ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Exercice n° GE 0301 - Corrigé

Rentabilité économique d'un système d'irrigation utilisant l'eau d'une nappe phréatique

---

Données de l'exercice :

Une feuille de calcul Excel à compléter est disponible dans le fichier « GE0301_feuilledecalcul.xls ». Le corrigé est aussi disponible dans le fichier « GE0301_corrige.xls ».

Question 1. Mise en équations du problème

Détermination des annuités à payer pour le remboursement de l'emprunt :

$$Co = P \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Annuité + Coût annuel d'exploitation du pompage :

$$C(q) = Co + \beta\ V\ z\ =\ Co + \beta\ q\ t\ z \qquad \text{avec } V = q.t$$

avec C(q) : coût total de l'exploitation (Frs/an)

V : volume annuel pompé (m3)

z : profondeur à laquelle se trouve la pompe (m)

q : débit de pompage (m3/s)

t : durée annuelle de pompage (s)

Relation en régime permanent entre débit pompé et profondeur à laquelle se trouve la pompe :

Aucune !

En fait, on a une relation $q(h_r)$ en régime permanent entre le débit pompé q et la hauteur de rabattement h_r de la nappe dans le puit. Conclusion : pour rendre possible le pompage d'un débit qo donné, il suffit de positionner la pompe à une profondeur + importante que celle définie par la hauteur de rabattement $h_r o$ critique obtenue par la relation $q(h_r)$. La relation entre la profondeur z de la pompe et le débit pompé n'est donc pas univoque et l'on a un système qui est à première vue indéterminé sauf que :

étant donné que le coût du pompage est proportionnel à la profondeur à laquelle se situe la pompe, il est nécessaire pour minimiser les coûts d'exploitation du pompage de positionner la pompe le moins profondément possible avec la contrainte que (z-zo)>$h_r o$ si l'on veut assurer le débit qo.

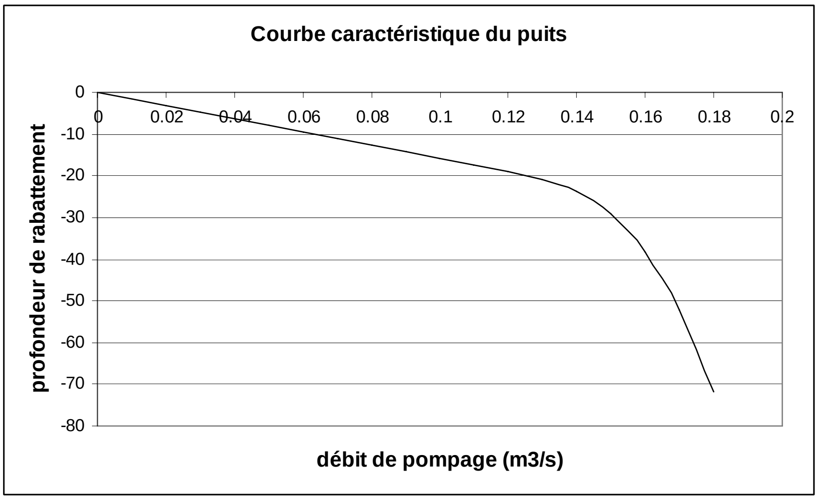
Problème d'optimisation 1

$$\begin{cases} z \text{ tel que } C(q) = C(z) = Co + \beta\, q\, z \text{ soit minimum} \\ \text{avec } q = qo \\ \text{et} \quad z \geq zo + h_r o \end{cases}$$

Pour assurer un débit de pompage qo donné, la profondeur optimale du pompage correspond donc à $z=zo+h_r o$ et la relation q(hr) devient donc la relation q(z-zo)

Relation q(hr)

Courbe caractéristique d'un puit en régime permanent :



Au-delà du point critique, les apports de la nappe n'arrivent plus à compenser les prélèvements par pompage. Pour la partie linéaire de la courbe : utilisation de la formule de Vibert valable pour un puits à fond et parois latérales perméables.

$$q = K\pi \frac{h.H}{\ln(R/r)} = \frac{1}{\alpha}(z - zo) \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \frac{\ln(R/r)}{K\pi\,(zs - zo)}$$

avec K : perméabilité de la nappe (m/s)

h : hauteur du rabattement (m) h =z-zo

H : hauteur de la nappe (m) H=zs-zo

R : rayon d'action du puits (m)

r : rayon du puits (m)

z, zo, zs : profondeur de la pompe, du toit de la nappe, du substratum imperméable base de la nappe (m)

