donnée*** : Produit de solubilité à 25°C : $K_s(Ba(MnO_4)_2) = 2{,}5\ 10^{-10}$

**IV-** On considère les couples redox suivants : $ClO^-/Cl^-$ et $AsO_4^{3-}/AsO_2^-$.

**1-** Ecrire la demi-réaction d'oxydoréduction en milieu basique pour chaque couple.

**2-** Donner l'expression du potentiel d'électrode de chaque couple et calculer sa valeur à pH = 8.

**3-** Lorsqu'on relie les deux électrodes, on constitue une pile.

**a-** Préciser la polarité de cette pile (anode et cathode).

**b-** Donner l'équation bilan de la réaction d'oxydoréduction.

**c-** Calculer la force électromotrice de la pile.

**4-** Déduire la valeur de la constante d'équilibre lorsque la pile est morte. Commenter la valeur trouvée.

***Données :***

- Potentiels standard par rapport à l'électrode normale à hydrogène :

  $\pi°(ClO^-/Cl^-) = 0{,}89$ V ; $\pi°(AsO_4^{3-}/AsO_2^-) = -0{,}67$ V

- Produit ionique de l'eau à 25°C : $K_e = 10^{-14}$
- Concentrations (mol.L$^{-1}$) : $[ClO^-] = [AsO_4^{3-}] = 0{,}2$ M et $[Cl^-] = [AsO_2^-] = 0{,}1$ M
- $\dfrac{RT}{F} Lnx = 0{,}06 \log x$

Faculté des Sciences Semlalia Marrakech

## Correction :

## Exercice I :

| | |
|---|---|
| I – 1- | $HCN + H_2O \rightleftarrows CN^- + H_3O^+$ ; $CH_3CO_2H + H_2O \rightleftarrows CH_3CO_2^- + H_3O^+$ <br> $NaOH + H_2O \longrightarrow Na^+ + OH^- + H_2O$ ; $2\,H_2O \rightleftarrows OH^- + H_3O^+$ |
| 2- | Dosage de $V_1 = 20$ mL de $S_1$ par $S_3$ ; à l'équivalence $V_B = 10$ mL. <br> a- Réaction bilan du dosage : <br> $HCN + NaOH \longrightarrow (Na^+CN^-) + H_2O$ ou bien $OH^- + H_3O^+ \longrightarrow 2\,H_2O$ |
| | b- A l'équivalence : $C_1V_1 = C_3V_B \Rightarrow C_1 = C_3 \dfrac{V_B}{V_1} = 10^{-2}$ M |
| | c- $S_1$ est une solution d'acide faible : $pH_1 = ½\,(pK_{a_1} - \log C_1) = 5,65$ <br> $pK_{a_1} = 2\,pH_1 + \log C_1 = 9,3$ |
| | d- A l'équivalence ; on a une solution saline de cyanure de potassium à caractère basique (base faible) de concentration $C_b$ <br> $C_b = C_1 \dfrac{V_1}{V_1 + V_B} = 0,67.10^{-2}$ M ; $pH_e = ½\,(pK_e + pK_{a_1} + \log C_b) = 10,56$ <br> $C_b \geq 10^{-6}$M ; $\dfrac{K_{b_1}}{C_b} = \dfrac{K_e}{K_{a_1}C_b} = 0,3.10^{-2} < 10^{-2}$ Approximations justifiées |
| 3- | a- $S_2$ : solution d'acide faible : $C_2 = C_1$ ; $pH_2 = ½\,(pK_{a_2} - \log C_2) = 4,75$ <br> $pK_{a_2} = 2\,pH_2 + \log C_2 = 7,5$ |
| | b- $pK_{a_2} < pK_{a_1}$ $\quad A_1H \quad A_2H \longrightarrow$ Force d'acidité croissante |
| II- 1- | $S_1$ : $Na_2HPO_4 \xrightarrow{(H_2O)} 2\,Na^+ + HPO_4^{2-}$ <br> $HPO_4^{2-} + H_2O \rightleftarrows H_2PO_4^- + OH^-$ <br> $S_2$ : $NaH_2PO_4 \xrightarrow{(H_2O)} Na^+ + H_2PO_4^-$ <br> $H_2PO_4^- + H_2O \rightleftarrows HPO_4^{2-} + H_3O^+$ <br> Eq.Ionique de l'eau : $2\,H_2O \rightleftarrows OH^- + H_3O^+$ |
| 2- | $S_1$ : solution saline à caractère basique (base faible) de concentration $C_1$. <br> $pH_1 = ½\,(pK_e + pK_a + \log C_1) = 9,97$ ; <br> $C_1 \geq 10^{-6}$M ; $\dfrac{K_b}{C_1} = 2,9.10^{-6} < 10^{-2}$ Approximations justifiées <br> $S_2$ : solution saline à caractère acide (acide faible) de concentration $C_2$. <br> $pH_2 = ½\,(pK_a - \log C_2) = 4,23$ <br> $C_2 \geq 10^{-6}$M ; $\dfrac{K_a}{C_2} = 1,15.10^{-6} < 10^{-2}$ Approximations justifiées |
| 3- | **$V_1$ de $S_1$ + $V_2$ de $S_2$ : Mélange de V = 600 mL et de pH = 6,9.** <br> a- $HPO_4^{2-} + H_2O \rightleftarrows H_2PO_4^- + OH^-$ ou $H_2PO_4^- + H_2O \rightleftarrows HPO_4^{2-} + H_3O$ <br> $t_0$ $n_b = C_1V_1$ $\quad n_a = C_2V_2 \quad n_a \quad n_b$ |

