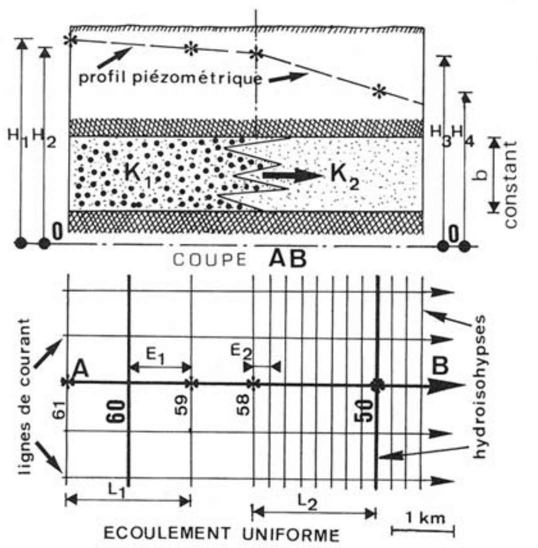
# Master Professionnel
# « Eaux Souterraines »

# Exercices et problèmes d’hydrogéologie

# Corrigé

Exercice 1) Calculer le gradient hydraulique et le contraste de perméabilité $K_2/K_1$.




$$i_1 = \frac{H_1 - H_2}{L_1} = \frac{2}{2\,000} = 0{,}001 \quad i_2 = \frac{H_3 - H_4}{L_2} = \frac{8}{2\,000} = 0{,}004$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{0{,}004}{0{,}001} = 4 = \frac{E_1}{E_2} = 4$$

Écoulement uniforme dans un aquifère à nappe captive d’épaisseur constante. Une diminution du coefficient de perméabilité, dû à une variation latérale de faciès, entraîne un accroissement du gradient hydraulique et une diminution du module d’espacement. Le rapport des modules d’espacement permet de calculer directement celui des coefficients de perméabilité.

Exercice 2) Déterminer le débit d'un puits en nappe captive compte tenu des informations suivantes:

- Différence de hauteurs piézométriques de 2,5 m entre deux piézomètres situés respectivement à 10 et 30 m du centre du puits.
- Épaisseur de la nappe de 30 m.
- Conductivité hydraulique 0,0001 m/s.

[$Q = 2\pi K e \dfrac{H_1 - H_2}{\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}$ = 0.0428 $m^3/s$ = 43 l/s]

Exercice 3) Déterminer le coefficient de perméabilité dans une nappe captive si les mesures du rabattement dans deux piézomètres situés respectivement à 20 et 150 m du puits sont, dans l'ordre 3,3 et 0,3 m. L'épaisseur de la nappe est de 30 m et le débit est de 0,2 $m^3/s$.

[$K = \dfrac{Q \ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{2\pi (H_1 - H_2) e}$ = 7.1x$10^{-4}$ m/s]

Exercice 4) Faire un calcul approximatif du débit d'un puits en nappe libre sachant que son rabattement est de 5,5 m, son rayon de 30 cm et que la position initiale de la nappe avant pompage était de 12 m au-dessus du roc. Le milieu poreux considéré a un coefficient de perméabilité de 2x$10^{-4}$ m/s.
[Rayon d'influence : 233 m (Sichardt), Q = 9.6 l/s]

Exercice 5) Un puits de 1 m de diamètre a été foré pour capter une nappe libre. Avant pompage, le roc se situe à 50 m sous la surface piézométrique. Des piézomètres situés respectivement à 10 et 30 m du puits indiquent des rabattements de 1,25 et 0,75 m pour un pompage à 10 l/s, déterminer le coefficient de perméabilité. Calculer le rabattement dans le puits.
[K=7 $10^{-5}$ m/s, s = 2.6 m]

Exercice 6) Un puits de 50 cm de diamètre est foré dans une nappe captive, l'épaisseur de l'horizon poreux est de 20 m. Lors d'un pompage d'essai à 0,6 l/s, on observe des rabattements de 2,25 m dans le puits et de 1,75 m dans un piézomètre situé à 15 m du puits. Estimer le coefficient de perméabilité de l'aquifère et vérifier si la vitesse critique à la surface d'alimentation du puits n'est pas dépassée.
[K =3.9 x $10^{-5}$ m/s; V = 1.9 x $10^{-5}$ m/s < $V_c$ = 4.2 x $10^{-4}$ m/s]

Exercice 7) Une municipalité compte 15 000 habitants et on estime que, en raison de la dimension de son territoire, il est possible d'atteindre 22 000 habitants dans les années qui arrivent. Sachant que sa consommation globale unitaire est stable à 375 litres par habitant et par jour, on se demande si l'installation d'alimentation en eau potable sera toujours suffisante. La ressource en eau est située en nappe libre et elle est captée au moyen d'un puits de 50 cm de rayon. La charge piézométrique disponible est de 30 mètres et le coefficient de perméabilité est de 0,0003 m/s. On demande :
[Vol = 2 053 125 $m^3$/an]
- de calculer le débit actuel du puits
[Q = 6.51 x $10^{-2}$ $m^3/s$]
- sachant que le rayon d'influence est de 500 m pour le débit actuel, de calculer le rabattement,
[s = 9,44 m ou 9.62 avec formule de Sichardt]
- d'évaluer la vitesse de filtration à proximité du puits,
[V = 0,001 m/s]
- ce puits sera t-il suffisant si la population augmente?
[Vc = 1.15 $10^{-3}$ m/s, si la population augmente V > $V_c$, donc le puits ne sera pas suffisant.]

Exercice 8) Soit une nappe côtière à surface libre. On cherche à creuser un puits pour alimenter une usine située à une distance *L* du rivage. La hauteur piézométrique à cet endroit est *h*. On cherche la profondeur maximale à laquelle on peut forer sans atteindre la limite eau douce – eau salée.

- On suppose que l'interface entre les deux types d'eau est abrupte et stationnaire. Ecrire en chaque point P de l'interface la pression correspondant à l'eau de mer et à l'eau douce.

[ $P = -\rho_2 gz = -\rho_1 gz + \rho_1 gh$, soit $z = -hr_1/(\rho_2 - \rho_1)$]

- Calculer la profondeur *Z* de l'interface sous un point où la surface piézométrique en surface est à hauteur h sachant que la masse volumique de l'eau douce est 1000 kg/$m^3$ et celle de l'eau salée 1025 kg/$m^3$ (cela correspond à 32 grammes de sel par litre d'eau). Cette relation est connue sous le nom de « Principe de Ghyben-Herzberg ». Noter que l'on a supposé ici que le biseau est une droite.

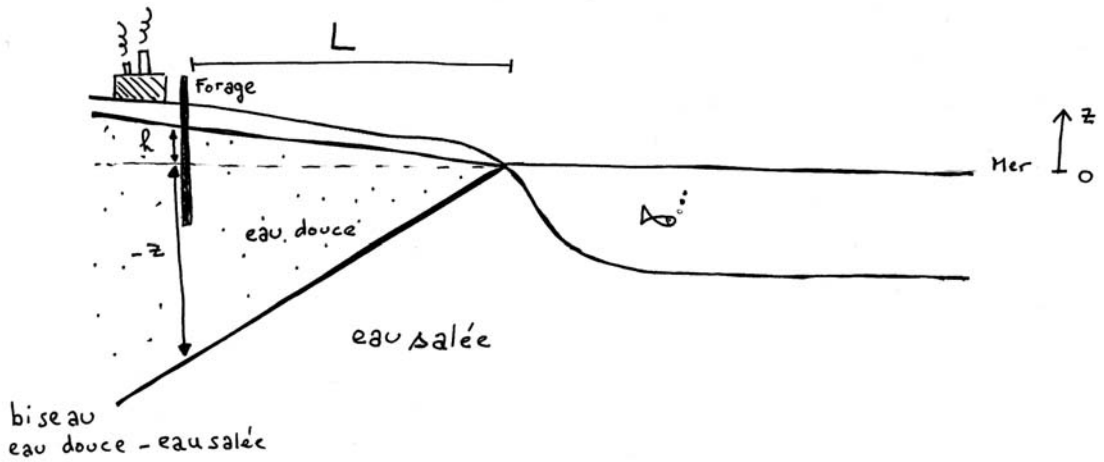
[z = 40 h]

- Application : h = 2 m, L = 200 m, calculer la profondeur de la limite eau douce – eau salée.

[z = 80 m]

- Quel est l'angle du biseau?

[21.8° + 0.6° = 22.4°]

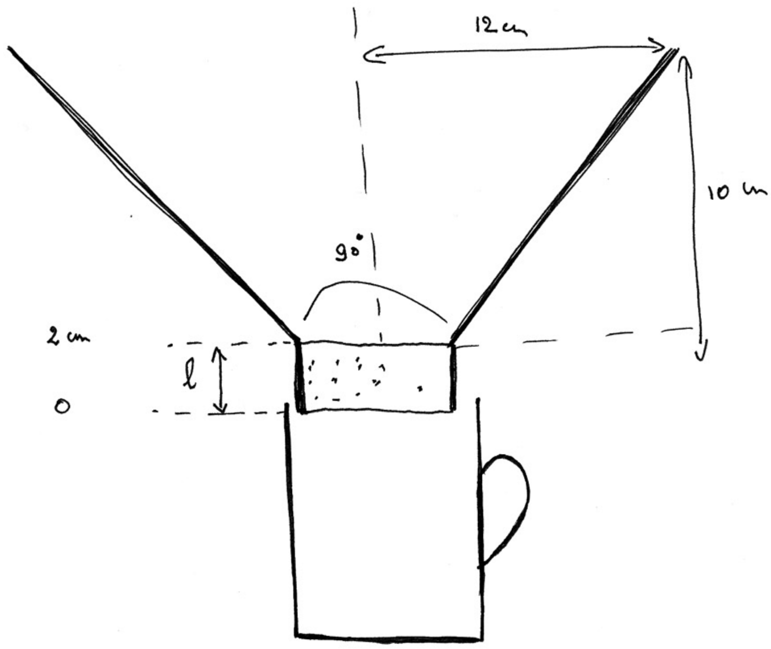



Exercice 9) Percolation de café. Soit une cafetière selon le dispositif suivant où l'eau s'écoule à travers le café.

- Estimer le débit incrémental dans le filtre.

- Calculer combien de temps faut-il pour que l'eau contenue du filtre ait entièrement percolé à travers le filtre ?

Application numérique : rayon du filtre 2cm, l = 2 cm, angle du filtre 90°.




Application numérique : K = 0.002 m/s, l = 2 cm.

Loi de Darcy pour le débit : $Q = K.A_0.\frac{h}{l}$, avec $A_0 = \pi r^2$ où r est le rayon du filtre.

A l'instant *t*, la hauteur d'eau dans le filtre est $h(t)$, la surface d'eau est $A(t) = \pi h^2(t)\tan^2(\theta)$ (comme l'angle est de 90°, la tangente est égale à 1). La variation incrémentale de volume d'eau dans le filtre est donnée par $dV = -A(t)dh = \pi R^2(t)dh = \pi h^2(t)dh$.

Or $dV = -Qdt$ et $Q = K.A_0.\frac{h}{l}$, on a donc :

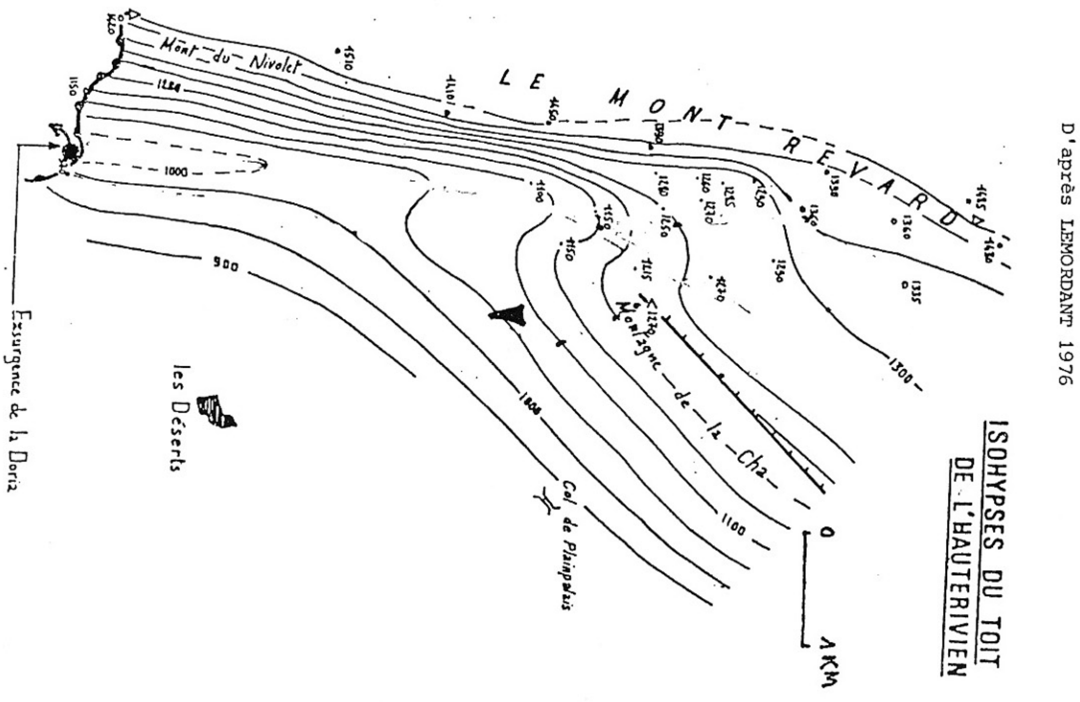
$-\pi h^2 dh = A_0 K \frac{h}{l} dt$ et en simplifiant $-\pi h dh = \frac{A_0 K}{l} dt$

$$\int_{h_0}^{h_f} h dh = -\frac{A_0 K}{\pi l} \int_{t=0}^{t=t_f} dt$$

On trouve ainsi $t_f = 180$ secondes.