Reformulation des coûts annuels : $C(q) = Co + \beta\ q\ t\ (zo + \alpha\, q)$

Relation entre le gain de la production et le débit d'irrigation

Le débit d'irrigation à fournir pour une production optimale de la culture (q_{opt}) est déterminé de façon à compenser les pertes journalières par évapotranspiration évaluées grossièrement à 5mm/jour

$$q_{opt} = \frac{s * 10^4 * E\,\mathrm{TR}}{1000 * 3600 * n_h}$$

avec q_{opt} : débit d'irrigation optimal **(par hectare irrigué)** pour une production maxi (m3/s)

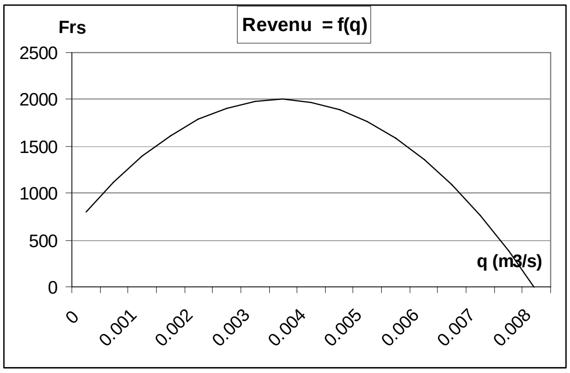
s : surface du champ à irriguer (ha ; s = 1ha dans l'exercice)

ETR : évapotranspiration (mm/jour)

n_h : nombre d'heure d'irrigation par jour

Détermination du gain produit par le champ **(avec *G(q)* en Frs/an/ha)**

Fonction de gain de l'exploitation **par hectare irrigué** $G(q) = -aq^2 + bq + c$



Les coefficients de la fonction sont déterminés ici par :

le gain optimal Gopt obtenu pour le débit d'irrigation optimal q_{opt}

le gain obtenu sans irrigation Go

On en déduit : $a = \dfrac{Gopt - Go}{q_{opt}^{\ 2}}$ $b = \dfrac{2*(Gopt - Go)}{q_{opt}}$ $c{=}Go$

Remarque 1 : on peut aussi exprimer de façon plus synthétique cette fonction de gain sous la forme suivante : $G(q) = Gopt - a \cdot (q - q_{opt})^2$

Remarque 2 : dans l'exercice 101 ; Go = 0.4 Gopt, d'où simplification possible des expressions ci dessus

Question 2. Optimisation

Expression de la fonction objectif à maximiser pour maximiser le profit

Fonction objectif = bénéfices annuels B(q) :

$$B(q) = G(q) - C(q) = \left[Gopt - a(q - qopt)^2\right] - \left[Co + \beta\ q\ t\ (zo + \alpha\, q)\right]$$

$$B(q) = \left[Gopt - Co - a \cdot qopt^2\right] + \left[2a \cdot qopt - \beta \cdot t \cdot zo\right] \cdot q - \left[\beta \cdot t \cdot \alpha + a\right] \cdot q^2$$

$$B(q) = \left[Go - Co\right] + \left[2a \cdot qopt - \beta \cdot t \cdot zo\right] \cdot q - \left[\beta \cdot t \cdot \alpha + a\right] \cdot q^2$$

$$B(q) = \xi + \varepsilon * q - \eta * q^2$$

Problème d'optimisation :

$$S = \begin{cases} \underset{q}{Max}\left[B(q)\right] \\ \text{avec}\quad q > 0 \\ \text{et}\quad B(q) > Go \end{cases}$$

Détermination de l'optimum de la fonction B(q) :

Dans le cas ou le coefficient η est non nul : un optimum $B(q_m)$ unique pour q_m unique

$$B'(q) = \frac{\partial B(q)}{\partial q} = \varepsilon - 2\eta\, q$$

B(q) optimum obtenu pour $B'(q_m)=0$ ce qui implique $q_m = \dfrac{\varepsilon}{2\eta} = \dfrac{2a \cdot qopt - \beta \cdot t \cdot zo}{2 \cdot (a + \beta \cdot t \cdot \alpha)}$

