Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 1

I/ Deux charges ponctuelles placées comme l'indique la figure 1. Etudier, en fonction de x, les variations de l'intensité de la force électrostatique $\vec{F}_{01}$ qui s'exerce sur q_1.
Etudier les variations de la composante de cette même force sur l'axe des X. Conclure.

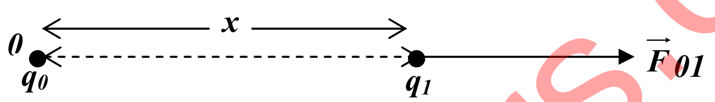


Figure 1

II/ Un système moléculaire est équivalent à quatre charges de valeur q et une cinquième charge de valeur Q placées comme le montre le schéma de la figure 2. Déterminer la valeur de Q pour que tout le système soit stable.

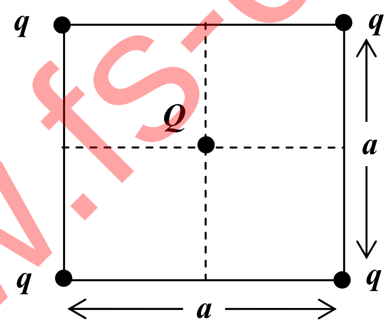


Figure 2

III/ Deux charges ponctuelles de même valeur $+q$ sont placées respectivement en $A(-a,0)$ et $B(a,0)$. Calculer le champ électrostatique au point $M(0,y)$. Tracer les variations du champ en fonction de y (y>0). En déduire au point M l'expression de la force électrostatique.

IV/ Un segment de droite AB, de longueur $2a$, porte une distribution continue de charges dont la densité linéique λ supposée positive est uniforme. On prend cette droite comme axe des X; l'origine O étant au milieu de AB. Soit OY l'axe perpendiculaire à OX.

1- En considérant deux éléments de charge centrés en deux points P_1 et P_2, symétriques par rapport à l'origine O, montrer que le champ électrostatique sur l'axe OY est porté par ce dernier.

2- Calculer la valeur de ce champ.

3- Examiner ce que devient l'expression obtenue quand la distance AB augmente indéfiniment.

V- Un disque plan circulaire de rayon R porte une distribution de charges superficielle uniforme de densité σ. Un point M de l'axe de révolution du disque est repéré par sa distance z au centre O.
1- Calculer $E(M)$
2- En déduire le champ crée par un plan infini.

VI- Une charge q est placée au centre d'une sphère de rayon r. Soit $\vec{E}$ le champ électrostatique crée par cette charge. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère.
La charge q est maintenant placée au centre d'un cylindre de rayon R et de hauteur $2L$. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers le cylindre.
La charge q est maintenant placée entre deux plan P_1 et P_2 parallèles et indéfinis. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers ces deux plans.
Quelle conclusion fondamentale peut-on tirer de cette étude ?

VII- On considère la surface fermée d'un cube d'arête a placé dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique $\vec{E} = x^2\vec{i}$
1- Calculer le flux du champ électrostatique à travers la surface total du cube.
2- En déduire la charge intérieure du cube.
3- Retrouver la charge totale dans le cube en calculant, en tout point de l'espace, la densité volumique de charges ρ.

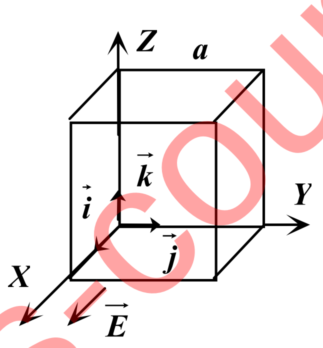


Figure 3

VIII- Soit une sphère, de centre O et de rayon R portant une charge répartie en volume avec une densité ρ non constante.
Calculer le champ électrostatique en un point M à la direction r' de O ($r' > R$) dans les deux cas suivants :
1- $\rho = a\,r \quad où \quad 0 < r < R$
2- $\rho = b / r$

IX- On considère deux distributions de charges dont le champ électrostatique est donnés par :

$$\vec{E}_1 = 2axy\,\vec{i} + a\left(x^2 - y^2\right)\vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = -2ax\,\vec{i} - 2ay\,\vec{j} - 2bz\,\vec{k}$$

Déterminer dans chacun des cas la densité volumique de charges ρ.

Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 1
Solution

I/

$$\vec{F}_{01} = k\frac{q_0 q_1}{x^2}\vec{u}$$

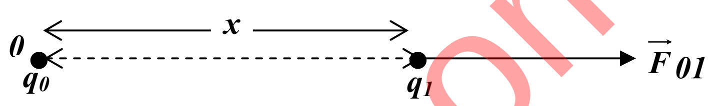
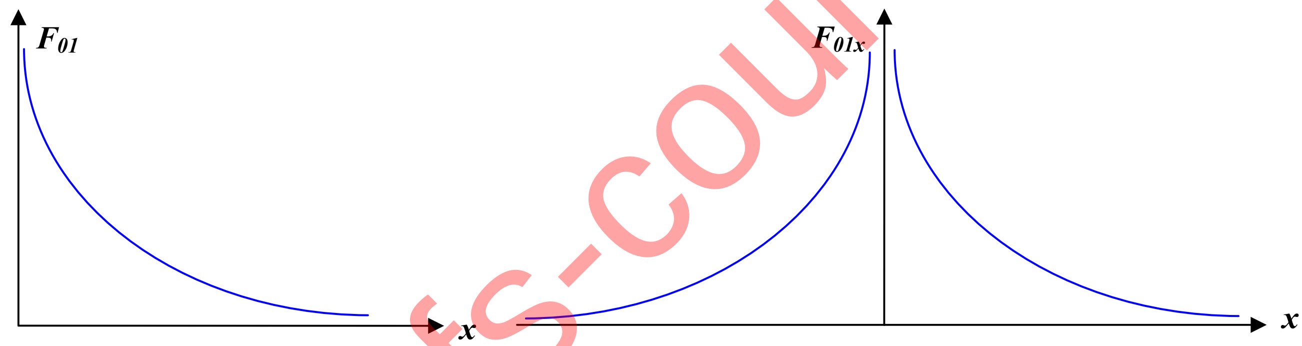


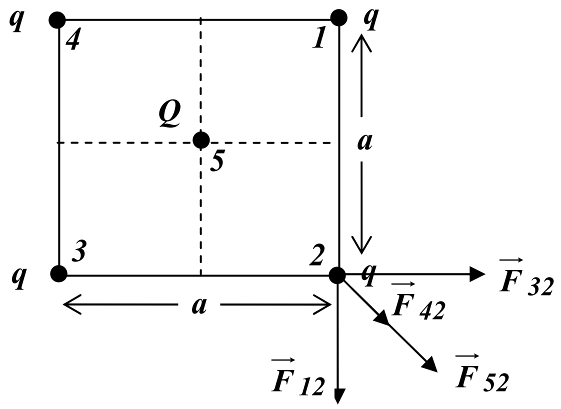
Figure 1

Avec $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ SI$, l'intensité ou module est $F_{01} = k\left|\dfrac{q_0 q_1}{x^2}\right|$



La variation de F_{01} par rapport à x serait :
La composante unique F_{01x} sur OX peut prendre des valeurs positives ou négatives, la variation serait :
Plus x est faible, (q_1 s'approche de q_0) plus F_{01} est grande. Quand les deux charges entrent en contacte, la force devient infinie pour reprendre des valeurs finies de l'autre coté de x = 0. <u>La force coulombienne est discontinue à la traversée d'une zone (ici un point ponctuel et en général une surface sans épaisseur) chargée</u>.