## Problème 1: Hydrogéologie en milieu karstique

On cherche à déterminer les chemins d'écoulement dans un karst de la région de Chambéry. Pour cela on a réalisé une série de traçages dans les gouffres alimentant ce karst. Vous avez à votre disposition une carte avec la localisation des traçages, les résultats des traçages et une carte géologique de la région.
A l'aide de ces documents, dessinez les directions générales d'écoulement souterrain, puis déterminez les limites de bassin versant souterrain. Que pouvez-vous dire de la géométrie des karsts et des conséquences hydrogéologiques.




TRACAGES ARTIFICIELS

| LIEU D'INJECTION | RESULTATS Empereur | Pragon | Doria | Bout du Monde | Fontaine Froide |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | . | . | + | . | . |
| 2 | . | . | + | . | . |
| 3 | . | . | + | . | . |
| 4 | . | + | . | + | . |
| 5 | . | . | + | . | . |
| 6 | . | . | . | + | . |
| 7 | . | . | . | + | . |
| 8 | . | . | . | + | . |
| 9 | . | . | . | + | . |
| 10 | . | . | . | . | . |
| 11 | . | . | . | . | . |
| 12 | . | . | . | . | . |
| 13 | + | . | . | . | . |
| 14 | + | . | . | . | . |
| 15 | . | . | . | . | + |
| 16 | . | . | . | . | + |
| 17 | . | . | . | . | + |

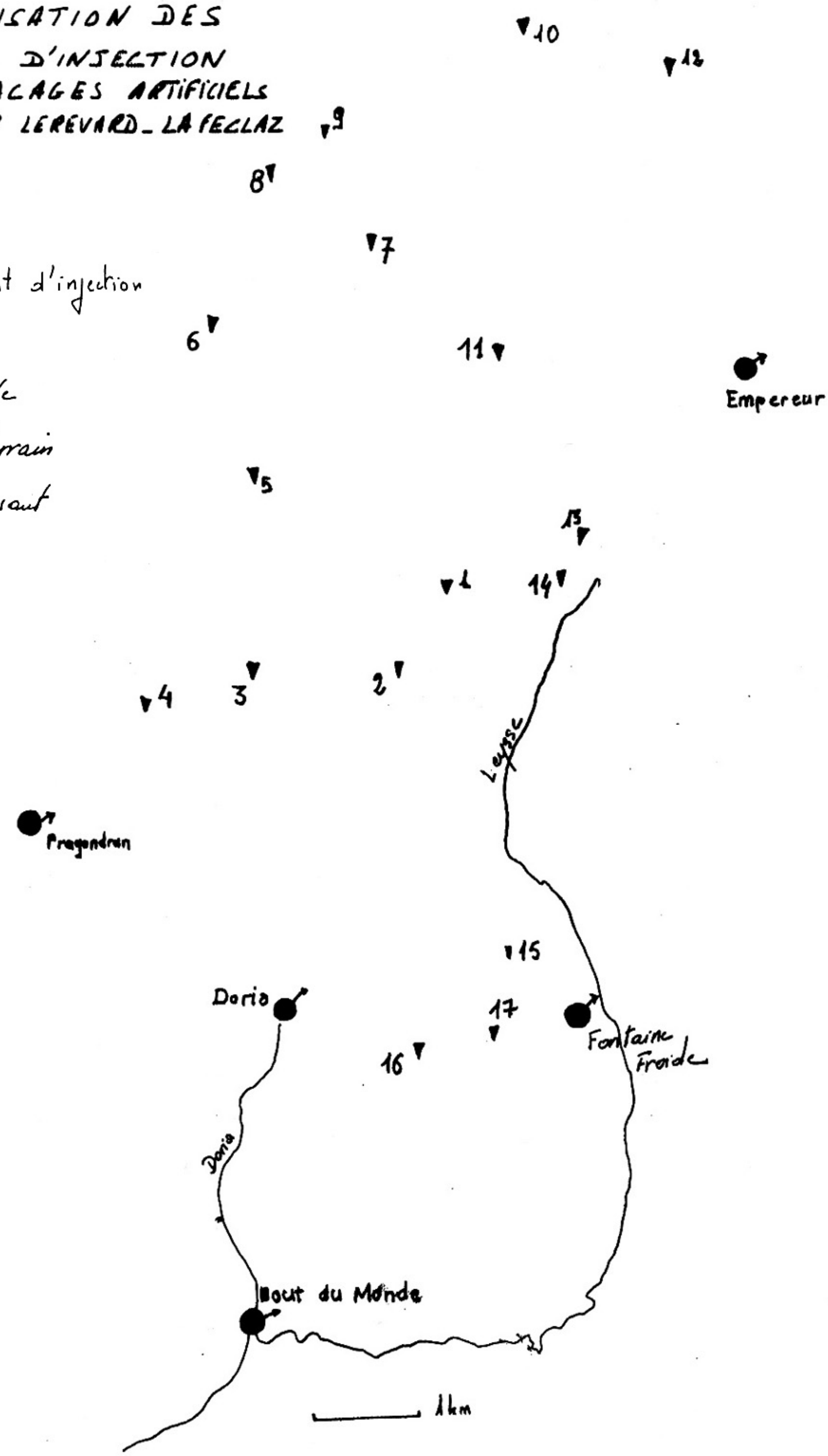
LOCALISATION DES
POINTS D'INJECTION
DE TRACAGES ARTIFICIELS
SECTEUR LEREVARD_LA FECLAZ

Emergence

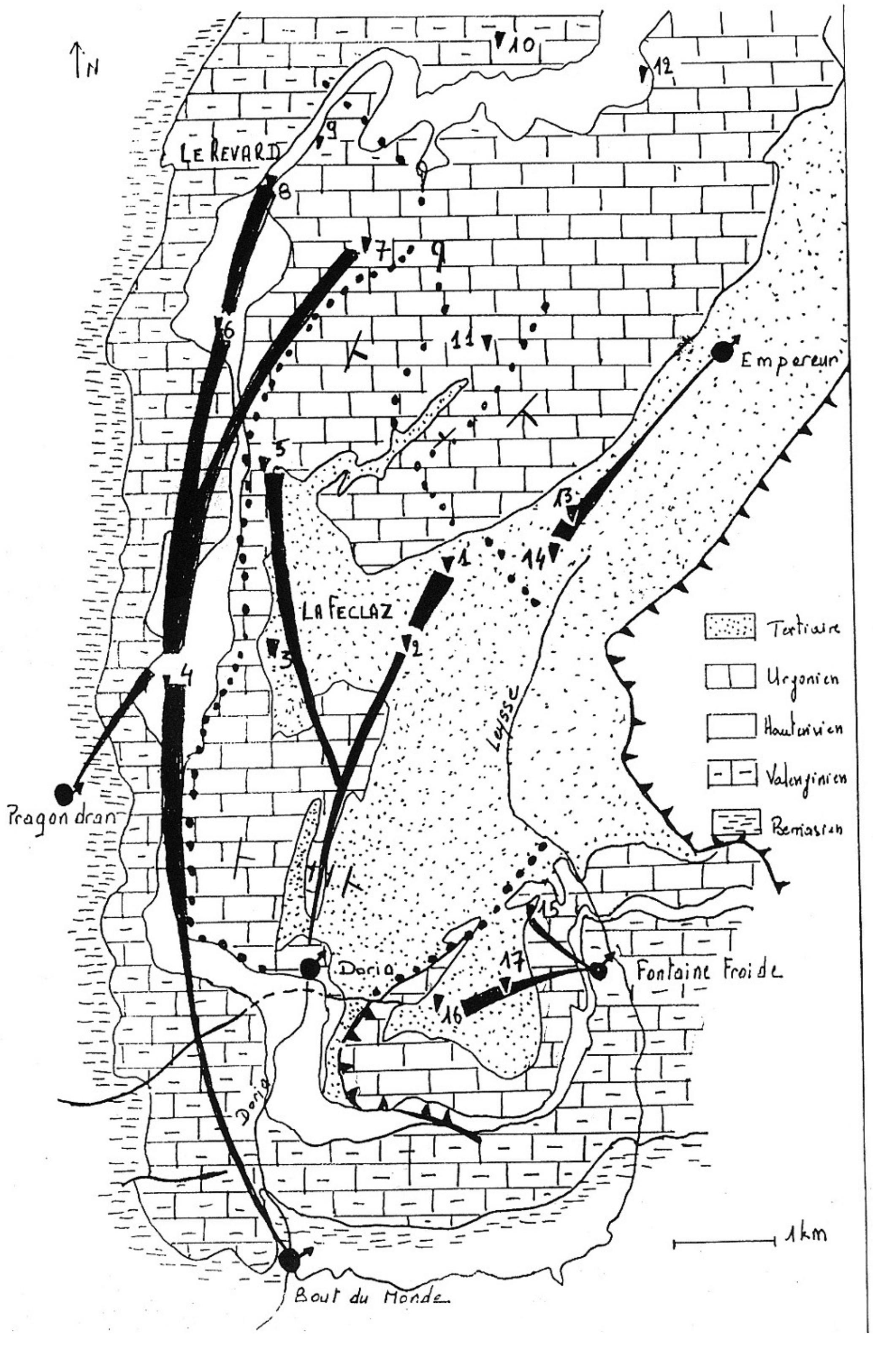
zone de perte - Point d'injection de traceurs

directions generales de l'écoulement souterrain

limites de bassin versant souterrain



Les directions préférentielles d'écoulements souterrains du plateau du REVARD - LA FECLAZ.



Emergence

zone de perte - Point d'injection de traceurs

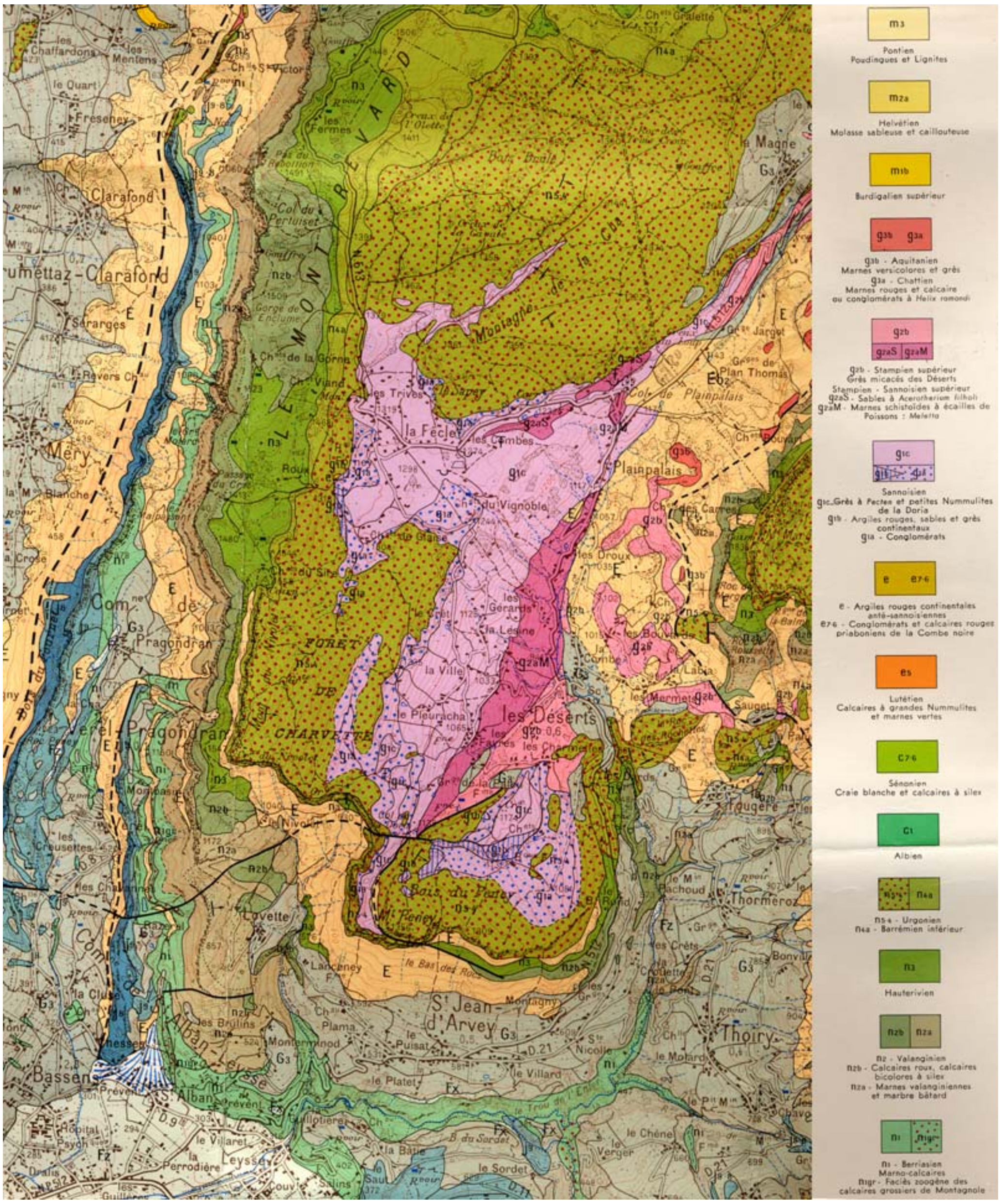
directions générales de l'écoulement souterrain