Qui correspond au bénéfice maximum : $B(q_m) = \xi + \dfrac{1}{4}\dfrac{\varepsilon^2}{\eta}$

Vérification des contraintes :

Les deux contraintes du problème d'optimisation S sont à vérifier, à savoir :

Le débit de pompage optimum doit être positif et pour que l'installation soit envisageable, le bénéfice correspondant au débit optimum déterminé par l'optimisation précédente doit au moins être supérieur au bénéfice annuel obtenu sans irrigation et sans installation de pompage (i.e. sans annuité Co à rembourser)

Contrainte $q_m>0$
Pour que $q_m>0$, il faut $\varepsilon>0$

Dans le cas contraire, la dérivée du bénéfice B'(q) est strictement négative pour tout q>0 donc le bénéfice maximum sur $I=[0,+\infty[$ est obtenu pour $q_m=0$;

Or, $B(q_m=0)= \xi = Go - Co < Go$: donc le puit est non intéressant.

Contrainte $B(q_m)>Go$:
Dans le cas où $\varepsilon>0$, on peut trouver un débit optimum positif qui conduise à un bénéfice inférieur au bénéfice que l'agriculteur pourrait faire sans irrigation et sans avoir installé de puit sur son terrain (ce qui l'obligerait sinon à rembourser de toutes façon les annuités même si le puit n'était pas rentable).

On a $q_m = \dfrac{\varepsilon}{2\eta} = \dfrac{2a \cdot qopt - \beta \cdot t \cdot zo}{2 \cdot (a + \beta \cdot t \cdot \alpha)}$ et

$$B(q_m) = \xi + \frac{1}{4}\frac{\varepsilon^2}{\eta} = Go - Co + \frac{1}{4}\frac{(2a \cdot qopt - \beta \cdot t \cdot zo)^2}{(a + \beta \cdot t \cdot \alpha)}$$

pour que $B(q_m)>Go$ il faut $\dfrac{1}{4}\dfrac{(2a \cdot qopt - \beta \cdot t \cdot zo)^2}{(a + \beta \cdot t \cdot \alpha)} > Co$

Remarques :

Rq 1 : Toute l'étude est réalisée pour un puit devant servir à l'irrigation d'une surface cultivée de 1ha. Le débit optimum trouvé pour un champ à irriguer de surface plus grande serait bien entendu différent du fait de la non linéarité du problème :

Débit à pomper : q' = s.q avec s= nombre d'hectares

Coût annuel, gain, bénéfice de l'exploitation :

$$C_2(q) = Co + \beta\ s\, q\ t\ (zo + \alpha\, s\, q)$$

$$G_2(q) = s\left[-aq^2 + bq + c\right]$$

$B(q) = G_2(q) - C_2(q)$

Rq 2 : Le problème fait une approximation importante qui consiste à dire que l'on est en régime permanent et qui n'est pas les cas si l'on ne pompe que 4h/jour. Donc, à priori le débit optimal et le bénéficie correspondant sont sousestimés : en effet, pendant 20h/24, la nappe a le temps de se recharger ; on pourrait donc envisager de positionner la pompe moins profondément…

Rq 3 : On pourrait aussi optimiser la durée journalière pendant laquelle on veut pomper pour compenser les pertes par évapotranspiration ETR=5mm/jour : plus la durée sera grande plus le débit à prélever sera faible, moins les coûts seront importants, et plus le bénéfice sera grand (influence par l'intermédiaire de la variable q_{opt}). Exemple : En modifiant dans le scénario 1 la durée de 4h à 8h on augmente le bénéfice de 12Frs /an.

Rq 4 : Il peut être intéressant de prendre en compte des pertes d'eau au niveau de l'irrigation : $q_{opt} = \frac{s * 10^4 * (1+w) E\,\mathrm{TR}}{1000 * 3600 * n_h}$ avec w : % de pertes dans le système d'irrigation (w=10%)

Question 3. Utilité du pompage pour les 3 configurations envisagées ?