II/ On numérote les sites des charges. On applique la somme des forces = 0 sur toutes les charges. Le choix de $\vec{F}_{52}$ est au hasard. De toute façon la résultante doit s'annuler. Comme il y a deux types de charges q et Q et vu la symétrie du problème, on n'étudiera par exemple que les sites 2 et 5.



La somme des forces = 0 appliquée sur Q ne donnera que 0 = 0. Il reste le site 2 :

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{52} = \vec{0}$$

$$k\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_1 + k\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_3 + k\frac{q^2}{2a^2}\vec{u}_4 + k\frac{2qQ}{a^2}\vec{u}_5 = \vec{0}$$

$$k\frac{q}{a^2}\left(q\vec{u}_1 + q\vec{u}_3 + \frac{1}{2}q\vec{u}_4 + 2Q\vec{u}_5\right) = \vec{0}$$

On projette su r OX :

$$k\frac{q}{a^2}\left(q + \frac{1}{2}q\cos\frac{\pi}{4} + 2Q\cos\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$k\frac{q}{a^2}\left(q + \frac{1}{2}q\frac{\sqrt{2}}{2} + 2Q\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$Soit : Q\sqrt{2} = -q\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$Q = -q\frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -0{,}6q$$

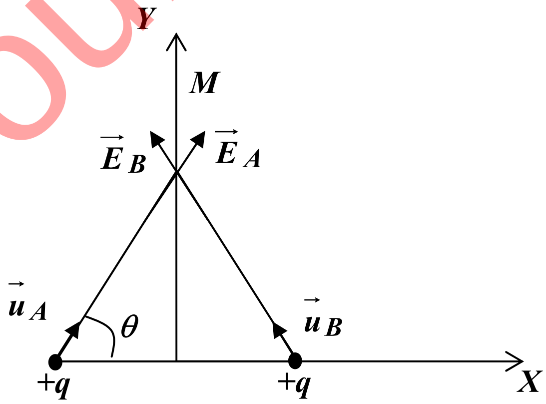
Noter que la projection sur OY donnerait la même équation.

$$\text{III/ } \vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\vec{u}_A + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\vec{u}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\left(\vec{u}_A + \vec{u}_B\right)$$

La somme vectorielle des vecteurs unitaires est un vecteur appartenant à l'axe OY, donc le champ total est porté par OY.

Projection sur OY :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}2\sin\theta .$$



Soit : $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2y}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}$

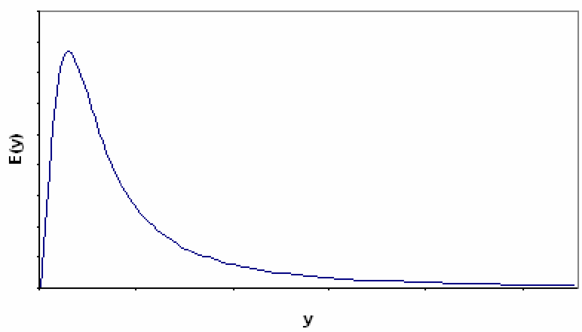
et donc $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2y}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$

$$E' = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\left(a^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^2-2y^2\right)}{\left(a^2+y^2\right)^3},$$

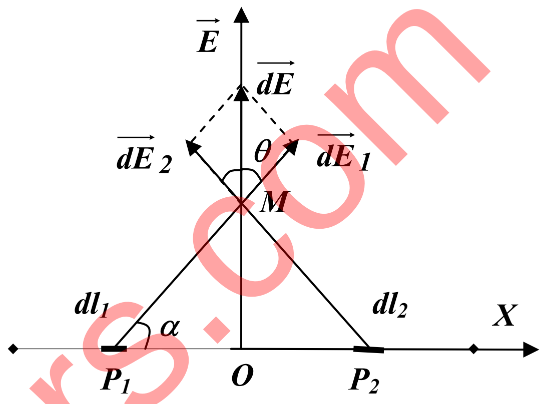
La dérivée de E a le signe de $\left(a^2-2y^2\right)$, le reste de l'expression est toujours positif. Donc $E' \geq 0$ si y est comprise entre $-\dfrac{a}{\sqrt{2}} \leq y \leq \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ et il est négatif à l'extérieur de ces racines. Comme le problème est limité aux $y \geq 0$ nous avons :

y	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$E'(y)$	+ + +	- - -	
$E(y)$	0 $\nearrow$	$E = \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}$ $\searrow$	0

Le champ passe par un extremum, s'annule à l'infini et au centre entre les charge. Le champ ici reste continu. Bien entendu au point M il n'y a pas de charge donc il n'y a pas de force électrique.



IV/ 1- dl_1 crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE_1}$ faisant θ avec la verticale, dl_2 symétrique à dl_1 par rapport à OY crée au point M le champ $\overrightarrow{dE_2}$ symétrique aussi à $\overrightarrow{dE_1}$. Le champ résultant $\overrightarrow{dE}$ est donc porté par OY. En considérant, de cette façon, deux à deux tous les éléments symétriques, nous obtenons un champ $\vec{E}$ total porté par OY.



2- Le champ élémentaire résultant est :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE_1} + \overrightarrow{dE_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right)$$

Où $dl = dl_1 = dl_2$

Projection sur OY : $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\, 2\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\, 2\cos\theta$

Avec $\cos\theta = \frac{y}{r}$, $tg\theta = \frac{l}{y}$ et donc $\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dl}{y}$, nous aurons :

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y\,d\theta}{\cos^2\theta}\frac{\cos^2\theta}{y^2}\, 2\cos\theta$$

Soit après simplification $dE = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\cos\theta\; d\theta$.

Le champ total sera après intégration :

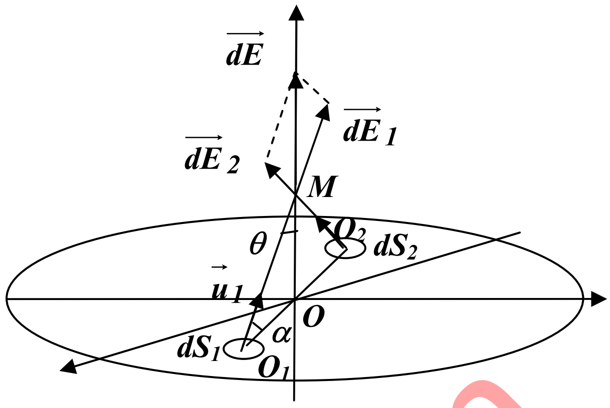
$$E = \int_0^{\theta_1}\frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\cos\theta\; d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\sin\theta_1 \text{ . Avec } \sin\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

L'intégrale porte sur la moitié de la longueur chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.