limites de bassin versant souterrain

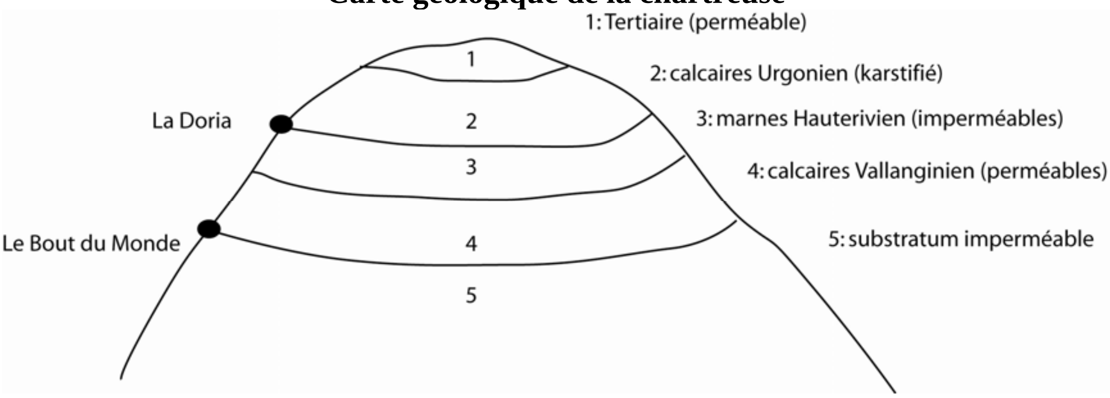
---

<u>Commentaires</u>

- 2 formations karstiques marquées par des formes de surface : lapiez - creux - dolines - dépressions fermées.
  - calcaires Urgoniens.
  - calcaires du Valenginien.
- Directions préférentielles d'écoulements : N → S
  - mise en évidence de deux systèmes karstiques différenciés : les calcaires Urgoniens et Valenginiens séparés par les marnes imperméables de l'Hauterivien.
  - directions d'écoulement influencées par une "gouttière" synclinal (isohypses du toit de l'Hauterivien)
- Pb de la relation entre le pt 7 sur les calcaires Urgoniens et la source du Bout-du Monde :
  le point d'injection est une vaste doline d'effondrement : Creux de l'Olette. Cette dépression est liée à un effondrement au sein des calcaires Valenginiens. Elle permet une infiltration au coeur de ces derniers.




**Carte géologique de la chartreuse**



### Problème 2: Piézométrie de la Forêt de Montmorency

La région étudiée s'étend sur la partie occidentale de la forêt de Montmorency entre les villages de Frépillon et Montlignon. Elle correspond à la zone d'affleurement des terrains Oligocènes (marnes supra gypseuses, sables de Fontainebleau, calcaire et meulière de Beauce) sur une surface d'environ 17,5 $km^2$ délimitant le massif de Taverny.

La zone d'étude est allongée suivant la direction NW—SE, direction la plus souvent rencontrée dans le Bassin Parisien, et compartimentée suivant cette même direction par quatre ruisseaux. Le Rû du Montubois à l'Ouest, le Rû de Corbon, le Rû du Petit Moulin et le Rû de Ste Radegonde à l'Est divisent le massif en deux parties, le plateau des Six Chiens au Nord et le plateau du Camp de César au sud (voir Figure 1). Ces ruisseaux constituent les exutoires de la nappe et communiquent avec celle-ci sise dans les sables de Fontainebleau.

L'ensemble forme une butte témoin où l'argile à meulière affleure sur le sommet des plateaux, les sables occupent les rebords et les dépressions, et les marnes forment le substratum imperméable.

Relevés piézométriques:

| Numéro du piézomètre | Relevé | Numéro du piézomètre | Relevé |
|---|---|---|---|
| 1 | 139 | 13 | 147.5 |
| 2 | 142.5 | 14 | 150 |
| 3 | 142 | 15 | 150.5 |
| 4 | 140.5 | 16 | 149.5 |
| 5 | 143 | 17 | 131 |
| 6 | 143.5 | 18 | 142 |
| 7 | 139 | 19 | 146 |
| 8 | 143 | 20 | 149.5 |
| 9 | 148 | 21 | 148 |
| 10 | 146 | 22 | 150 |
| 11 | 136 | 23 | 147 |
| 12 | 141 | | |

***Question 1:*** A l'aide de la carte topographique (Figure 1) et des relevés tracer la carte piézométrique de la nappe (isopièzes tous les 5 mètres).

***Question 2***: Construire 2 coupes N-S et E-W de la topographie (Figure 1), du toit des marnes (Figure 2) et du sommet de la nappe.

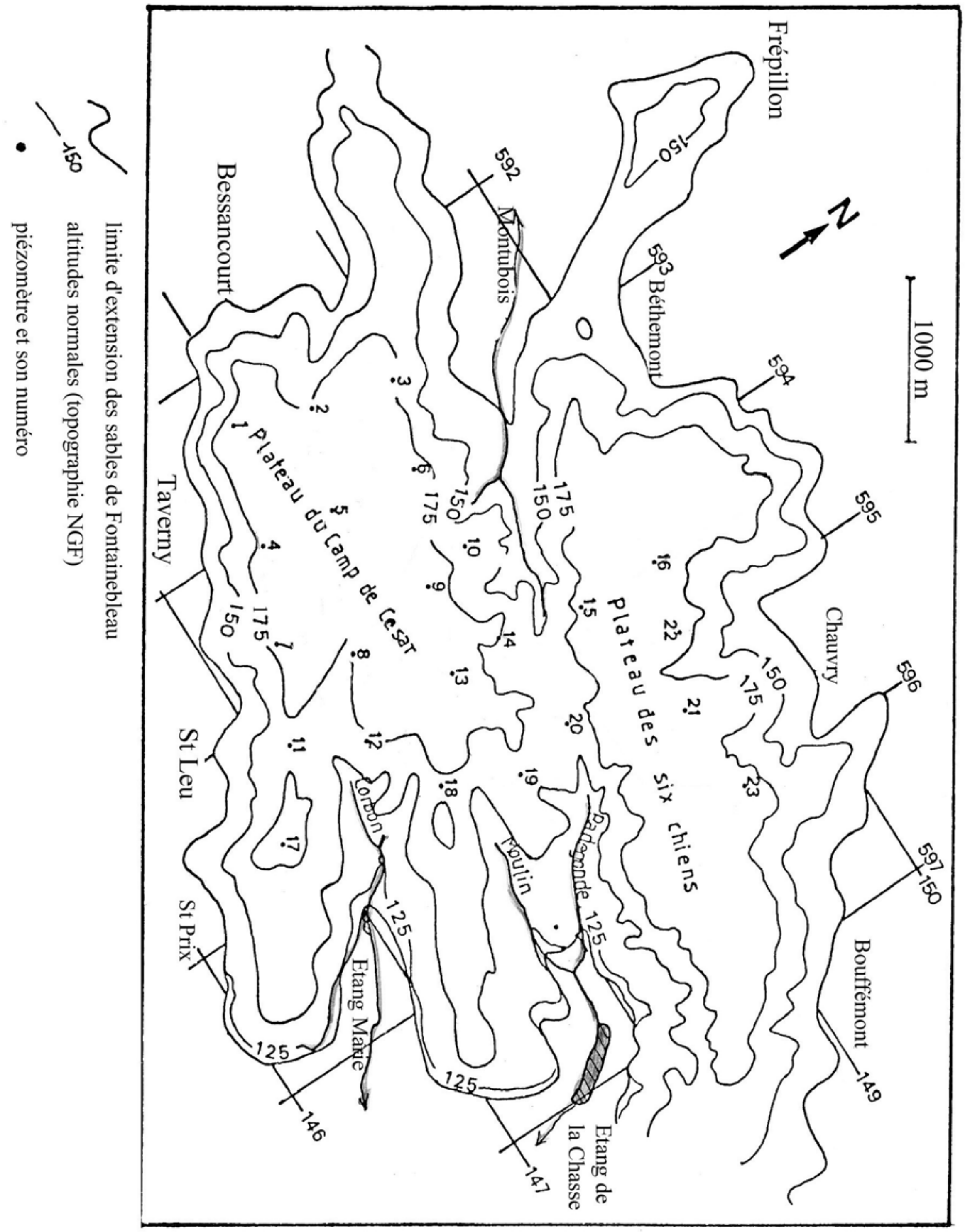



Figure 1: Carte topographique et position des piézomètres.

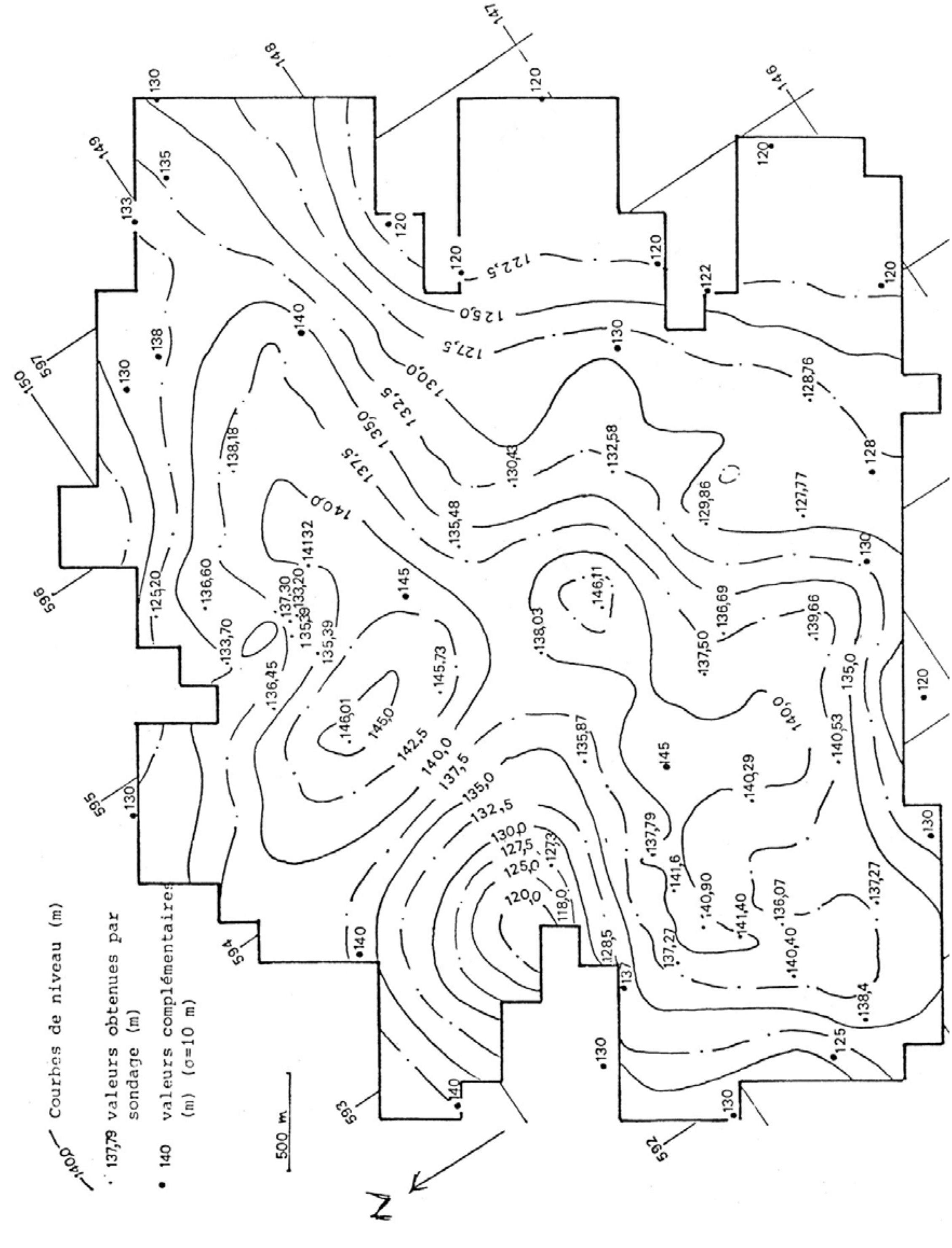



Figure 2: Carte du toit des marnes obtenue par krigeage.