**b-** Solution de base faible ($HPO_4^{2-}$) et de son acide conjugué ($H_2PO_4^-$) :

$$pH = pK_a + \log\left(\frac{[HPO_4^{2-}]}{[H_2PO_4^-]}\right) = pK_a + \log\left(\frac{C_1V_1}{C_2V_2}\right)$$

**c-** $pH = 6{,}9 \Rightarrow \log\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = pH - pK_a \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 0{,}5$ ; D'autre part : $V_1 + V_2 = V = 600\ mL$ $\Big\}$ $V_1 = 200\ mL$ ; $V_2 = 400\ mL$

**d-**

| | $HPO_4^{2-}$ + $H_2O$ | $\rightleftarrows$ | $H_2PO_4^-$ + $OH^-$ |
|---|---|---|---|
| Au départ | $n_b = C_1V_1$ | | $n_a = C_2V_2 = 2\,n_b$ |
| Après ajout | $n_b + n_B$ | | $n_a - n_B$ |

Après ajout de la base forte : $pH' = pK_a + \log\left(\frac{n_b + n_B}{n_a - n_B}\right) = 6.96 \quad \Delta pH = 0{,}06$

**e-** $\Delta pH$ très faible (< 0,1 unité), le mélange présente donc un effet stabilisateur de pH et constitue un mélange tampon.

**III-** $Ba(NO_3)_2$ ($V_1 = 0{,}6\ L$ ; $C_1 = 10^{-2}\ M$) + $KMnO_4$ ($V_2 = 0{,}4\ L$ ; $C_2$ ?) ; $V = 1\ L$

**1-** $Ba(NO_3)_{2\,(s)} \xrightarrow{(H_2O)} Ba^{2+} + 2\,NO_3^-$ et $KMnO_{4\,(s)} \xrightarrow{(H_2O)} K^+ + MnO_4^-$

**2- a-** $Ba^{2+} + 2\,MnO_4^- \rightleftarrows Ba(MnO_4)_{2\,(s)}$

**b-** La solution est saturée si : $[Ba^{2+}][MnO_4^-]^2 = K_s$

$$[Ba^{2+}] = \frac{C_1V_1}{V_1+V_2} \quad \text{et} \quad [MnO_4^-] = \frac{C_2V_2}{V_1+V_2} \Rightarrow C_2 = \left(\sqrt{K_s\frac{V}{C_1V_1}}\right)\frac{V}{V_2} = 5{,}1\ 10^{-4}\ M$$

**IV-1-**

$$ClO^- + 2e^- + H_2O \rightleftarrows Cl^- + 2\,OH^-$$

$$AsO_4^{3-} + 2e^- + 2\,H_2O \rightleftarrows AsO_2^- + 4\,OH^-$$

**2-**

$$\pi_{ClO^-/Cl^-} = \pi^o_{ClO^-/Cl^-} + \frac{0{,}06}{2}\log\left(\frac{[ClO^-]}{[Cl^-][OH^-]^2}\right) = 1{,}259\ V$$

$$\pi_{AsO_4^{3-}/AsO_2^-} = \pi^o_{AsO_4^{3-}/AsO_2^-} + \frac{0{,}06}{2}\log\left(\frac{[AsO_4^{3-}]}{[AsO_2^-][OH^-]^4}\right) = 0{,}059\ V$$

