Université IBN ZOHR

Faculté des Sciences Juridiques, Economiques et Sociales
Centre universitaire de Guelmim

Filière : Sciences économiques

Eléments de corrigé des séries d'exercices

Matière : Microéconomie I

Semestre 1

Professeur: Hassan REHAIMI

Année universitaire: 2014/2015

Série d'exercices n°1 de la Microéconomie (théorie des choix du consommateur rationnel).

Concepts et outils de base :

- Définissez les notions clés suivantes qui ont été vues en cours :

La microéconomie : étudie les décisions économiques (ou comportements ou choix) des agents économiques individuels tels que les ménages (les consommateurs) et les producteurs (l'entreprise ou la firme) ; ainsi que les interactions entre ces agents pour former des unités plus grandes, des marchés et des industries ;

La rationalité du consommateur : est à deux niveaux (l'objectif est d'atteindre l'optimum ou l'équilibre):

- Soit que le consommateur utilise son budget de manière à maximiser sa satisfaction ou l'utilité totale que lui procure la consommation des biens qu'il a choisis;
- Soit que le consommateur cherche à minimiser le revenu nécessaire pour atteindre un niveau de satisfaction prédéterminé ;

L'utilité cardinale : il s'agit d'une approche basée sur l'hypothèse de la mesurabilité de l'utilité ; c'est-à-dire que le consommateur peut nous dire le niveau de satisfaction procuré par la consommation d'un bien (par exemple, s'il boit un jus d'orange, ça lui procure une utilité de 11) ;

L'utilité ordinale : il s'agit d'une approche selon laquelle, on demande juste au consommateur de faire un classement entre les paniers des biens (combinaisons des quantités de plusieurs biens) qui lui sont offerts par ordre de préférence. On étudie donc, ici, les préférences du consommateur ;

L'utilité totale : est le niveau de satisfaction **global** procuré par la consommation d'un bien (par ex. le bien X) ;

L'utilité marginale : C'est le niveau de satisfaction procuré par la consommation d'une seule unité additionnelle du bien X ; Mathématiquement, on distingue entre deux cas :

- Un cas discret (cas des biens indivisibles) : c'est la variation de l'utilité totale par rapport à la variation de la consommation du bien X :

$$U_m = \frac{\Delta U_t(X)}{\Delta X}$$

- Un cas contenu (cas des biens divisibles) : c'est la dérivée de la fonction d'utilité totale par rapport à X :

$$U_m = (U_t(x))'_x$$

La loi de l'utilité marginale décroissante: cette loi a été introduit par le psychologue allemand GOSSEN (en 1843): « *elle signifie que l'utilité supplémentaire (l'utilité marginale) que procurent les unités successives consommées d'un bien diminue progressivement et devient nulle au point de satiété* ». Ce **point de satiété** ou de saturation est un point au delà duquel toute consommation additionnelle du bien X ne procure aucune utilité supplémentaire. C'est à partir de ce point que l'utilité marginale devient négative ;

La courbe d'indifférence (ou d'iso-satisfaction) est la courbe qui joint l'ensemble des combinaisons des biens X et Y qui procure au consommateur le même niveau de satisfaction. Si l'on représente plusieurs niveaux de satisfaction, on obtient une **carte d'indifférence** ;

La non-saturation des préférences du consommateur signifie que le consommateur cherche toujours à consommer plus de chaque bien ou d'au moins un des deux biens. Autrement dit, le consommateur cherchera toujours à s'éloigner de l'origine des axes (X et Y) pour maximiser son niveau d'utilité ;

Les compléments parfaits : ce sont des biens qui sont toujours consommés ensemble dans des proportions fixes. Leurs courbes d'indifférence sont par conséquent en forme de L. Un exemple typique est celui des souliers droits et des souliers gauches ;

Les substituts parfaits : ce sont des biens où le consommateur est disposé à substituer un bien à l'autre à un taux constant. Par conséquent, le TMS_{xy} est constant tout au long des courbes d'indifférence et les courbes d'indifférences sont des droites linéaires et décroissantes. Par exemple, le choix entre des crayons rouges et des crayons bleus ;