**Correction Question 1**

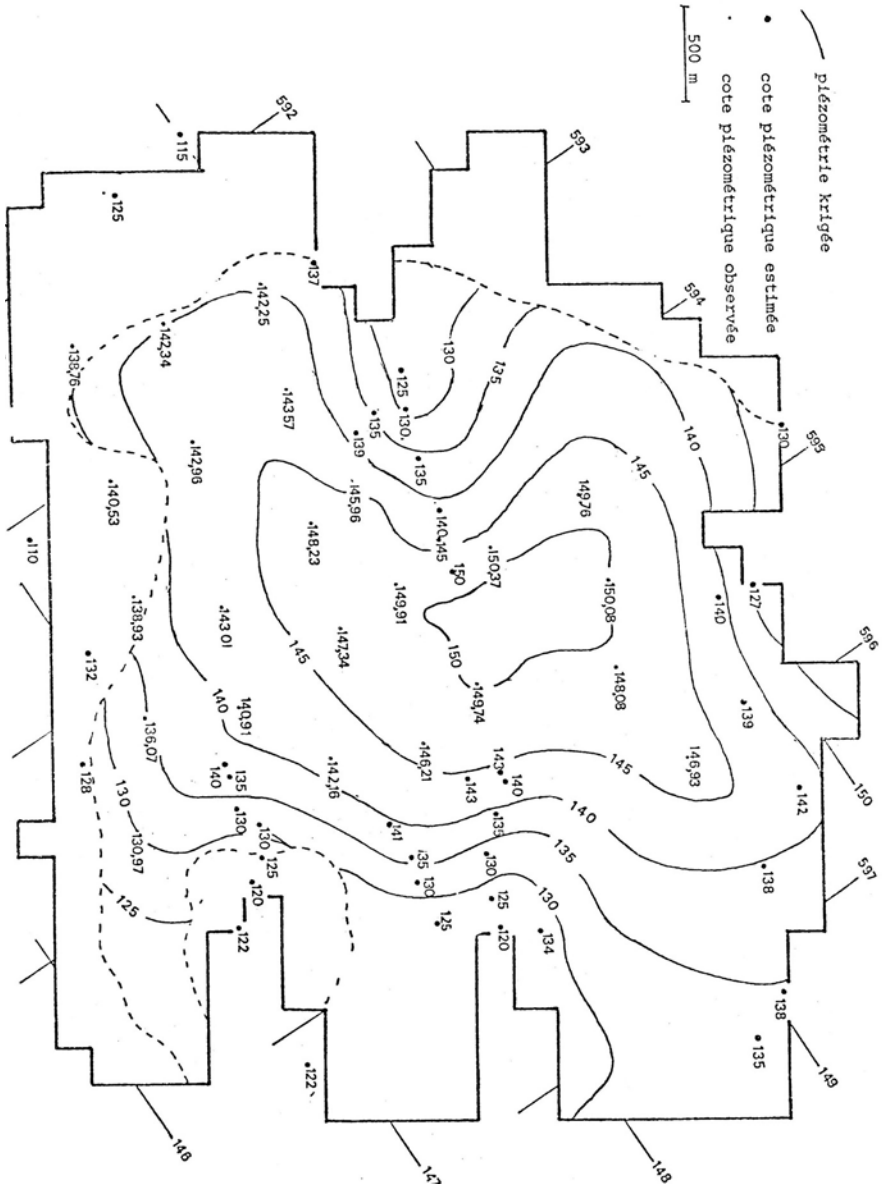



Figure 3: Carte piézométrique de la nappe des sables de Fontainebleau obtenue par krigeage.

## Correction Question 2

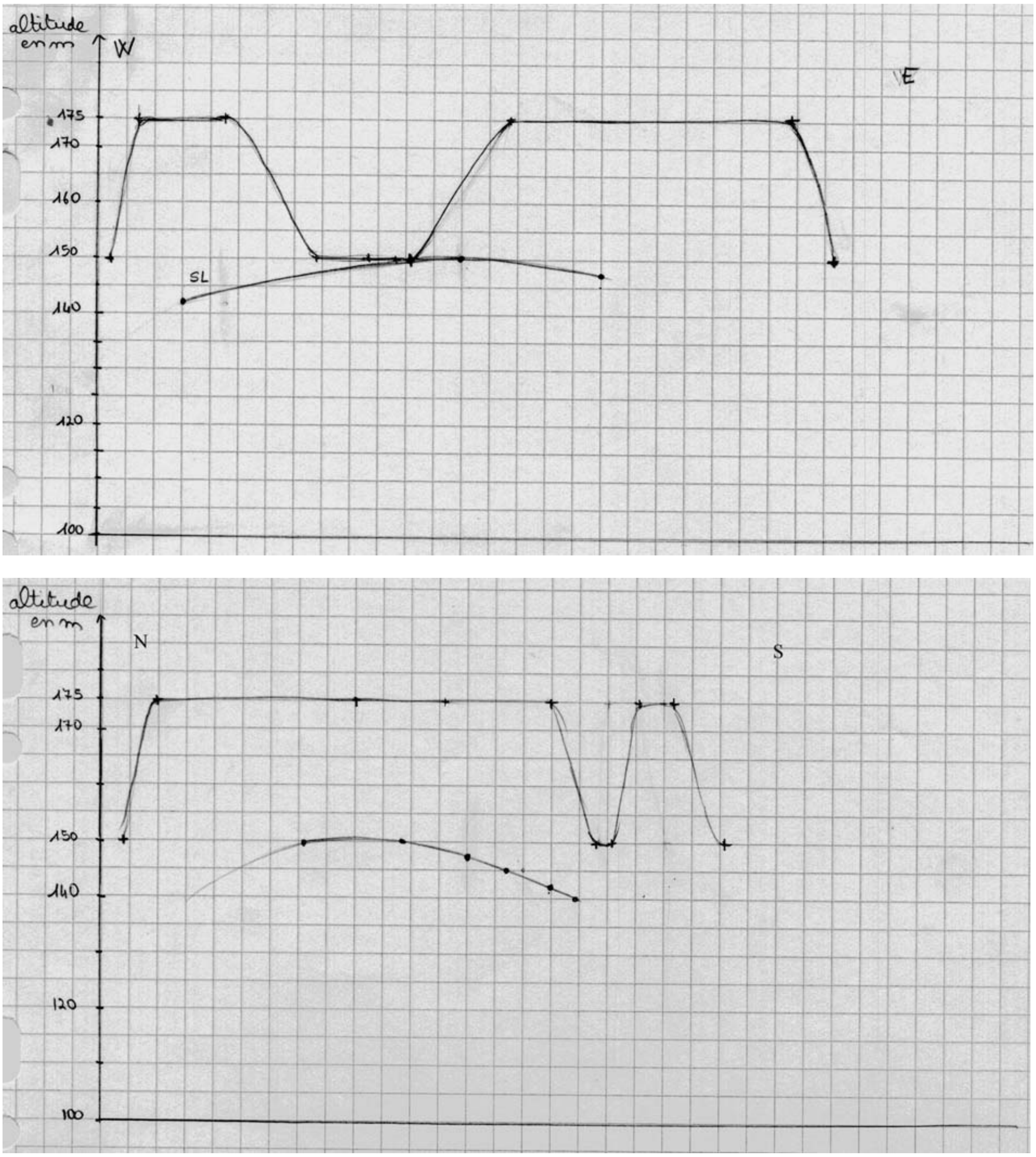


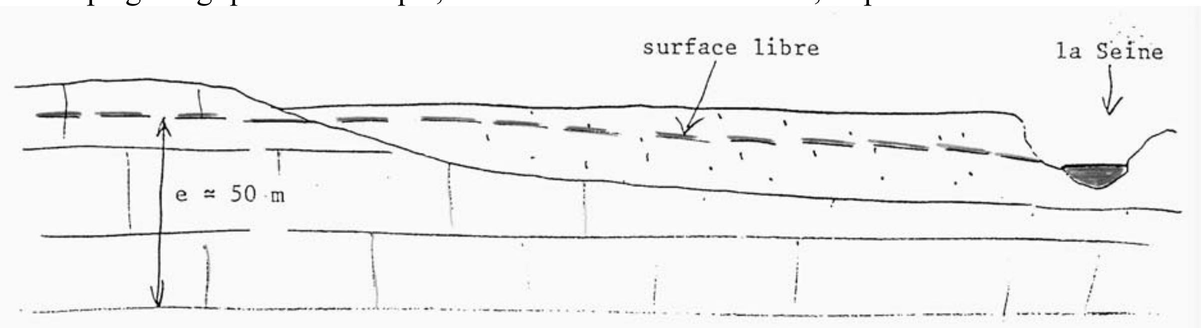

Figure 4: Correction des profils EW et NS.

## Problème 3 : Risque de pollution des pompages dans une nappe

En aval de Paris, la nappe alluviale de la Seine, en continuité avec la nappe de la Craie, est captée par pompage dans la région d'Aubergenville, pour l'alimentation en eau de la région sud-ouest de l'agglomération parisienne.

Le problème que nous voulons étudier est celui d'une pollution éventuelle des puits, dans le cas où la Seine viendrait à être accidentellement polluée, en admettant que la nappe et la rivière soient connectées hydrauliquement.

La coupe géologique schématique, transversalement à la rivière, se présente comme suit :




Les alluvions reposent en continuité sur la craie, nous ne considèrerons donc qu'une seule nappe dont l'épaisseur mouillée est d'environ 50 mètres, la craie devenant ensuite très peu perméable en profondeur.

La planche 1 donne une carte piézométrique en régime permanent moyen de cette nappe avant implantation des captages.

La planche 2 donne la carte observée alors qu'un seul puits était implanté dans la nappe, et en route depuis un temps suffisamment long pour que les niveaux soient stabilisés.

1) A partir des planches 1 et 2, et en particulier des valeurs des charges lues dans les piézomètres A, B et C, donner une estimation de la transmissivité de la nappe sachant que le débit du puits est 100 $m^3$/h. On suppose que la Seine communique parfaitement avec la nappe. On supposera la nappe captive pour calculer les rabattements.

2) On pousse le débit du puits à 250 $m^3$/h. Y a-t-il un danger d'infiltration des eaux de la rivière vers le puits ? Si c'est le cas, calculez la longueur du front de rivière le long duquel une telle infiltration peut prendre naissance.

3) On va se placer sur le filet de courant le plus rapide reliant la Seine au puits. Donner l'expression de la vitesse moyenne de pore de l'eau en fonction de la distance $x$ du point considéré à la rivière. On donne les informations suivantes:
   - transmissivité de la nappe = celle calculée en 1.
   - perméabilité de la nappe = tabler sur une épaisseur de 50 m, et une perméabilité uniforme sur la verticale.
   - porosité cinématique 15 %.

4) En fonction du résultat ci-dessus, calculez le temps de transfert d'un polluant éventuel, qui ne serait pas adsorbé par le terrain, pour cheminer de la rivière au puits. On rappelle que : $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} Arc\tan\left(\frac{x}{a}\right)$, avec un résultat en radians. Cependant, si vous n'y parvenez pas assez rapidement, estimez le temps de parcours en calculant numériquement quelques valeurs de la vitesse donnée par (3) en un petit nombre de points du parcours.

5) A partir du temps déterminé ci-dessus, calculer la vitesse moyenne équivalente de convection, ainsi que la vitesse de Darcy entre la rivière et le puits. On supposera cette vitesse constante dans l'espace, et on va raisonner sur un modèle de transport monodimensionnel de dispersion - convection, entre la rivière et le puits. Calculez le temps au bout duquel, sur ce filet de courant, la concentration arrivant au puits sera de 10% de la concentration de la rivière, toujours sans adsorption. On admettra que la dispersivité longitudinale est de 20 m, et on négligera la diffusion moléculaire. La concentration est supposée rester constante dans la rivière.

6) Le polluant que l'on redoute de voir arriver est du chrome en solution à l'état cationique. Il est donc vraisemblable que cet élément sera adsorbé par le milieu poreux. Pour déterminer cette adsorption, on réalise l'expérience suivante :

Dans un bêcher, contenant 0.1 litre de solution titrée à 50 mg/l d'ions chrome, on ajoute 5 g de matériaux secs extraits de l'aquifère. Après mélange et stabilisation, la concentration dans la solution dans le bécher est tombée à 30 mg/l.

On supposera que l'adsorption est linéaire, réversible et instantanée. La masse volumique des grains du milieu est de 2200 kg/m$^3$.

Calculez le coefficient de distribution du chrome dans le milieu, puis le coefficient de retard du transfert. En déduire le temps au bout duquel, sur le même filet de courant qu'en (5), la concentration de l'eau arrivant au puits sera de 10% de la concentration dans la rivière.

7) Une partie seulement de l'eau pompée provient de la rivière. Même si, après un temps très long, tous les filets de courant venant de la rivière au puits étaient pollués intégralement, la concentration de l'eau pompée serait inférieure à celle de la rivière. En fonction de vos réponses à la question (2), donnez le facteur de dilution correspondant.