D'où
$$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{y\sqrt{y^2 + a^2}}$$

3- Si a devient infinie, alors $E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{y}$. C'est le champ, au point M, crée par un fil infini portant une distribution linéique de charge.

V- 1- dS_1 contient dq_1 et crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq_1}{O_1M^2}\vec{u}_1$ faisant l'angle θ avec OZ.



dS_2 symétrique à dS_1 contient $dq_2 = dq_1$ et crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq_2}{O_2M^2}\vec{u}_2$ faisant le même angle θ avec OZ. Si l'on note $dq = dq_1 = dq_2$ et sachant que $O_1M = O_2M$, alors le champ résultant sera forcement porté par OZ :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE}_1 + \overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right) \text{ où } \rho = O_1O = O_2O.$$

<u>Projection sur OZ</u> :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}2\sin\alpha \quad \text{ou} \quad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}2\cos\theta.$$

Avec $dq = \sigma\, dS$, $\cos\theta = \dfrac{z}{O_1M}$, $tg\theta = \dfrac{\rho}{z}$ et donc $\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{d\rho}{z}$, nous aurons :

$dE = \dfrac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dS}{\dfrac{z^2}{\cos^2\theta}}2\cos\theta$. En coordonnées cylindrique $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$. Le champ total sera :

$$dE = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\rho\, d\varphi}{z^2}\cos^3\theta = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,tg\theta\dfrac{z\,d\theta}{\cos^2\theta}d\varphi}{z^2}\cos^3\theta = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Si l'on intègre :

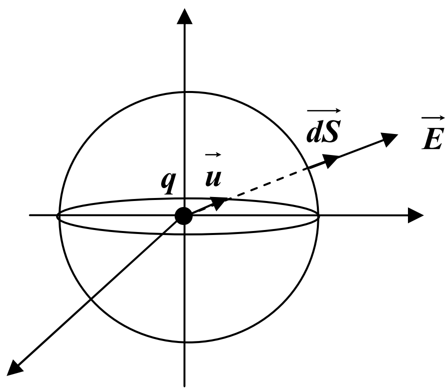
$E = \displaystyle\int_0^{\theta_0}\frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\cos\theta_0\right)2\pi$. Avec $\cos\theta_0 = \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

L'intégrale porte sur la moitié de la surface chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.

D'où $$E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

2- $Z \Rightarrow +\infty$, $E(z) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ est le champ crée par un plan chargé en surface.

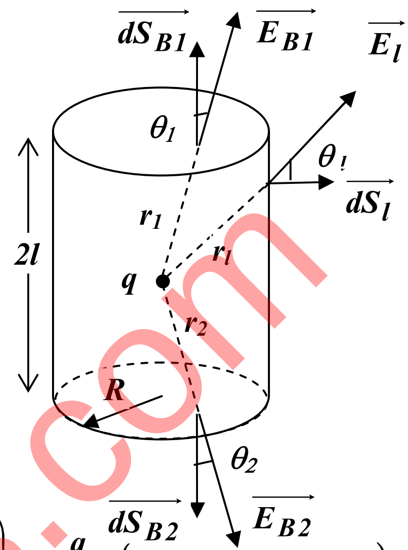
VI- 1/ $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^2}\vec{u}$ est le champ électrostatique crée par q en tout point M de la surface de la sphère. Par définition le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère est $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS}$. Or $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont parallèles. Le flux devient : $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S E\,dS$.



Comme E ne dépend que de R et que tous les points de S sont à la même distance R de O, le module du champ est uniforme :

$$\Phi(\vec{E}/S) = E\iint_S dS = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2- Le cylindre est composé d'une surface latérale S_L et de deux surfaces de bases S_{B1} et S_{B2}.



Le flux de $\vec{E}$ à travers le cylindre est

$$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S \vec{E}\vec{dS} = \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS}.$$

$$= \iint_{Sl} E_L dS_L \cos\theta_L + \iint_{SB1} E_{B1} dS_{SB1}\cos\theta_1 + \iint_{SB2} E_{B2} dS_{B2}\cos\theta_2$$

Avec $E_L = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_L{}^2}$, $E_{B1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_1{}^2}$ et $E_{B2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r_2{}^2}$.

Si Ω_L, Ω_1 et Ω_2 sont les angles solides sous lesquels on observe du point O respectivement les surface S_L, S_{B1} et S_{B2} alors l'expression du flux devient :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\iint_{SL}\frac{dS_L\cos\theta_L}{r_L{}^2} + \iint_{SB1}\frac{dS_{B1}\cos\theta_1}{r_1{}^2} + \iint_{Sl}\frac{dS_{B2}\cos\theta_2}{r_2{}^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\Omega_L + \Omega_{B1} + \Omega_{B2})$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

Où $\Omega = 4\pi$ est l'angle solide sous lequel on observe tout l'espace.

On retrouve $\Phi(\vec{E}/S) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

De même pour deux plans on retrouve le même rapport q/ε_0 car l'angle solide sous lequel on voit un plan est 2π Srd et donc l'angle solide sous lequel on voit deux plans est 4π Srd (espace).

Remarque : - les surfaces étudiées sont toutes fermées. Deux plans parallèles et espacés sont considérés comme une surface fermée.

Conclusion : Le flux du champ électrique crée par une charge à travers une surface fermée contenant la charge est toujours égal au rapport q/ε_0 : théorème de Gauss.

VII- 1- $\vec{E} = x^2\vec{i}$ possède une seule composante. Le champ sera donc perpendiculaire à tous les vecteurs de surface (flux nul) sauf ceux des faces parallèle au plan OZ. Le flus total est alors :

$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_{S1} x^2\vec{i}\,\overrightarrow{dS}_1 + \iint_{S2} x^2\vec{i}\,\overrightarrow{dS}_2$ Or sur le plan appartement à OYZ $x = 0$ et sur le plan parallèle $x = a$ d'où :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S a^2 dS + 0 = a^2a^2 = a^4$$

2- La surface étant fermée, $\Phi(\vec{E}/S) = a^4 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, soit $q = a^4\varepsilon_0$

3- On utilise l'équation de Poisson : $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Ce qui nous emmène à : $\dfrac{dx^2}{dx} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\rho = 2\varepsilon_0 x$. La densité n'est pas uniforme mais varie linéairement avec x. C'est-à-dire que l'on a des plans "équicharges" tous parallèles à OYZ. Sur le plan OYZ ($x = 0$) il y a absence de charges. Plus on s'éloigne plus la quantité de charges augmente. La charge contenue dans le cube est la somme de toutes ces charges. Soit dans le cube un volume élémentaire dV contenant la charge dq. On peut écrire : $dq = \rho dV$. La charge du cube serait :

$$q = \int_{\substack{volume\\du\,cube}} \rho\, dV = \iiint_{\substack{volume\\du\,cube}} 2\varepsilon_0 x dx dy dz = 2\varepsilon_0 \int_0^a x dx \int_0^a dy \int_0^a dz$$

Et on retrouve $q = a^4 \varepsilon_0$

VIII- Théorème de Gauss : $\iint_S \vec{E}\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho\, dv$ où S est la sphère de Gauss de centre O et de rayon r'. v est le volume chargé.