**3- a-** $\pi_{ClO^-/Cl^-} > \pi_{AsO_4^{3-}/AsO_2^-}$ : $ClO^-/Cl^-$ est la cathode ; $AsO_4^{3-}/AsO_2^-$ est l'anode

**b-** $ClO^- + AsO_2^- + 2\,OH^- \rightleftarrows Cl^- + AsO_4^{3-} + H_2O$

**c-** Force électromotrice de la pile : $E = \pi_{ClO^-/Cl^-} - \pi_{AsO_4^{3-}/AsO_2^-} = 1{,}2\ V$

**4** Pile usée :

$$E = 0 = \underbrace{(\pi^o_{ClO^-/Cl^-} - \pi^o_{AsO_4^{3-}/AsO_2^-})}_{E^o} - \frac{0{,}06}{2}\log\underbrace{\left(\frac{[Cl^-][AsO_4^{3-}]}{[ClO^-][AsO_2^-][OH^-]^2}\right)}_{K_C}$$

$K_C = 10^{\frac{E^o}{0{,}03}} = 10^{52}$ : Valeur très élevée : réaction quasi-totale.

# Extrait de contrôle de chimie 2004

**Filières : SMP-SMA-SMC** **Semestre 2**

I/ Le cyanure d'argent AgCN est un sel très peu soluble.

1) Calculer la solubilité de AgCN dans l'eau pure en supposant que $Ag^+$ et $CN^-$ sont des ions indifférents.

2) En fait, l'ion $CN^-$ est une base faible. Etablir l'expression de la solubilité de AgCN en fonction de $[H_3O^+]$, $K_s$ et $K_a$.

3) En déduire la valeur de la solubilité de AgCN dans une solution tampon de pH = 3. Comparer les deux valeurs de la solubilité et conclure.

*Données* : à 25 °C $K_s(AgCN) = 1,6.10^{-14}$ ; $K_a(HCN/CN^-) = 7,24.10^{-10}$

III/ A partir du couple $Fe^{3+}/Fe^{2+}$, on réalise les deux demi-piles suivantes à 25 °C :

- Compartiment 1 : une électrode de platine plongeant dans une solution aqueuse contenant des ions $Fe^{3+}$ **($10^{-3}$ M)** et des ions $Fe^{2+}$ **($10^{-3}$ M)**.
- Compartiment 2 : une électrode de platine plongeant dans une solution aqueuse contenant des ions $Fe^{3+}$ **($10^{-3}$ M)**, des ions $Fe^{2+}$ **($10^{-3}$ M)** et des ions $F^-$ ($10^{-1}$ M).

L'ion $F^-$ forme avec l'ion $Fe^{3+}$ le complexe $FeF^{2+}$ tandis que l'ion $Fe^{2+}$ n'est pas complexé.

1) Ecrire les réactions ayant lieu dans chaque compartiment.

2) Donner l'expression des potentiels $\pi_1$ et $\pi_2$ relatifs aux compartiments 1 et 2. Sans faire de calcul, comparer ces potentiels.

3) On constitue une pile en associant les deux demi-piles décrites ci-dessus. Faire un schéma de cette pile en indiquant les polarités, le sens de déplacement des électrons et celui du courant électrique.

4) Sachant que la f.e.m. de la pile ainsi formée est égale à 0,31 V, calculer la concentration des ions $Fe^{3+}$ contenus dans le compartiment 2.

5) Calculer la constante de formation $K_f$ du complexe $FeF^{2+}$.

*Donnée* : $\frac{RT}{F}Ln(x) = 0,06\log_{10}(x)$ à 25 °C

**Faculté des Sciences Semlalia Marrakech**

## Correction :

I/ 1°) - la solubilité de AgCN :

$$AgCN_{(s)} \rightleftharpoons Ag^+_{aq} + CN^-_{aq}$$

$S = [Ag^+] = [CN^-]$ $\quad K_s = [Ag^+] \cdot [CN^-] = S^2$

$\Rightarrow S = \sqrt{K_s}$ $\quad$ AN : $S = \sqrt{1{,}6 \cdot 10^{-14}} = 1{,}265 \cdot 10^{-7}$ mol/l.