**Planche 1**

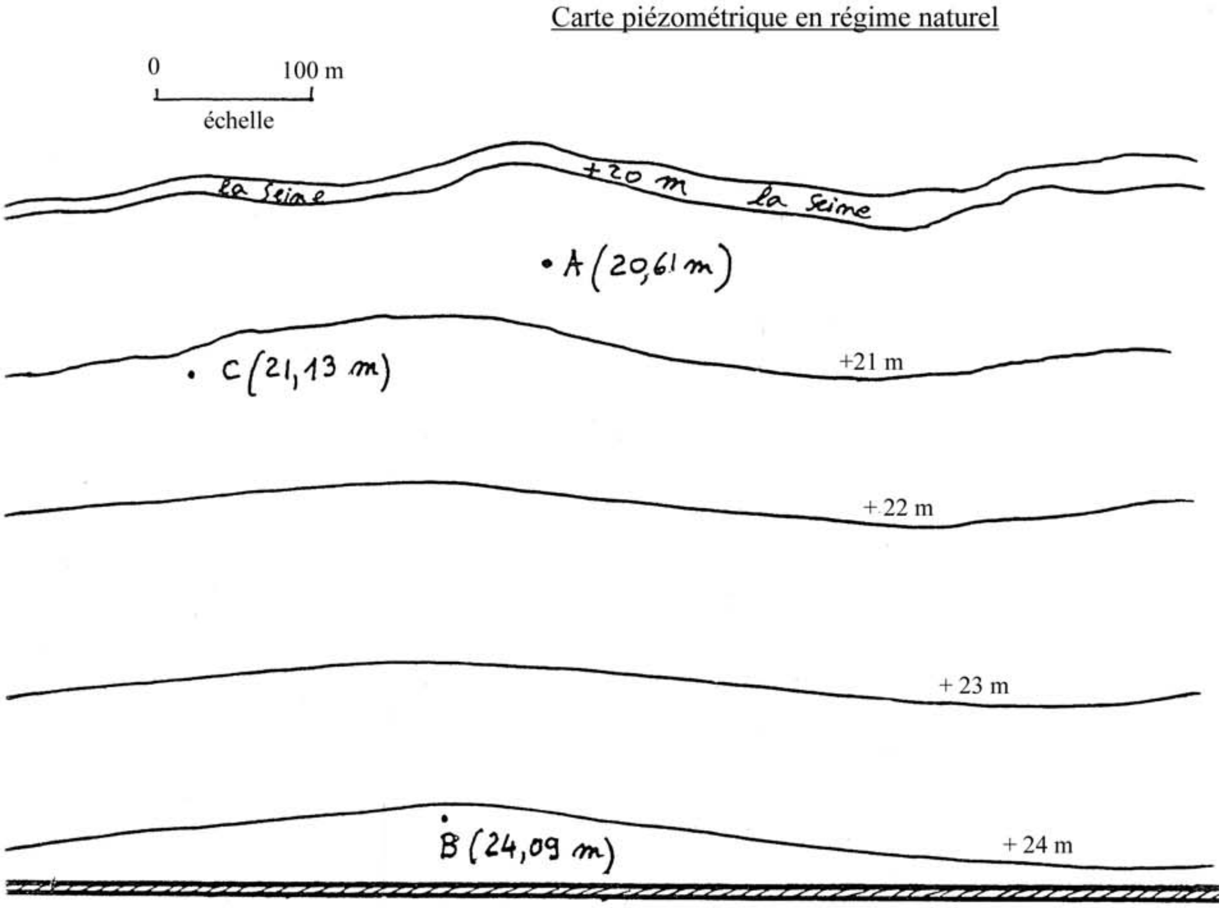
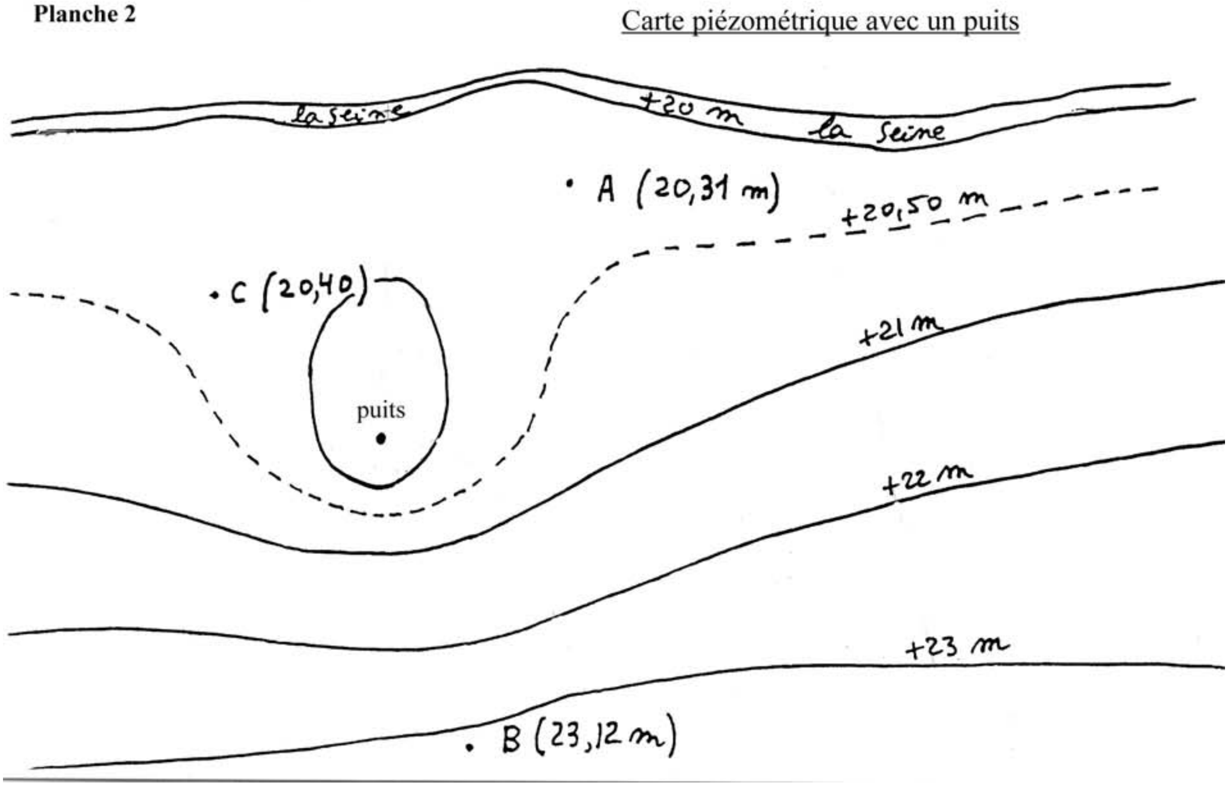
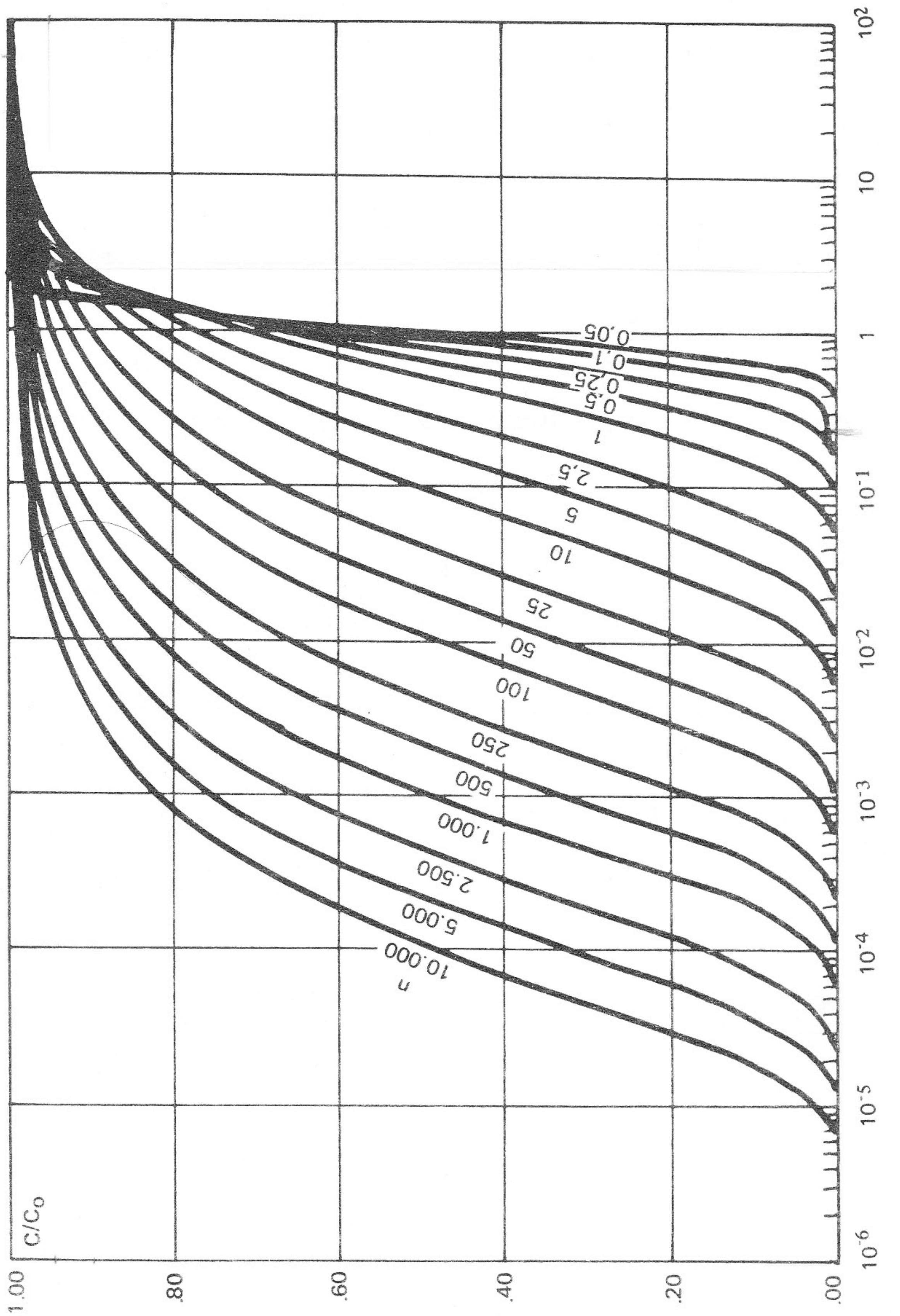



**Planche 2**

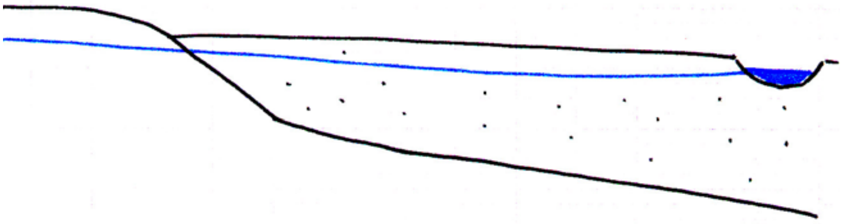





*Solution mono dimensionnelle de l'équation de dispersion*

**Problème 3 : Risque de pollution des pompages dans une nappe**
**Corrigé**

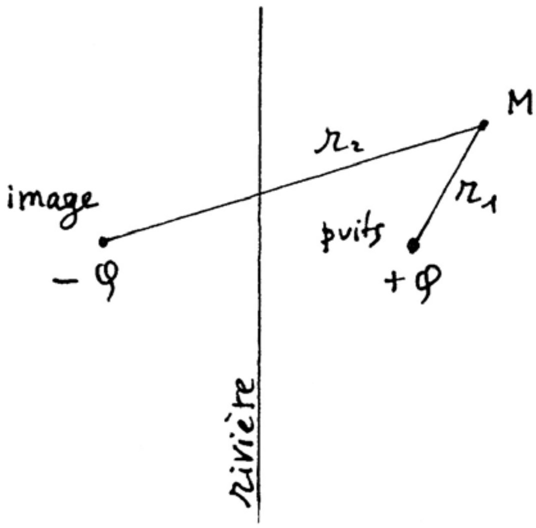
**Question 1 :**
La nappe est limitée par une rivière formant une limite à potentiel imposé. On suppose que l'on est en régime permanent.

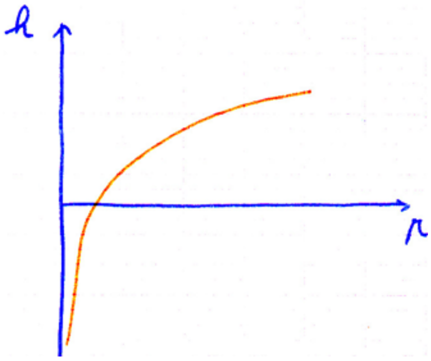


Ce système est équivalent à un milieu infini avec un puits image (symétrique du puits réel) injectant le même débit Q dans l'aquifère. Le rabattement $s_M$ est donné, en régime permanent, en un point quelconque M, par :

$$s_M = \frac{Q}{2\pi Ke} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

*r* : distances aux 2 puits.
*Q* : débit
*K* : perméabilité
*e* : épaisseur de l'aquifère.