1- $E 4\pi r'^2 = \frac{a}{\varepsilon_0}\iiint_v r\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{a}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$E = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^4}{4} 2\, 2\pi \frac{1}{r'^2} = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$$

2- $E 4\pi r'^2 = \frac{b}{\varepsilon_0}\iiint_v \frac{1}{r} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{b}{\varepsilon_0}\int_0^R r\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$E = \frac{b}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^3}{3} 2\, 2\pi \frac{1}{r'^2} = \frac{bR^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$$

IX- On utilise l'équation de Poisson : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$div\vec{E}_1 = 2ay - 2a \Rightarrow \rho = 2\varepsilon_0 a(y-1)$. ρ est une fonction de y

$div\vec{E}_2 = -2a - 2a - 2b = -4a - 2b \Rightarrow \rho = -2\varepsilon_0(2a+b)$. ρ est uniforme

Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 2

I- Un anneau fin de rayon R porte une densité linéique de charges λ qui varie avec l'angle des coordonnées polaires θ selon la loi $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$. λ_0 une constante positive.

Calculer le potentiel et le champ au centre de l'anneau.

II- 1- Calculer le champ et le potentiel crées, en tout point M de l'espace, par une distribution volumique de charges, de densité uniforme ρ, contenue entre deux sphères concentriques de rayon R_1 *et* R_2 ($R_1 < R2$).

2- Tracer les courbes $E(r)$ et $V(r)$ avec $r = OM$. E et V sont-ils continues ?

3- Retrouver les valeurs de E et V si R_1 tend vers R_2. E et V reste-ils continues ?

III- Un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p} = qa\vec{i}$ est constitué de deux charges ponctuelle $-q$ et $+q$ placées dans le vide aux points A et B de l'axe OX de part et d'autre de O. La distance $AB = a$. Un point M éloigné des charges est repéré par ses coordonnées polaires r et θ.

1- Calculer $V(M)$.

2- En déduire le module et l'orientation du champ électrostatique au point M.

Le dipôle est maintenant placé dans un champ extérieur uniforme E_0 orienté suivant l'axe OX. Le potentiel de ce champ est nul à l'origine O

3- Donner l'expression du potentiel électrostatique au point M.

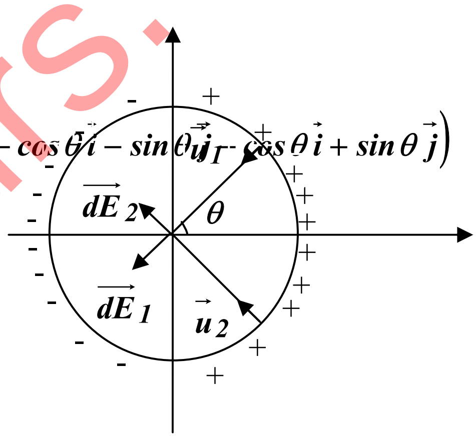
4- Quelles sont les surfaces équipotentielles $V = 0$

Année Universitaire 2013-2014

Université Ibn Tofaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 2 - Solution

I- Remarquons d'abord que les charges sont concentrées autour de $\theta = 0$ *et* $\theta = \pi$ et qu'il y a absence de charge à $\theta = \pm\,\pi/2$. On peut chercher le champ et le potentiel en un point quelconque de l'axe ***OZ*** et les appliquer au centre. En plus le cosinus est positif quand $0 < \theta < \pi/2$ et il est négatif quand $\pi/2 < \theta < \pi$



$$\vec{dE} = \vec{dE}_1 + \vec{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\vec{u}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\vec{u}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\left(-\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} - \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{R^2}\left(-2\cos\theta\,\vec{i}\right) = \frac{-2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{R^2}\cos\theta\,\vec{i}$$

=> $\vec{E}$ est porté par ***OX*** et il est opposé à $\vec{i}$

$dl = Rd\theta$, la seule variable dans cette expression est θ.

$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta\,\vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\,\vec{i} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left[\frac{2\theta + \sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{-2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\frac{\pi}{2}\vec{i} \qquad \text{Soit} \qquad \vec{E} = \frac{-\lambda_0}{4\varepsilon_0}\frac{1}{R}\vec{i}$$

En M le potentiel crée par une charge élémentaire $dq = \lambda\, dl$ est :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_0\cos\theta\,R\,d\theta}{R^2} \qquad \text{soit} \qquad V = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$$

En ***O***, le potentiel des charges plus compense celui des charges négatives de sorte que le potentiel total soit nul.

N.B : *expliquez aux étudiants que l'on ne peut pas utiliser ici la relation* $\vec{E} = -\vec{grad}V$

II- 1- En un point ***M*** de l'espace le champ est radial et il est constant sur tous les points ayant la même distance ***r*** de ***O***. $\iint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho\,dv$ ***S*** étant la surface de Gauss et ***v*** le volume chargé inclus dans ***S***.

► Si $r > R_2$, $E4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\left(R^3{}_2 - R^3{}_1\right)$ soit $E = \frac{\rho\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Longleftrightarrow V = -\int Edr = \frac{\rho\left(R_2{}^3 - R_1{}^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$, la constante d'intégration est nulle car $V(\infty) = 0$

► Si $R_2 > r > R_1$, $E4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R^3{}_1\right)$ soit $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - R^3{}_1\right)}{r^2}$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Longleftrightarrow V = -\int Edr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1{}^3}{r}\right) + C_1$

► Si $r < R_1$, absence de charge dans la surface fermée, $E = 0$. $V = C_2$.

Détermination de C_1 et C_2

Quand M est à la distance R_1 de O : $\lim_{r \to R_1^+} V(r) = \lim_{r \to R_1^-} V(r)$. Soit $C_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1}\right) + C_1$

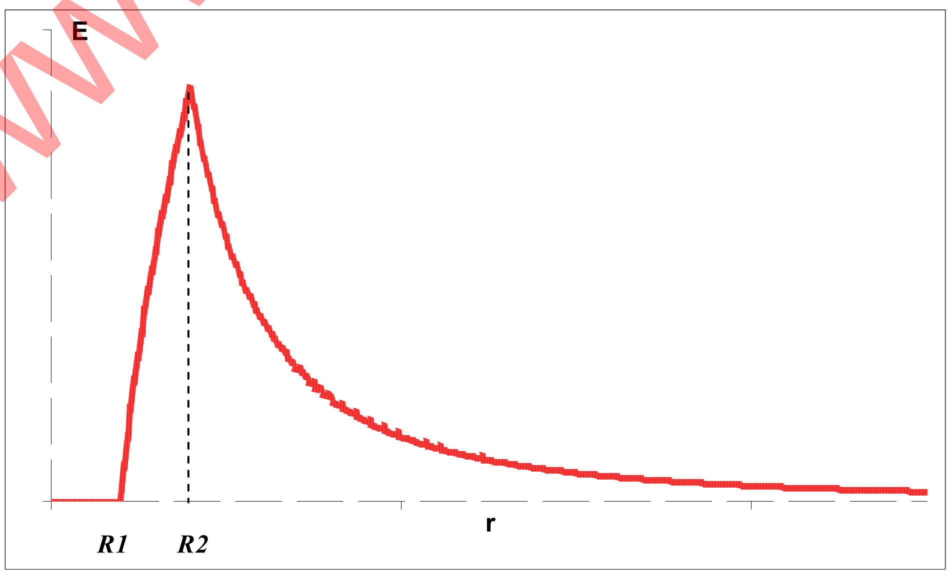
A la distance R_2 de O : $\lim_{r \to R_2^+} V(r) = \lim_{r \to R_2^-} V(r)$. Soit $-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2}\right) + C_1 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R_2}$