2°) - $CN^- + H_2O \rightleftharpoons HCN + OH^-$ $\quad K_a = \dfrac{[CN^-][H_3O^+]}{[HCN]}$

On a $S = [Ag^+] = [CN^-] + [HCN]$

$$= [CN^-]\left(1 + \frac{[HCN]}{[CN^-]}\right) = [CN^-]\left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_a}\right)$$

$$= \frac{K_s}{S}\left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_a}\right)$$

$$\Rightarrow S = \left(K_s\left(1 + \frac{[H_3O^+]}{K_a}\right)\right)^{1/2}$$

3°) - $pH = 3 \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-3}$ M

$S = 1{,}487 \cdot 10^{-4}$ M

si pH ↘ ⇒ S ↗ Alors : la solubilité de AgCN augmente lorsque le pH diminue.

III/ 1°)- les reactions ayant lieu dans chaque compartiment.

Comp 1 : $Fe^{3+} + 1e^- \rightleftharpoons Fe^{2+}$

Comp 2 : $Fe^{3+} + 1e^- \rightleftharpoons Fe^{2+}$

$Fe^{3+} + F^- \rightleftharpoons FeF^{2+}$

2°)- les potentiels $\pi_1$ et $\pi_2$ relatifs aux compartiments 1 et 2

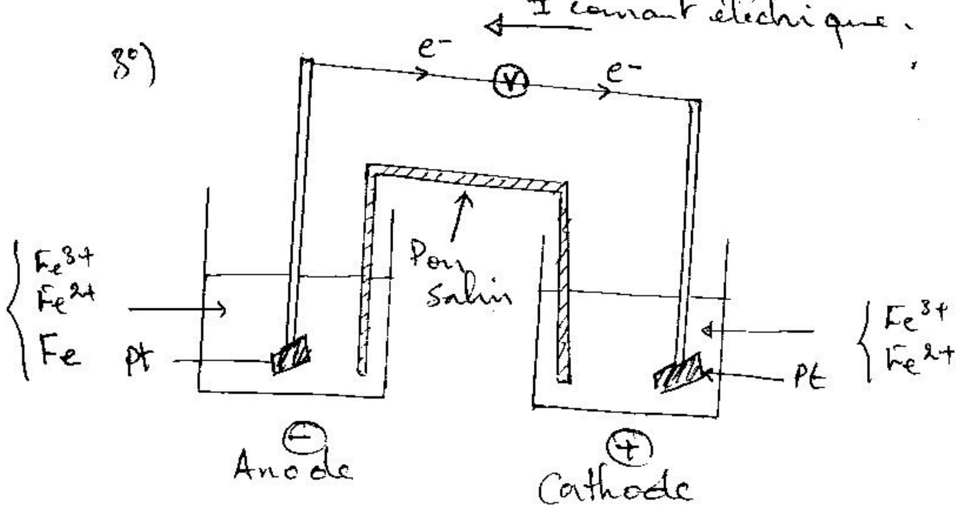
comp 1 : $\pi_1 = \pi_{Fe^{3+}|Fe^{2+}} = \pi^0_{F^{3+}|Fe^{2+}} + 0{,}06 \log_{10} \frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]}$

comp 2 : $\pi_2 = \pi_{F^{3+}|F^{2+}} = \pi^0_{F^{3+}|F^{2+}} + 0{,}06 \log_{10} \frac{[Fe^{3+}]}{[F^{2+}]}$

On a $[Fe^{3+}]_2 < [Fe^{3+}]_1$

$\Rightarrow \pi_2 < \pi_1$

3°)




4°)- On a $E = \pi_{ca} - \pi_{an} = \pi_1 - \pi_2$

$= 0{,}06 \log \frac{[Fe^{3+}]_1}{[Fe^{2+}]_1} - 0{,}06 \log_{10} \frac{[Fe^{3+}]_2}{[Fe^{2+}]_1}$

d'où $[Fe^{3+}]_2 = [Fe^{2+}] \cdot 10^{-\frac{E}{0,06}}$

AN : $[Fe^{3+}]_2 = 6,813.10^{-9}$ M.

5°)- La constante de formation $K_f$ du complexe $FeF^{2+}$.

$$Fe^{3+} + F^- \rightleftharpoons FeF^{2+}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| t=0 | $C$ | $+ C$ | $0$ |
| teq | $C-x$ | $C-x$ | $x$ |

$[FeF^{2+}] = 9,999.10^{-4}$ M , $[F^-] = 9,9.10^{-3}$ M.

On a $K_f = \dfrac{[FeF^{2+}]}{[Fe^{3+}][F^-]}$

AN : $K_f = 1,483.10^{6}$

بالتفويق لكل الطلبة

اى ملاحظات اضافات لا ترددوا بالاتصال بنا

rapideway@gmail.com