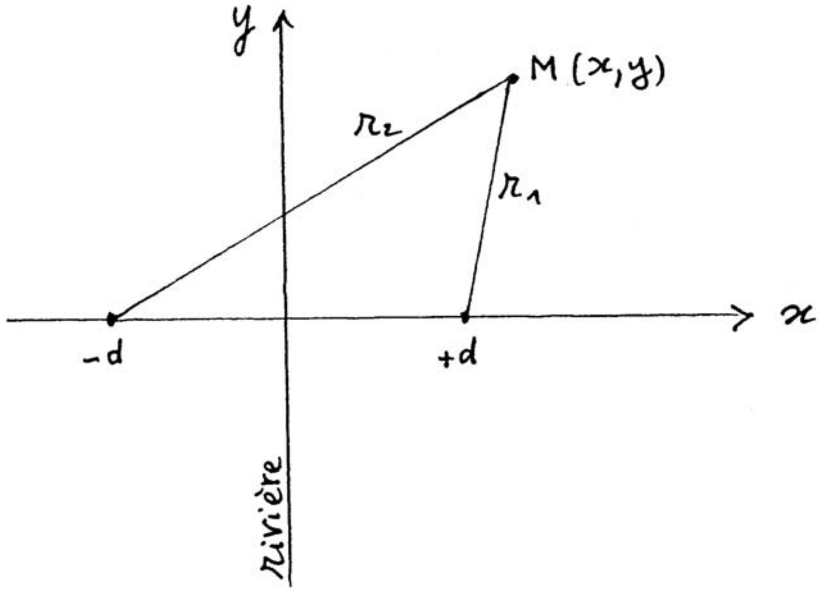

Pour les piézomètres A, B et C, en retranchant les hauteurs piézométriques lues entre les états 2 et 1, on calcule les rabattements suivants : $s_A = 0.30$ m; $s_B = 0.97$ m, $s_C = 0.73$ m.

Avec une règle, on peut calculer les distances $r_2$ et $r_1$ pour chacun de ces piézomètres. On trouve : $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_A = 1.4$ ; $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_B = 3.0$ ; $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)_C = 2.3$

On peut vérifier que $\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{s}$ est à peu près constant (égal à 1.12, 1.13, et 1.14 pour A, B, C respectivement)

Par conséquent on peut calculer la transmissivité $T = Ke = 5.03 \times 10^{-3} m^2 / s$

**Question 2 :**
Prenons le système d'axe donné par le schéma suivant :




En l'absence de pompage, la planche 1 montre que l'écoulement est uniforme vers la rivière, avec un gradient à peu près constant que l'on peut évaluer à 1 %. On peut donc décrire la charge par l'expression *h(x) = ax + b*, avec $a = 10^{-2}$.

Avec un pompage de débit *Q*, la charge dans la nappe sera la somme de l'écoulement naturel et du rabattement dû au puits, que nous avons donné dans la question (1).

$$h(x) = ax + b - \frac{Q}{2\pi T}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Exprimons *r* en coordonnées cartésiennes :

$$h(x) = ax + b + \frac{Q}{4\pi T}\ln\left(\frac{(d-x)^2 + y^2}{(d+x)^2 + y^2}\right)$$

Ici a>0, la pente de la charge hydraulique est donc positive. Pour calculer le flux s'écoulant éventuellement de la rivière vers la nappe, calculons le gradient de charge *dh/dx* pour appliquer la loi de Darcy :

$$\frac{dh}{dx} = a - \frac{Qd}{\pi T}\frac{d^2 - x^2 + y^2}{\left[(d-x)^2 + y^2\right]\left[(d+x)^2 + y^2\right]}$$

Le long de la rivière :

$$\left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=0} = a - \frac{Qd}{\pi T}\frac{1}{d^2 + y^2}$$

Le flux échangé entre la nappe et la rivière sera rentrant tant que $\frac{dh}{dx} < 0$ (en effet naturellement la pente de la charge est positive).

$$\frac{dh}{dx} < 0 \;\Rightarrow\; a - \frac{Qd}{\pi\, T}\frac{1}{d^2 + y^2} < 0$$

$$y^2 < \frac{Qd}{\pi\, aT} - d^2$$

$$-\sqrt{\frac{Qd}{\pi\, aT} - d^2} < y < \sqrt{\frac{Qd}{\pi\, aT} - d^2}$$

A.N. $Q =$ 250 $m^3/h = 6{,}94 \times 10^{-2}\ m^3/s$
$d =$ 200 m (sur la planche 2)
$T =$ 5 x $10^{-3}\ m^2/s$
$a =$ $10^{-2}$

soit -220 m < $y$ < 220 m

Il y a donc risque de pollution sur 440 m; ce risque aurait été nul si $Q < \pi\, T\, a\, d$.

**Question 3 :**
Le filet de courant le plus rapide est évidemment l'axe des $x$, pour lequel on a ($y = 0$) :

$$\frac{dh}{dx} = a + \frac{Qd}{\pi T}\frac{1}{(x+d)(x-d)}$$

La vitesse de pore sur ce filet de courant est donc :

$$v(x) = -\frac{K}{\phi}\frac{dh}{dx}$$

$$v(x) = -\frac{Ka}{\phi}\left(\frac{x^2 + d(Q/\pi Ta - d)}{x^2 - d^2}\right)$$

A.N. $T = 5 \times 10^{-3}\ m^2/s$, épaisseur 50 m
$K = 10^{-4}$ m/s
$a = 10^{-2}$
$\phi = 0.15$
$d = 200$ m
$Q = 6.94 \times 10^{-2}\ m^3/s$

$$v(x) = -6.67 \times 10^{-6}\frac{x^2 + 48363}{x^2 - 40000}\left(\frac{x^2 + d\ (Q/\pi Ta - d)}{x^2 - d^2}\right)$$

**Question 4 :**
A la vitesse *y(x)*, le temps $dt$ mis pour parcourir la distance $dx$ est $dx/v(x)$. Le temps total de parcours de la rivière au puits est donc :

$$t = \int_0^d \frac{dx}{v(x)} = -\frac{1}{b}\int_0^d \frac{x^2 - d^2}{x^2 + c^2}dx$$

$$t=-\frac{1}{b}\int_0^d \frac{\left(x^2+c^2\right)+\left(c^2-d^2\right)}{x^2+c^2}dx=-\frac{1}{b}\left[d-\int_0^d \frac{c^2+d^2}{x^2+c^2}dx\right]$$

Changement de variable $x = cy$.

$$t=-\frac{d}{b}+\frac{c^2+d^2}{bc}\int_0^{d/c}\frac{dy}{y^2+1}=-\frac{d}{b}+\frac{c^2+d^2}{bc}\arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$

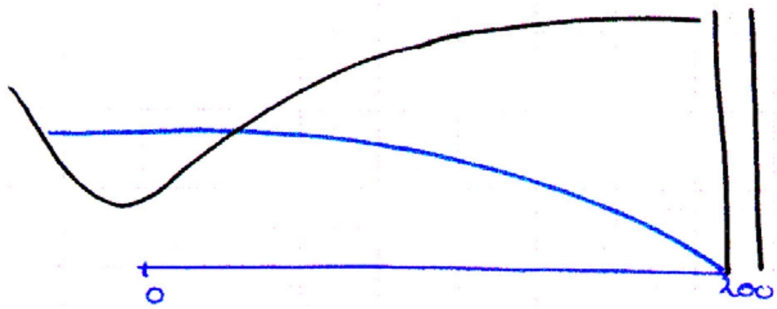
A.N : $d = 200$ m
$b = 6.67 \times 10^{-6}$ m/s
$c = 220$ m
$t = 1.45 \times 10^7$ sec = 167 jours (attention dans l'application numérique à bien calculer des radians dans l'arc tangente).

**Calcul approché discret**

Sans intégrer, on peut obtenir un ordre de grandeur du temps de parcours en calculant la vitesse et le temps de parcours en un nombre discret de points.

| abscisse $x_i$ | $v(x_i)$ | temps de $x_i$ à $x_{i+1}=(x_{i+1} - x_i)/v(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | $8.06 \times 10^{-6}$ | $6.20 \times 10^{6}$ |
| 50 | $9.05 \times 10^{-6}$ | $5.52 \times 10^{6}$ |
| 100 | $1.30 \times 10^{-5}$ | $3.84 \times 10^{6}$ |
| 150 | $2.70 \times 10^{-5}$ | $9.26 \times 10^{5}$ |
| 175 | $5.62 \times 10^{-5}$ | $3.50 \times 10^{5}$ |
| 195 | $2.91 \times 10^{-4}$ | $1.72 \times 10^{4}$ |
| 200 | - | cumul = $1.68 \times 10^{7}$ sec = 194 jours |

L'ordre de grandeur est donc correct.




**Question 5 :**

Vitesse moyenne équivalente $U=\dfrac{200}{1.45\times10^{-7}}$ = 1.38 $10^{-5}$ m/s.

Vitesse de Darcy $U = v\,.\,\phi = 2.07 \times 10^{-6}$ m/s.

La solution de l'équation monodimensionnelle de la dispersion, avec condition à la limite G = C à l'amont, est :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{2}\left[ erfc\left(\frac{1-\xi}{2\sqrt{\xi\eta}}\right) + \exp\left(\frac{1}{\eta}\right) erfc\left(\frac{1+\xi}{2\sqrt{\xi\eta}}\right)\right]$$

Avec $\xi = \dfrac{Ut}{\omega Rx}$ et $\eta = \dfrac{D}{Ux} = \dfrac{\alpha_L U}{Ux} = \dfrac{\alpha_L}{x}$

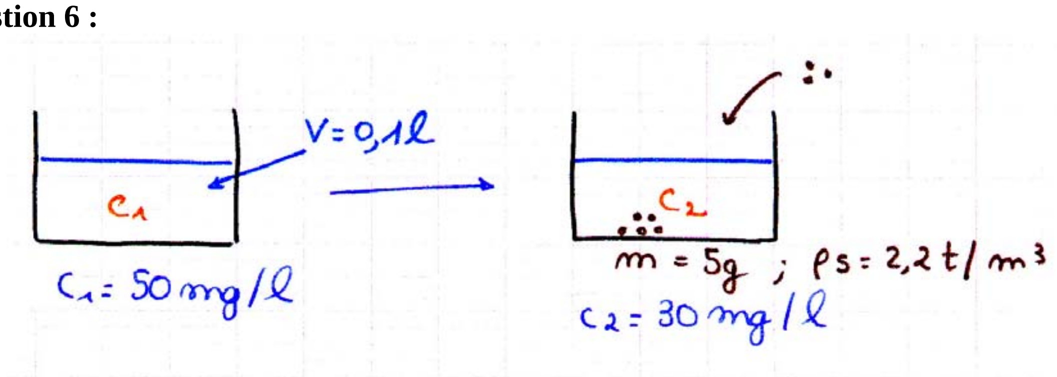
Cette solution est représentée graphiquement à la fin de l'énoncé. En calculant la valeur de $\eta$ = 20/200 = 0.1, on lit sur cette abaque que $\xi$ = 0.55 pour $C/C_0$ = 0.1. On en déduit :

$$t = \frac{\omega Rx\xi}{U}$$

Avec : $R$ = 1 (pas d'adsorption)
$\phi$ = 0.15
$x$ = 200 m
$U$ = 2.07 x $10^{-6}$ m/s

$t$ = 7.97 x $10^6$ secondes = 92 jours.

**Question 6 :**




Bilan masse dans le bécher :

$$C_1 V = C_2 V + mF_2$$

$C_i$ : concentration volumique dans le bécher.
$F$ : concentration massique adsorbée sur le solide

A.N. $C_1$ = 50 mg/l = 5 x $10^2$ kg/m$^3$
$C_2$ = 3 x $10^2$ kg/m$^3$
V = $10^{-4}$ m$^3$
m = 5 x $10^{-3}$ kg

$$F_2 = \frac{V(C_1 - C_2)}{m} = 2 \text{ x } 10^{-2} \text{ kg / kg}$$

Coefficient de distribution :

$$F_2 = K_d C_2 \rightarrow K_d = \frac{F_2}{C_2} = 0.0133 \text{ m}^3\text{ / kg}$$

Coefficient de retard :

$$R = 1 + \frac{1-\omega}{\omega}\rho_s K_d = 167.2$$

D'après la question (5), et en utilisant l'abaque

$$t_2 = \frac{\omega R d\xi}{U} = R t_1$$

$$t_2 = 45 \text{ ans}$$

En réalité, sur le champ captant, c'est $NH_4^+$ (ammoniac qui progresse). Il faut 20 ans environ pour que l'ammoniaque arrive au pompage. On pourrait essayer d'oxyder le $NH_4^+$ par des bactéries oxydantes. Le problème est que l'$O_2$ diffuse lentement dans le sol.