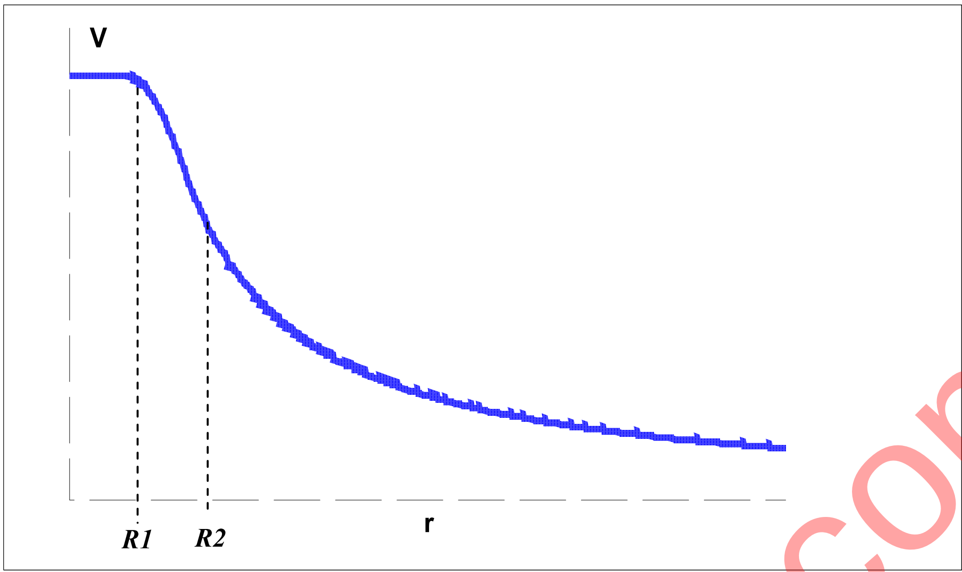
$\Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R_2^2$ et donc $C_2 = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2{}^2 - R_1{}^2\right)$

On regroupe les résultats dans le tableau :

$r > R_2$	$E = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$	$V = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}$
$R_2 > r > R_1$	$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{\left(r^3 - R_1^3\right)}{r^2}$	$V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3R_2^2}{2} - \frac{r^3 + 2R_1^3}{2r}\right)$
$r < R_1$	$E = 0$	$V = \frac{3}{2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$

2-





Le champ et le potentiel sont des fonctions continues à la traversée d'un volume chargé.

3- Si R_1 tend vers R_2, on obtient une seule sphère chargée en surface de distribution : $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$

Deux cas uniquement sont possibles $r < R$ et $r > R$. On peut rappliquer le théorème de Gauss ou directement remplacer ρ par son expression en fonction de la charge.

$r > R$	$E = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$	$V = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$
$r < R$	$E = 0$	$V = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

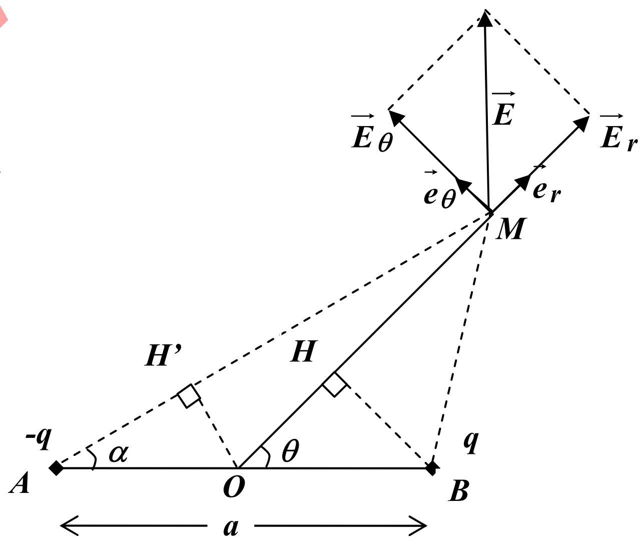
III/ 1-

$r = OM = OH + HM$

$r_1 = AM = AH' + H'M$

$r_2 = BM$

$r >> a \Rightarrow \theta \approx \alpha$



$$V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1-r_2}{r_1 r_2}$$

$r_1 = AH'+H'M \approx \frac{a}{2}\cos\alpha + r$ et $r = OH + HM \approx \frac{a}{2}\cos\theta + r_2$

On en déduit : $r_1 - r_2 \approx a\cos\theta$ et $r_1 r_2 = r^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2\theta \approx r^2$

Soit : $V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$

2- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^3}$ et $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\sin\theta}{r^3}$

$$E=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\sqrt{4a^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta+1}$$

L'orientation du champ peu être définie par l'angle φ que fait $\boldsymbol{E}$ avec $\boldsymbol{OM}$: $tg\varphi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}tg\theta$

3- Le nouveau potentiel est la somme du potentiel du dipôle et du potentiel extérieur issu de E_0.
$V'(M) = V(M) + V_0$.
$\vec{E}_0 = E_0\vec{i}$ et la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ donnent : $V_0 = -\int E_0 dx = -E_0 x + Cte$
A l'origine $V_0(O) = 0 \Rightarrow Cte = 0$, d'où $V_0 = -E_0 x$. avec $x = r\cos\theta$.

$$V_{Total}(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}-E_0 r\cos\theta$$

4- $V_{Total} = 0 \Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2}-E_0 r\right)\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2}-E_0 r\right)=0$ et dans ce cas $r=\sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{E_0}}$, ce qui définit une sphère de rayon $\boldsymbol{r}$ et de centre $\boldsymbol{O}$ comme surface équipotentielle.

Ou $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$, ce qui définit le plan médiateur $\boldsymbol{OY}$ comme surface équipotentielle.

Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 3

EXE 1

Soit deux sphères conductrices S et S', de rayon R et R', reliées par un fil conducteur. On porte l'ensemble à un potentiel V.

1) Exprimer le rapport Q/Q' de charges portées par chacune des sphères. En déduire le rapport σ/σ'.

2) En déduire des conséquences pratiques sur un corps chargé et relié au sol et sur les pouvoirs des pointes.