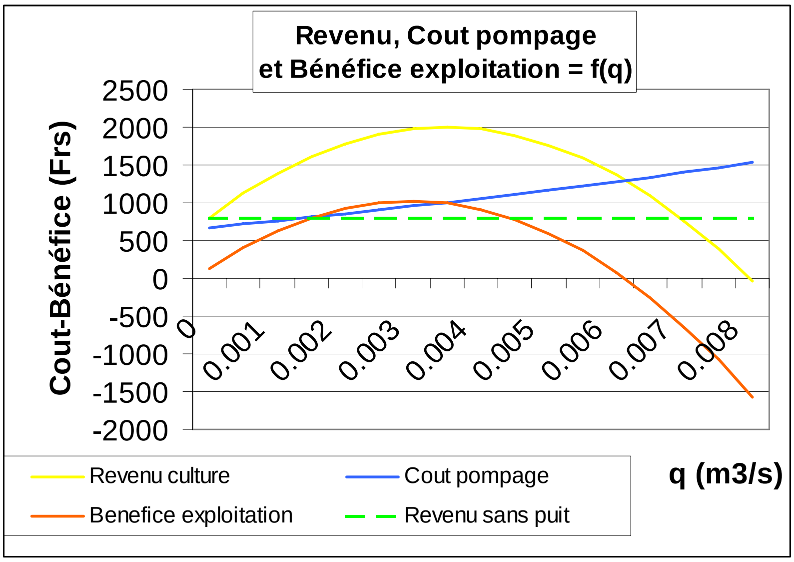
Scénario 1 :

sous sol = gravier K=1^{e}-3 + rayon d'action = 200m

optimum pour : q_m =0.003m3/s

Bénéfice annuel réalisé B(qm)= 1023Frs/an

% de bénéfice supplémentaire 28%



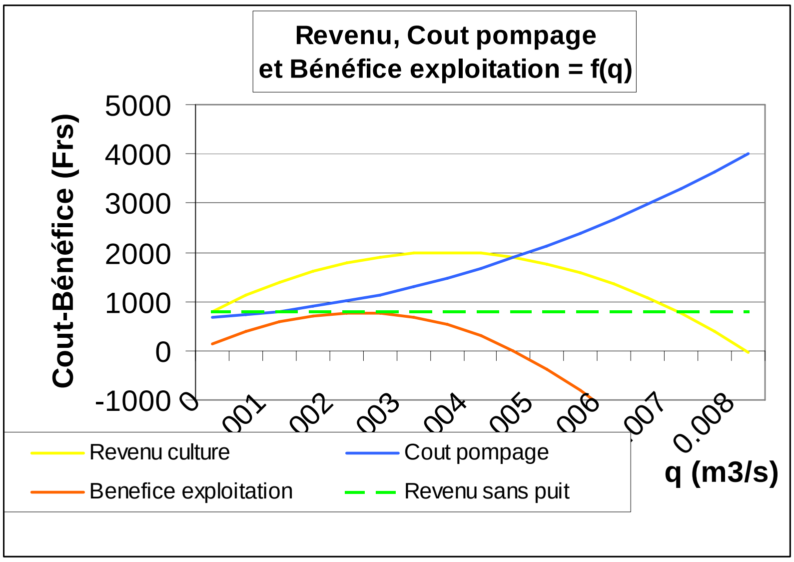
Scénario 2 :

sous sol = sable K=5^{e}-5 + rayon d'action = 60m

optimum pour : q_m =0.0021m3/s

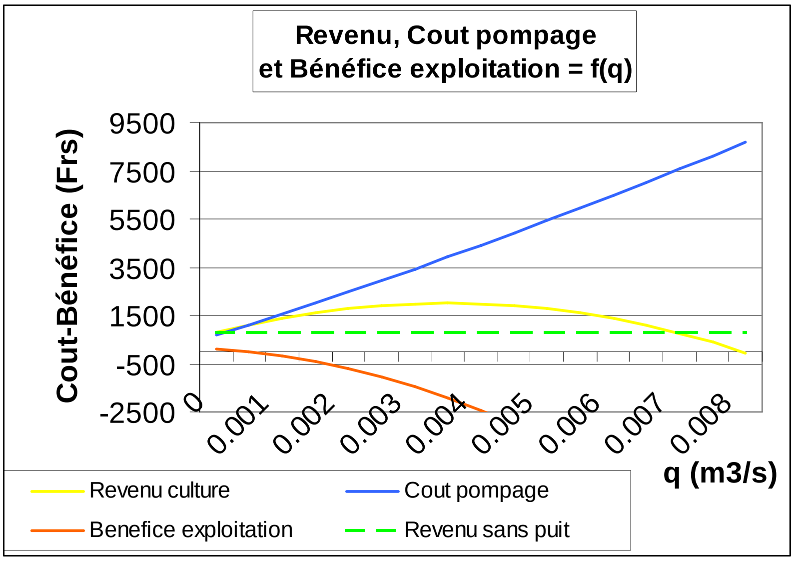
Bénéfice annuel réalisé B(qm)= 778 Frs/an