**Question 7 :**

Nous avons calculé en (2) le gradient de charge le long de la rivière, puis la longueur du front de rivière où ce flux est entrant. Le débit venant de la rivière sera simplement l'intégrale du flux sur cette portion de rivière.

$$\text{Flux } \phi = -T \left.\frac{dh}{dx}\right|_{x=0} = -aT + \frac{Qd}{\pi} \frac{1}{d^2 + y^2}$$

Débit total :

$$Q' = 2 \int_0^{Y0} \left( -aT + \frac{Qd}{\pi} \frac{1}{d^2 + y^2} \right) dy$$

Changement de variable $y = d\,.\,x$

$$Q' = -2ay_0 T + \frac{2Q}{\pi} \int_0^{Y0/d} \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$Q' = -2ay_0 T + \frac{2Q}{\pi} Arc\tan\left(\frac{y_0}{d}\right)$$

A. N. : $a = 10^{-2}$

$y = 220$ m

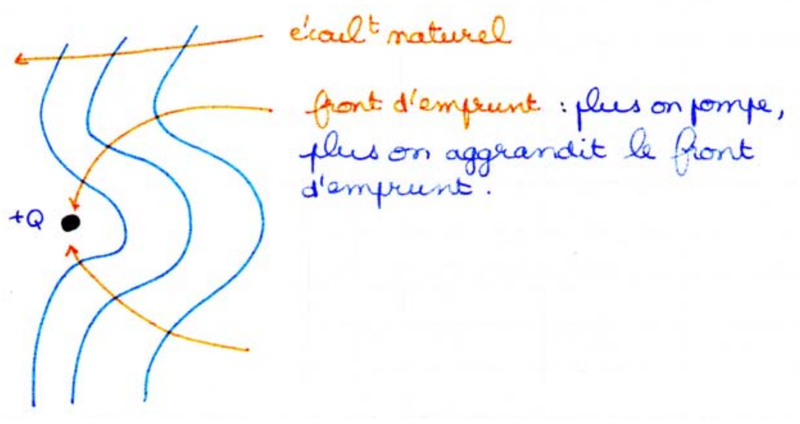
T = $5 \times 10^{-3}$ $m^2/s$

Q = $6.94 \times 10^{-2}$ $m^3/s$

Q' = $1.48 \times 10^{-2}$ $m^3/s$

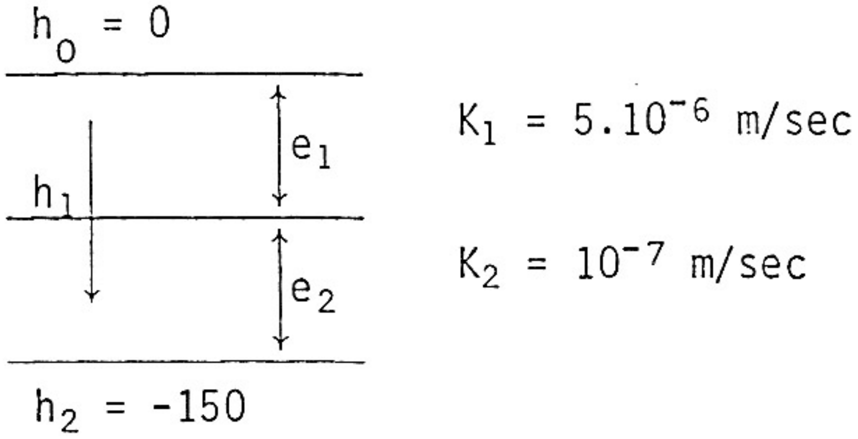
Soit Q' / Q= 0,21

Il n'y a que 21 % de l'eau pompée par le puits qui vienne de la rivière; le facteur de dilution est donc proche de cinq.



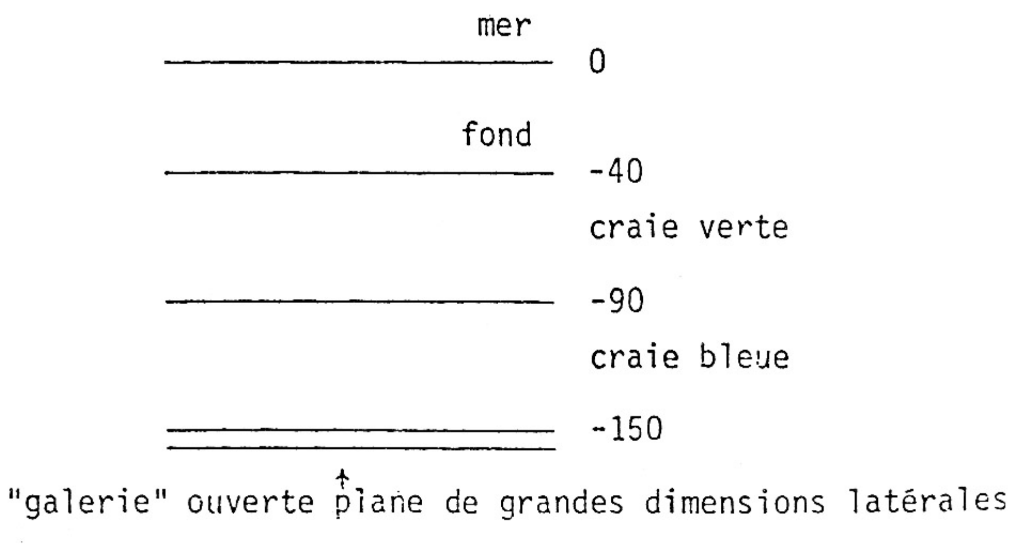
## Problème 4: Problème du tunnel sous la Manche
## (Exercice tiré du DEA d'hydrogéologie, cours de G. de Marsily)

Nous allons étudier les problèmes hydrauliques posés par la construction du tunnel sous la Manche. Nous étudierons la section verticale suivante, lors du creusement. Le tunnel est creusé à 150 mètres de profondeur sous le niveau de la mer. Les roches traversées sont composées d'une épaisseur $e_1$ de craie verte et d'une épaisseur $e_2$ de craie bleue. Ces deux roches ont des perméabilités différentes $K_1$ et $K_2$.




La galerie du tunnel a 5 mètres de diamètre. Lors du creusement, la galerie communique par une extrémité avec l'atmosphère. Nous supposerons la craie bleue illimitée vers le bas.

*Question 1:* Il existe un fort contraste (50) de perméabilité entre la craie verte et la craie bleue. Pour vous rendre compte de l'influence de ce contraste, calculez la distribution de la charge hydraulique, en régime permanent, entre la mer et l'axe du tunnel à l'aide d'une approximation simple: on supposera que le tunnel est remplacé par une "ouverture" plane horizontale de grandes dimensions (voir schéma ci-dessous).
Donnez en particulier la charge aux cotes -40, -90 et –150 mètres.



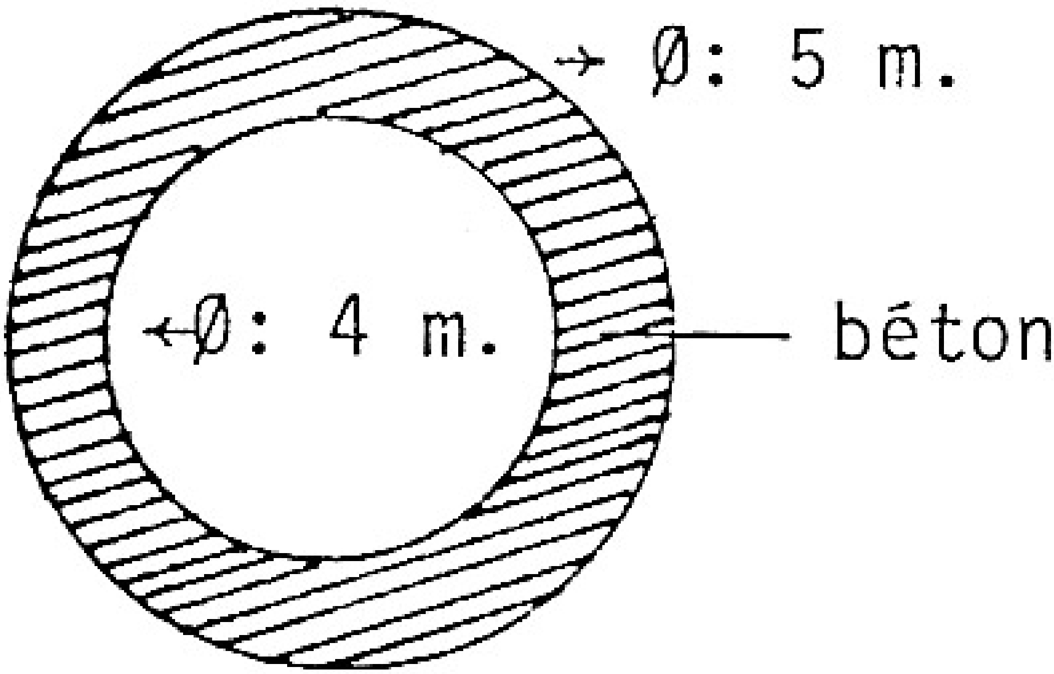

*Question 2:* En fonction des résultats ci-dessus, calculez une expression analytique approchée

de la répartition de la charge hydraulique en régime permanent autour de la galerie réelle circulaire. En déduire le débit entrant dans la galerie par kilomètre creusé. Vous serez amenés à faire plusieurs approximations, citez-les.

*Question 3:* Calculez une expression analytique approchée de la poussée d'écoulement et donnez sa valeur numérique pour le point de la galerie où elle est maximum. La poussée d'écoulement est la force volumique $f$ (c'est un vecteur):

$$\vec{f} = -\rho g \cdot \overrightarrow{grad}(h)$$

*Question 4:* Une fois terminées, les galeries ont été revêtues d'un parement en béton de 0,50 mètre d'épaisseur:




Si on admet une perméabilité du béton de $5.10^{-10}$ m/sec, calculez dans le cas de la galerie unique:

- l'expression analytique approchée de la charge dans le béton et au voisinage de la galerie,
- le débit drainé par km.,
- la poussée d'écoulement dans le béton au point de la galerie où elle est maximum

*Question 5:* Le tunnel se compose en fait de deux galeries parallèles de même diamètre, à la même cote, d'entre axe 30 mètres (pour chaque sens de circulation). Calculez le débit arrivant dans ce cas dans chaque galerie avant revêtement.

## Problème 4: Le tunnel sous la Manche
## Corrigé

*Question 1*:

Choisissons un axe z orienté vers le haut, et ayant son origine au niveau de la mer. En se décalant de la pression atmosphérique, on peut donc prendre une charge dans la mer :

$$h=0$$

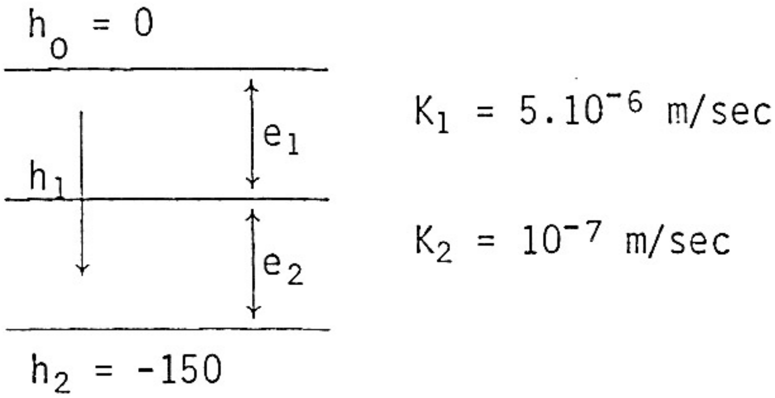
Au fond de la mer, à la cote -40, la charge est la même: la condition à la limite y est donc

$$h=0\,.$$

Dans la galerie, on impose l'existence de la pression atmosphérique que nous avons prise nulle. La charge y est donc:

$$h=\frac{p}{\rho g}+z=-150\ \mathrm{m}\ \text{car}\ p=0.$$

Cette charge est donc la 2ème condition à la limite dans l'ouverture horizontale. On a donc à résoudre le problème à une dimension:




A la traversée de l'interface entre les deux craies, la charge $h$ est la même. On va écrire la conservation des flux, ou des vitesses, traversant chaque tranche de craie:

Vitesse dans la craie 1 = $-K_1\dfrac{h_0-h_1}{e_1}$ (loi de Darcy)

Vitesse dans la craie 2 = $-K_2\dfrac{h_1-h_2}{e_2}$ (loi de Darcy)

En égalisant ces vitesses, on calcule $h_1$:

$$h_1\left(\frac{K_1}{e_1}+\frac{K_2}{e_2}\right)=\frac{K_1\,h_0}{e_1}+\frac{K_2\,h_2}{e_2}$$

$$h_1=-\frac{150\times10^{-7}}{60\left(\dfrac{5\times10^{-6}}{50}+\dfrac{10^{-7}}{60}\right)}=-2.46\ \mathrm{m}$$

La charge varie donc linéairement de 0 à -2,46 mètres dans la craie 1, et de -2,46 à -150 mètres dans la craie 2.

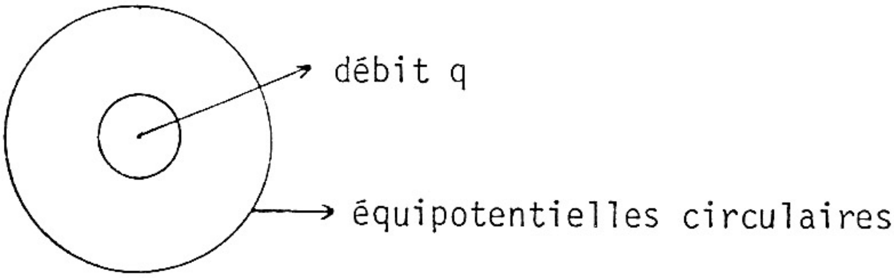
On est donc amené à conclure que la charge imposée à 0 m sur le fond de la mer est à très peu de chose près reportée au toit de la craie 2 à –90 mètres du fait de la forte perméabilité relative de la craie verte. Nous supposerons donc dans la suite une condition à la limite h = 0 à la cote –90 mètres.