N.B. : *On suppose que le fil est assez long de façon que le potentiel de chaque sphère ne peut être du qu'à l'influence de ses propres charges.*

EXE 2

Une sphère conductrice S, de rayon R, et de centre O, est placée dans le vide de permittivité relative égale à 1.

L'origine des potentiels est prise à l'infini.

1) La sphère S porte une charge Q_0. Quelle est son potentiel V et sa capacité C.

2) On approche de S une deuxième sphère, conductrice et chargée, de centre O' et de rayon R'. La distance $OO' = d$ $(d = 2R = 4R')$. S est maintenue au potentiel V et celui de S' est V'.

a- Calculer, en fonction de R, V et V', les expressions de la charge Q de S et de la charge Q' de S'.

b- En déduire les expressions des coefficients, C_{11}, C_{12}, C_{21} et C_{22}. Expliquer la signification de chacun de ces coefficients.

EXE 3

On considère un ensemble de charges $+q$, $+q$, $-q$, $-q$ placées respectivement aux sommets A, B, C et D d'un carré de coté a :

Calculer l'énergie électrostatique du système.

EXE 4

Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2 et de hauteur h.

EXE 5

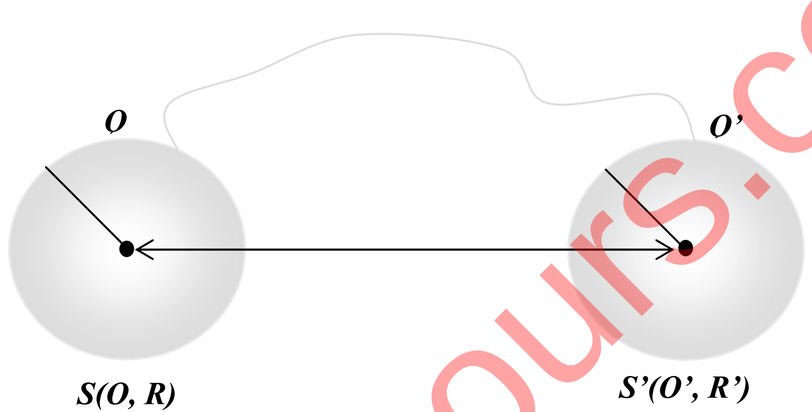
On charge un condensateur C sous une différence de potentiel V_0. C étant isolé on le relie à un autre condensateur C' initialement neutre. Calculer les charges portées par chaque condensateur ainsi que leurs d.d.p.

Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 3 - Solution

EXE1



1- Le potentiel de chaque conducteur n'est du qu'à l'influence de ses propres charges, d'où : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$ et $V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'}$

Or $V = V'$ car les deux conducteurs sont reliés par un fil. Nous avons donc : $\frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}$

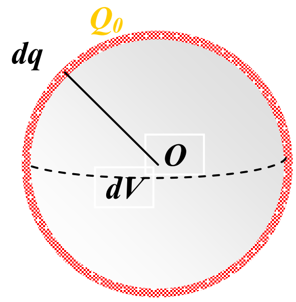
On en déduit : $\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{R'}{R}$

2- L'égalité en fonction des charges montre que si ***R'>>R*** alors ***Q'>>Q***. Ce cas on le rencontre qu'on on relie un conducteur à la terre. Son rayon est tellement petit devant celui de la terre que les charges qu'il peut contenir seront très faibles. Tout conducteur relié au sol verra ses charges disparaître.

- L'égalité en fonction des densités montre que si ***R'>>R*** alors $\sigma >> \sigma'$. Les charges se regroupent préférentiellement sur les surfaces à faible rayon de courbure. C'est l'effet des pointes. Ce phénomène est utilisé pour éliminer les charges des conducteurs que l'on ne peut pas reliés au sol tels que les avions par exemple. Les ailes contiennent des pointes ayant un petit rayon des courbures. Les charges s'accumulent à ces endroits et attirent un grand nombre d'ions (provenant de l'air) de signes opposés et se trouvent ainsi neutralisées.

EXE2

1- La charge initiale sur ***S*** est Q_0. ***S*** est conducteur, la charge est donc répartie sur sa surface externe. En plus toute la sphère est équipotentielle. En particulier en ***O*** le potentielle crée par une



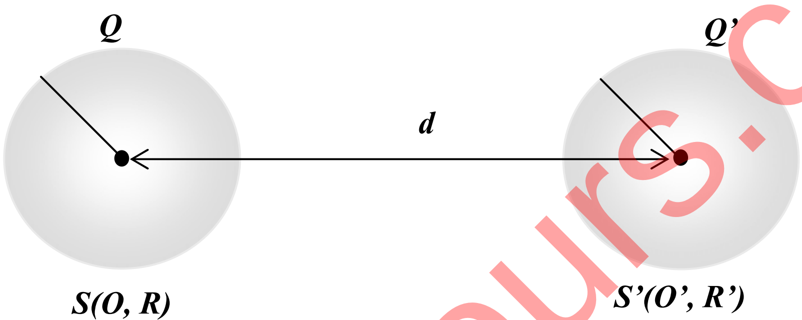
charge $dq = \sigma\, dS$ est : $dV = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma\, dS}{R}$. Le potentiel en O crée par la charge de S est obtenu en intégrant dV. Soit : $V = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$

Il suffit de remplacer σ par Q_0S pour obtenir V en fonction de la charge :

$$V = \frac{Q_O}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Ainsi la sphère se comporte comme si sa charge est concentrée à son centre.

2-



a- Calculons les potentiels de chaque conducteur :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{d}$$

$$V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q'}{R'}$$

On déduit de ce système les expressions de Q et Q' :

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{d\,R}{d^2 - R'R}(Vd - V'R')$$

$$Q' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{d\,R'}{d^2 - R'R}(V'd - VR)$$

On remplace R' par $R/2$ et d par $2R$:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{2R}{7}(4V - V')$$

$$Q' = 4\pi\varepsilon_0 \frac{2R}{7}(2V' - V)$$

b- Les équations d'influence s'écrivent sous la forme :

$$Q = C_{11}V + C_{12}V'$$

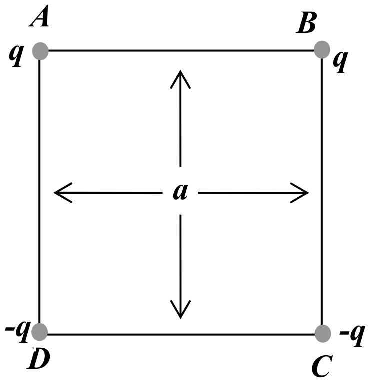
$$Q' = C_{21}V + C_{22}V'$$

En comparant ce système avec le système précédent on en déduit :

$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0\frac{8R}{7},\ C_{12} = C_{21} = -4\pi\varepsilon_0\frac{2R}{7} \text{ et } C_{22} = 4\pi\varepsilon_0\frac{4R}{7}$$

C_{11} est la capacité de S en présence de S', C_{22} est la capacité de S' en présence de S.
C_{12} et C_{21} sont les coefficients d'influence mutuelle entre S et S'.