% de bénéfice supplémentaire -3 %



Scénario 3 :

Coût du pompage β=0.25Frs/m3/m	profondeur du toit de la nappe zo=8m
optimum pour :	q_m = - 0.0007m3/s
Bénéfice annuel réalisé pour débit nul	B(qm)= 192 Frs/an
% de bénéfice supplémentaire	-76 %



Conclusions

Scénario 1 : pompage intéressant permettant d'augmenter les bénéfices annuels de l'agriculteur

Scénario 2 : pompage inintéressant : il existe un débit optimum q_m mais le bénéfice optimum correspondant est équivalent (légèrement inférieur) au bénéfice réalisé sans l'installation du puits (contrainte 2 non vérifiée)

Scénario 3 : pompage complètement inintéressant : le débit optimum du problème obtenu pour maximiser le bénéfice est négatif (contrainte 1 non vérifiée). Les coûts d'exploitation sont trop importants.

Paramètres décrivant les différents scénarii

		Scénario 1	Scénario 2	Scénario 3	
Remboursement de l'installation					
nombre années remboursement	n	20	20	20	années
Coût initial de la construction	P	10000	10000	10000	Frs
taux d'emprunt	r	0.03	0.03	0.03	%
Annuité	Co	672.2	672.2	672.2	Frs
Temps et coût d'exploitation du pompage					
coût du pompage / m3 / m	β	0.05	0.05	***0.25***	Frs/m3/m
Nbre de mois d'irrigation par an		3	3	3	mois/an
Nbre de jour d'irrigation par mois		10	10	10	jours/mois
Nbre d'heure d'irrigation par jour	n_h	4	4	4	heures/jour
durée annuelle d'irrigation en secondes	t	432000	432000	432000	secondes/an
coût exploitation ANNUEL du pompage / (m3/s) / m	β'	21600	21600	108000	Frs/(m3/s)/m/an
relation entre débit d'irrigation et gain produit par la culture de surface 1ha					
gain sans irrigation	go	800	800	800	Frs/an/ha
gain maximum avec irrigation	gopt	2000	2000	2000	Frs/an/ha
débit d'irrigation pour gain maximum (=ETR)	qopt	5	5	5	mm/jour
	qopt	0.00347	0.00347	0.00347	m3/s/ha
caractéristiques de la nappe					
profondeur du toit	zo	4	4	***8***	M
profondeur du substratum	zs	20	20	20	M
conductivité de la nappe	K	1.00E-03	***5.00E-05***	1.00E-03	m/s
caractéristiques du pompage					
profondeur du pompage	z	inutile	inutile	inutile	M
rayon puit	ro	0.5	0.5	0.5	M
rayon d'action du pompage	R	200	***60***	200	M
coefficient de proportionnalité $q=(z-zo)/\alpha$	α	1904.882	1904.882	158.928	$1/\alpha$ en m3/s/m
Coefficients de la fonction de gain $G(q)= -a.q^2 + b.q + c = Gopt - a\ (q-qopt)^2$					
	Gopt	2000	2000	2000	Frs
	a	99532800	99532800	99532800	
variables intermédiaires					
$\xi = A - Co - Bqopt^2$	ξ	127.842924	127.842924	127.842924	
$\varepsilon = 2\ B\ qopt - \beta'\ zo$	ε	604800	604800	-172800	
$\eta = \beta'\ \alpha + B$	η	140678260	140678260	116697081	
débit de pompage optimum pour bénéfice maximum de l'agriculteur	**q ***	**0.003**	**0.0021**	**-0.0007**	**m3/s**
Bénéfice pour le débit de pompage optimum	**B(q*)**	**1023**	**778**	**192**	**Frs/an**
contrainte Bénéfice > bénéfice sans irrigation	B(qm)-G0	223	-22	-608	Frs
% de bénéfice supplémentaire	[B(qm)-Go]/Go	+28%	-2.9%	-76	%