*Question 2*:

On sait qu'une solution de l'équation de Laplace en régime permanent dans un milieu infini homogène est la solution élémentaire radiale:

$$h=\frac{q}{2\pi K}\ln(r)+C$$

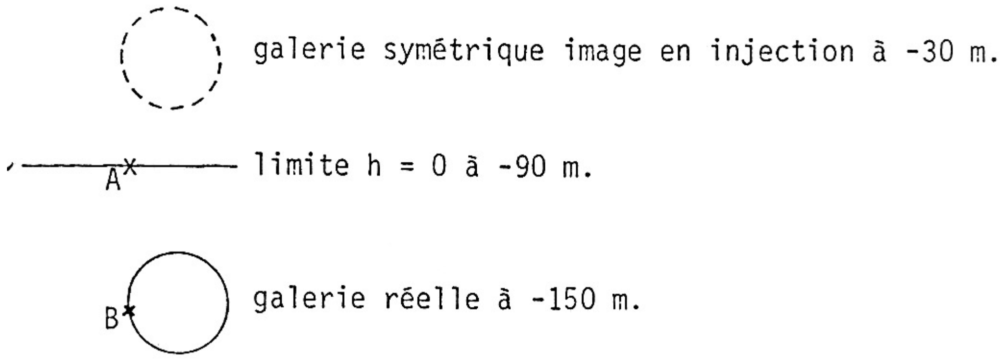
$q$ étant le débit prélevé (ou injecté) à l'intérieur d'une équipotentielle circulaire formant une limite intérieure du milieu (cas du puits circulaire) pour une tranche aquifère d'épaisseur unité et $C$ étant une constante d'intégration.




Ici, la galerie circulaire n'est pas exactement une équipotentielle: c'est la pression atmosphérique qui est partout imposée, et la charge dans la galerie varie avec la cote autour de -150 mètres ± 2.50 mètres.

Nous négligerons cette variation de charge et admettrons que la galerie circulaire est à la charge -150 mètres. Nous utiliserons donc la solution analytique logarithmique ci-dessus.

Maintenant, pour représenter la limite plane infinie à -90 mètres (toit de la craie bleue) à la charge imposée 0, on sait qu'il suffit de superposer à la solution analytique du milieu infini la solution analytique représentant une galerie image symétrique de la première par rapport à la limite, et fonctionnant en injection:




La solution analytique de notre problème s'écrira donc:

$$h=\frac{q}{2\pi K}\ln(r)-\frac{q}{2\pi K}\ln(R)+C$$

où:

$r$ est la distance au centre de la galerie réelle
$R$ est la distance au centre de la galerie fictive symétrique
$q$ est le débit drainé par mètre de galerie.

On va identifier la constante et le débit en écrivant cette équation à la cote -90 mètres, où $h$ = 0 et à la cote -150 mètres (sur le pourtour de la galerie) où $h$ = -150 mètres (points A et B du dessin).

En $A$, $r = R = 60$ mètres, h = 0 → $C = 0$.
En $B$, $r = 2{,}5$ mètres, $R = 120$ mètres, $h = -150$ mètres, soit:

$$q = \frac{2\pi Kh}{Log\left(\frac{r}{R}\right)} = -\frac{2\pi \times 150x10^{-7}}{2.3\log(\frac{2.5}{120})} = 0.024 \text{ l/sec/m.}$$

soit 24 1/sec, ou 86 $m^3$/h, par kilomètre de galerie.

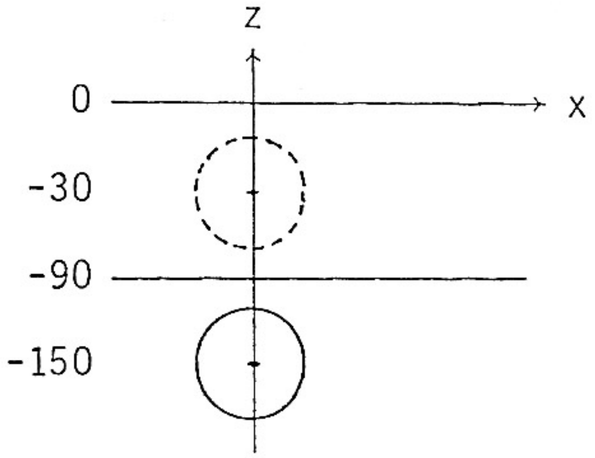
Approximation:

- On a supposé le potentiel fixé à –90 mètres en négligeant la perte de charge dans la craie verte.
- On a négligé la variation de la charge à l'intérieur de la galerie.
- De plus, en ajoutant une image fictive symétrique, on perturbe encore un peu plus la charge sur le pourtour de la galerie (elle n'est plus exactement constante, comme le montre la solution analytique: $r$ est constant, mais pas $R$).

*Question 3*:
Par définition, la poussée d'écoulement est la force volumique $f$ (c'est un vecteur):

$$\vec{f} = -\rho g \cdot \overrightarrow{grad}(h)$$

On rappelle que le gradient ($\overrightarrow{grad}(h)$) en deux dimensions, dans un repère $x$-$z$ est égal à $\begin{pmatrix} dh/dx \\ dh/dz \end{pmatrix}$. La force $f$ est colinéaire et orientée de même sens que le vecteur vitesse. Si nous voulons exprimer les composantes de cette force dans un repère $x$-$z$:




Il vient, en utilisant et en transformant la solution analytique de la charge trouvée plus haut:

$$h = \frac{q}{2\pi K}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$h = \frac{q}{4\pi K}\ln\left(\frac{x^2 + (z+150)^2}{x^2 + (z+30)^2}\right)$$

$$\frac{dh}{dx}=\frac{q}{4\pi K}\left(\frac{x^2+(z+30)^2}{x^2+(z+150)^2}\right)\left(\frac{2x\left[(z+150)^2-(z+30)^2\right]}{\left[x^2+(z+30)^2\right]^2}\right)$$

$$f_x=-\rho g\frac{dh}{dx}=-\frac{\rho g q}{2\pi K}\frac{x\left[(z+150)^2-(z+30)^2\right]}{\left[x^2+(z+150)^2\right]\left[x^2+(z+30)^2\right]}$$

$$f\ =-\rho g\frac{dh}{dz}=-\frac{\rho g q}{2\pi K}\frac{(z+150)\left[x^2+(z+30)^2\right]-(z+30)\left[x^2+(z+1500)^2\right]}{\left[x^2+(z+150)^2\right]\left[x^2+(z+30)^2\right]}$$

Le point où cette poussée est maximum est bien sûr celle où le gradient de charge est maximum: c'est évidemment au fait de la galerie, là où la ligne de courant jusqu'au fond de la mer est la plus courte:
C'est le point $x = 0, z = -147{,}5$ mètres.
Il vient:

$$f_x = 0$$

$$f_z=-\frac{\rho g q}{2\pi K}\frac{(2.5)(13806.25)+(117.5)(6.25)}{(6.25)(13806.25)}$$

$$f_z=-0.39\frac{\rho g q}{2\pi K}$$

Remplaçons $q$ par sa valeur analytique (plutôt que numérique):

$$q=\frac{2\pi K h}{Log\left(\frac{r}{R}\right)}$$

$$f_z=-0.39\frac{\rho g h}{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}$$

avec:
$h$ = -150 mètres
$r$ = 2.5 mètres
$R$ = 120 mètres

Ce qui montre en passant que la poussée d'écoulement est indépendante du débit et de la perméabilité du milieu, mais ne dépend que de la géométrie de l'écoulement.

Numériquement, avec $\rho = 10^{-3}$ kg/m$^3$ (pour l'eau) on obtient $f_z = 10^{-4}$ Newton/m$^3$.

*Question 4*:
Revenons au cas de la galerie unique de diamètre 5 mètres. La solution analytique était;

$$h=\frac{q}{2\pi K}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Cette solution nous donne une équipotentielle circulaire à la distance $r$ = 2,50 mètres. Si nous admettons que l'écoulement est également radial dans le béton, et que le cercle interne de la galerie ($r$ = 2 mètres) est une équipotentielle à la charge –150 mètres, la solution de l'écoulement dans le béton est également logarithmique:

$$h=\frac{q}{2\pi K'}\ln\left(\frac{r'}{2.50}\right)+C\,,\ 2<r'<2.50$$

K': perméabilité du béton.

Hors du béton, la solution initiale est conservée. Calculons le débit $q$ et la constante $C$:

1) pour $r'$ = 2 mètres, h' =-150, $C = -150 - \frac{q}{2\pi K'} \ln\left(\frac{2}{2.50}\right)$

2) pour $r'$ = 2.5 mètres, il y a égalité de la charge (et du débit) dans le béton et dans la craie:

$$h = h' - \frac{q}{2\pi K} \ln\left(\frac{2.50}{120}\right) = \frac{q}{2\pi K'} \ln\left(\frac{2.50}{2.50}\right) - 150 - \frac{q}{2\pi K'} \ln\left(\frac{2}{2.50}\right)$$

d'où:

$$q = \frac{2\pi \times 150}{\frac{1}{K} \ln\left(\frac{2.50}{120}\right) + \frac{1}{K'} \ln\left(\frac{2}{2.50}\right)}$$

$q$ = 0,00197 l/sec/m soit $q \sim 2$ l/sec/km.

Notons que la charge sur le pourtour de l'anneau de béton vaut:

$$h = \frac{q}{2\pi K} \ln\left(\frac{r}{R}\right) = -12 \text{ mètres}$$

L'essentiel de la perte de charge a lieu dans le béton.
Calculons la poussée d'écoulement dans le béton:

$$h' = \frac{q}{2\pi K'} \ln\left(\frac{r'}{2.50}\right)$$

En nous plaçant directement sur la verticale en voûte de la galerie, nous pouvons dériver directement par rapport à r':

$$f = -\rho g \frac{dh'}{dz} = -\frac{\rho g q}{2\pi K'} \frac{2.50}{r'}$$

pour $r$ = 2.50 mètres, $f_z$ = -510.10$^{-4}$ Newton/m$^3$
pour $r$ = 2 mètres, $f_z$ = -636.10$^{-4}$ Newton/m$^3$

N.B. Puisque le potentiel est supposé à symétrie radiale dans le béton, la poussée de l'écoulement l'est aussi.

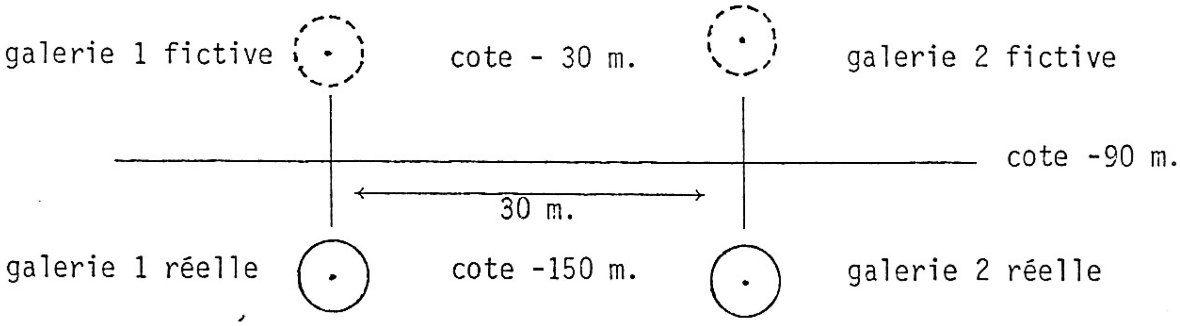
*Question 5*: Tunnel avec deux galeries
Nous connaissons la solution analytique du problème du milieu semi-infini avec une galerie:

$$h = \frac{q}{2\pi K} \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Nous obtiendrons la solution du problème à deux galeries réelles en superposant deux solutions analytiques identiques:

$$h = \frac{q}{2\pi K} \ln\left(\frac{r}{R} \frac{r'}{R'}\right) + C$$

les distances $r'$ et $R'$ étant celles du point considéré respectivement au centre de la deuxième galerie réelle et de la deuxième galerie symétrique fictive:




Identifions constante et débit:

- pour la limite à la cote -90 mètres, $r = R$ et $r' = R'$. Comme $h = 0$, la constante est nulle.
- à l'intérieur d'une galerie réelle:
  $h$ = -150 mètres
  $r$ = 2,5 mètres $\quad$ $R$ = 120 mètres
  $r'$ = 30 mètres $\quad$ $R'$ = 124 mètres

$$q = \frac{2\pi Kh}{\ln\left(\frac{r}{R}\frac{r'}{R'}\right)}$$

$q$ = 0,018 l/sec/m, soit 18 *l*/sec/km. dans chaque galerie. On a cependant négligé les variations de charge entraînées sur le pourtour de la galerie 1 par la galerie 2, quand on a superposé les solutions analytiques.