EXE 3



$$W = \frac{1}{2}\left(qV_A + qV_B - qV_C - qV_D\right) = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$$ car :

$V_A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a}\right) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$: C'est le potentiel en ***A*** du aux charges de ***B***, ***C*** et ***D***.

$V_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$: C'est le potentiel en ***B*** du aux charges de ***C***, ***D*** et ***A***.

$V_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} + \frac{1}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$: C'est le potentiel en ***C*** du aux charges de ***D***, ***A*** et ***B***.

$V_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a\sqrt{2}} - \frac{1}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a\sqrt{2}}$: C'est le potentiel en ***D*** du aux charges de ***A***, ***B*** et ***C***.

L'énergie du système est négative. Le système cède de l'énergie au milieu extérieur. En effet si l'on étudie les forces électriques qui agissent sur chaque charge, on s'aperçoit que la résultante ne peut pas s'annuler. Le système est dans un état instable et il doit céder de l'énergie (les charges doivent se repositionner) pour se stabiliser.

EXE 4

Nous allons calculer d'abord le champ et le potentiel créés par un cylindre infini quand le Point M est situé entre les armatures.

Symétrie cylindrique, ***S*** = surface de Gauss de hauteur ***h*** et de rayon **r**. Le champ est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Théorème de Gauss : $E\,2\pi\,r\,h = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}2\pi\,R_1\,h \Rightarrow E = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0 r}$

$$\int_{V_1}^{V_2} -V = \int_{R_1}^{R_2} Edr = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\left(\ln R_2 - \ln R_1\right) = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

La charge de l'armature interne de longueur fini ***h*** est $Q = \sigma\,2\,\pi R_1\,h$. Le potentiel devient :

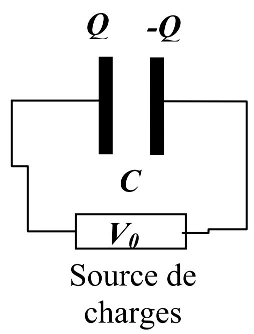
$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1}$. On en déduit :

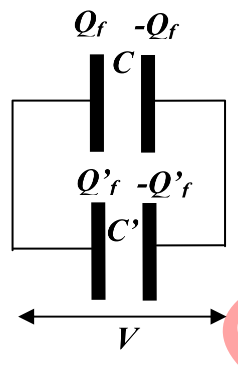
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\,h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

Si $e = R_2 - R_1 << R_1$. $ln\dfrac{R_2}{R_1} = ln\dfrac{R_1+e}{R_1} = ln\left(1+\dfrac{e}{R_1}\right) \approx \dfrac{e}{R_1}$

D'où $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 hR_1}{e} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$

EXE 5





Initialement $Q = C\,V_0$.

En reliant C à C' les deux condensateurs seront forcément en parallèle : $V = Q_f/C = Q'_f/C'$.

Ils partageront donc la charge initiale : $Q = Q_f + Q'_f \Rightarrow C\,V_0 = (C + C')\,V$

On en déduit l'expression de : $V = \dfrac{C}{C+C'}V_0$

Les charges seront alors : $Q_f = CV = \dfrac{C^2}{C+C'}V_0$; $Q'_f = C'V = \dfrac{C\,C'}{C+C'}V_0$

Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/S/SMA/SMI
Série 4

EXE 1

Considérons le circuit de la figure 1 où I_1 et I_2 sont les courants continus débités par les générateurs de f.e.m. E_1 et E_2 respectivement.

1) Déterminer I, à l'aide du théorème de thévenin.
2) Retrouver, à l'aide des lois de Kirchhoff, le courant I.
3) A.N : Calculer I si $R = 1\ M\Omega$, $E_1 = 2/3$ V et $E_2 = 15/2$ V
4) Montrer que le courant de la résistance R' du circuit de la figure 2 est aussi égale à I.

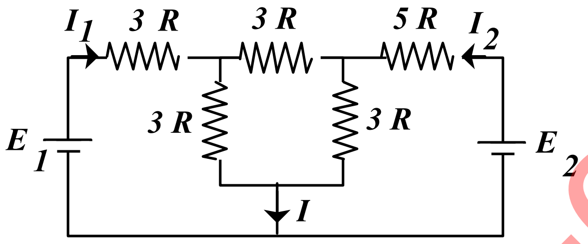


Figure 1

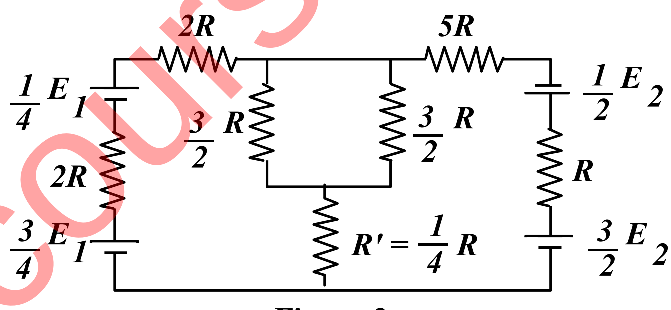
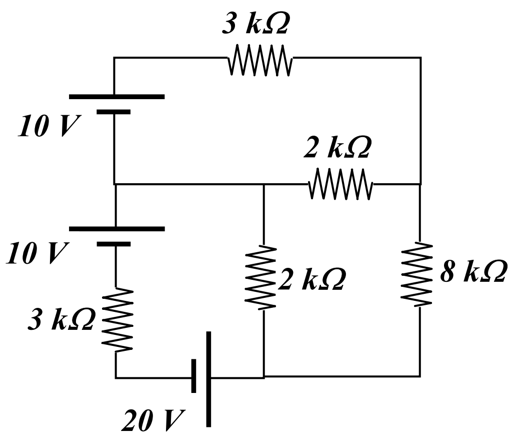


Figure 2

EXE 2

Calculer le courant de chaque branche du circuit suivant, sachant que le courant de la résistance de $8\ k\Omega$ est nul.

Retrouver, en utilisant la méthode des mailles indépendantes, le courant de chaque branche du circuit.



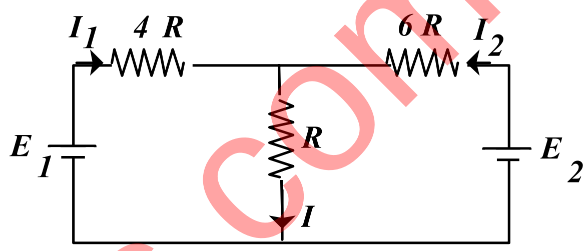
Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 4 - Solution

EXE1

1- On transforme le triangle du milieu en étoile et on remplace les résistances en série par leur équivalent. Le circuit devient :

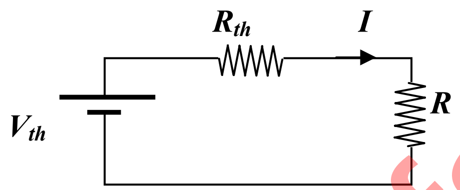


On débranchant R, nous aurons

$$R_{th} = 6R // 4R = \frac{24}{10}R$$

$$V_{th} = E_1 - 4RI_0 = E_2 + 6RI_0$$

I_0 est le courant sortant de la borne (+) de E_1 quand R est déconnectée. $I_0 = \dfrac{E_1 - E_2}{10R}$ que l'on remplace dans l'une des expressions de V_{th}. On trouve : $V_{th} = (6\ E_1 + 4\ E_2)/10$. Le générateur de thévenin connecté à R est :



$$I = \frac{V_{th}}{R_{th} + R} \quad => \quad I = \frac{3E_1 + 2E_2}{17R}$$

2- A l'aide des lois de Kirchhoff

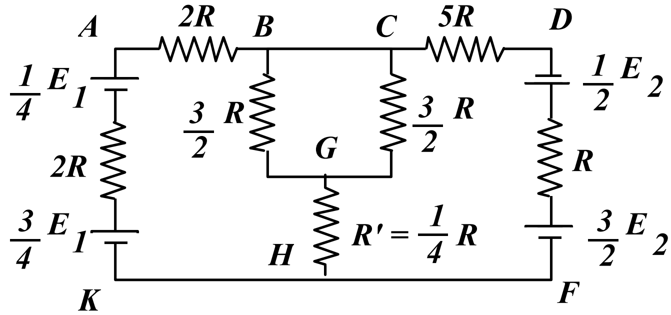
Loi aux nœuds : $E_1 = 4R\, I_1 + RI.$ => $I_1 = \dfrac{E_1 - RI}{4R}$

$-E_2 = -\ 6R\, I_2 - RI.$ => $I_2 = \dfrac{E_2 - RI}{6R}$

Loi aux mailles : $I = I_1 + I_2.$ => $I = \dfrac{(3E_1 + 2E_2)}{17R}$

3- A.N : $R = 1\ M\Omega$, $E_1 = 2/3\ V$ et $E_2 = 15/2$.
$I = 1\ \mu A$.

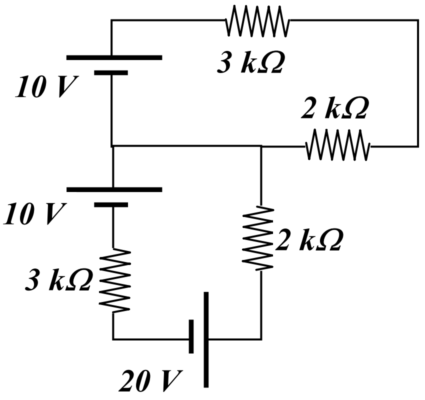
On remarque que
Entre B et C, il y a deux résistance en // qu'il faut ajouter à R' pour obtenir la résistance équivalente entre B et H.
Entre B et K, il y a deux générateurs en séries et deux résistances en série aussi.
Entre C et F, il y a un générateur et un récepteur en série et deus résistances en série aussi.



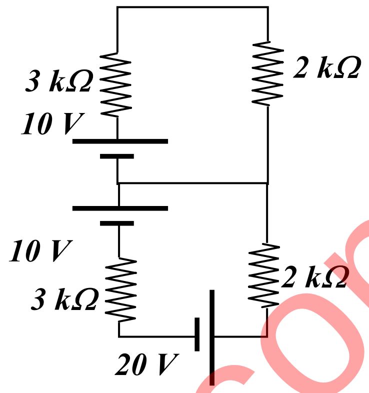
Tout calcul fait, on retrouve le même circuit que celui de la question précédente et donc on aura le même courant.

EXE 2

Si le courant de la résistance de $8\ k\Omega$ est nul, on peut substituer cette branche par une résistance infinie. Le circuit devient :

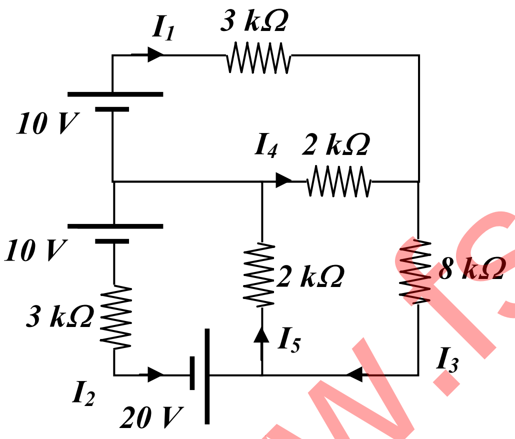


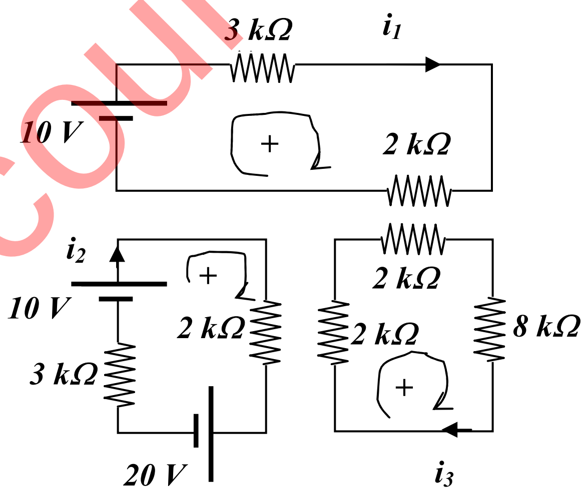
Equivalent à



Ce dernier circuit est symétrique, les courants des branches contenant les générateurs sont identiques. Pour une maille, nous avons : $10 = 5.10^3\ I$. Soit $I = 2\ mA$. A part le court circuit, toutes les branches sont parcourues par un courant égale à $2\ mA$.

<u>Mailles</u> <u>Indépendantes</u>





Il y a cinq courants réels inconnus. A l'aide des mailles indépendantes, on n'a que trois inconnues.
On écrit la loi de Pouillet corrigée pour toutes les mailles :

$10 = 5.10^3\ i_1 - 2.10^3\ i_3$ => $10^{-2} = 5i_1 - 2i_3$

$10 - 20 = 5.10^3\ i_2 - 2.10^3\ i_3$ => $10^{-2} = 2i_3 - 5i_2$

$0 = 12.10^3\ i_3 - 2.10^3\ i_2 - 2.10^3\ i_1$ => $6\ i_3 = i_2 + i_1$

Les deux premières équations donnent $4\ i_3/5 = i_2 + i_1$ avec la troisième on en déduit que $i_3 = 0$. Dans ce cas $i_1 = -\ i_2 = 0{,}2\ A$.

On comparant les branches du circuit initial et du circuit éclaté, on en déduit :

$I_1 = i_1 = 0{,}2\ A$

$I_2 = -i_2 = 0{,}2\ A$

$I_3 = i_3 = 0\ A$. On retrouve le résultat de la question 1.

$I_4 = i_3 - i_2 = 0{,}2\ A$

$I_5 = i_3 - i_2 = 0{,}2\ A$

Exceptée la résistance de $8\ k\Omega$, le même courant parcourt toutes les branches.