Le taux marginal de substitution : il mesure la quantité du bien Y (ΔY) que le consommateur doit abandonner (céder) pour acquérir une plus grande quantité de X (ΔX), ceci dans le but de rester sur la même courbe d'indifférence.
Par définition:

- Mathématiquement : $TMS_{X\grave{a}Y} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{\partial Y}{\partial X}$
- Economiquement: $TMS_{X\grave{a}Y} = \frac{Um(X)}{Um(Y)} = \frac{f'_X(X,Y)}{f'_Y(X,Y)}$

Les hypothèses qui sous tendent la relation de préférence, sont au nombre de trois:

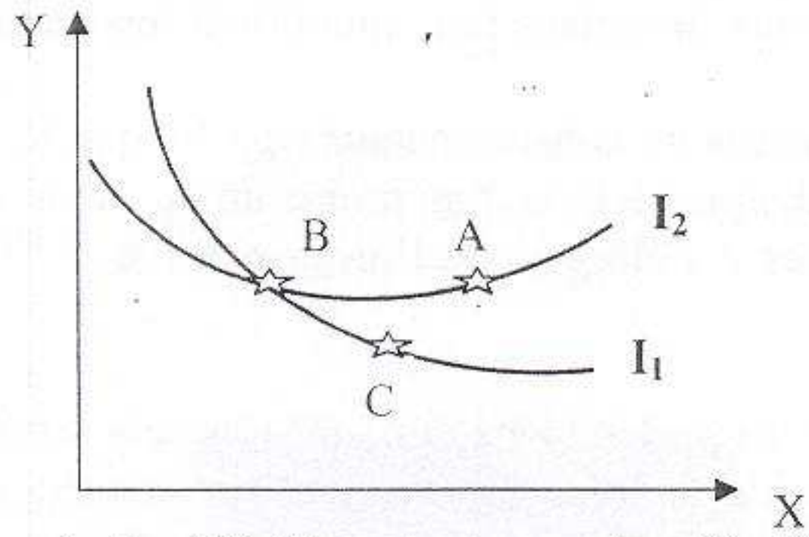
- La relation de préférence est une relation **complète**, c'est-à-dire que le consommateur est capable de clairement classer n'importe quels deux paniers qu'on lui propose.
- La relation de préférence est **réflexive**, c'est-à-dire Quand on lui présente deux fois le même panier, le consommateur est parfaitement capable d'en rendre compte.
- La relation de préférence est **transitive :** Quelque soit A, B et C trois paniers quelconques ; *A est préféré par rapport à B et B est préféré par rapport C ⇒ A est préféré par rapport à C.* Autrement dit, les préférences sont suffisamment cohérentes.

La droite du budget : est la droite qui joignent l'ensemble des combinaisons (X,Y) qui épuisent la totalité du budget du consommateur. Son équation est : $y = -(Px/Py).x + (R/Py)$;

L'ensemble budgétaire ou **la zone des choix possibles** du consommateur : se sont les combinaisons (paniers) des biens X et Y dont la dépense est inférieure ou égale au revenu ($X.Px + Y.Py \leq R$) ;

- Montrer pourquoi deux courbes d'indifférence ne se coupent jamais ?

Démontrons ceci par l'absurde. Supposons que deux courbes d'indifférence se coupent :



Premièrement, d'après la définition de la courbe d'indifférence (c'est la courbe qui joint l'ensemble des paniers des biens X et Y ayant le même niveau d'utilité), on aura :
Pour la courbe d'indifférence I_1 : $U_B = U_C$
Pour la courbe d'indifférence I_2 : $U_B = U_A$
D'après la relation de transitivité, on aura donc : $U_C = U_A$

Deuxièmement, d'après l'hypothèse de non saturation des préférences du consommateur (plus on s'éloigne de l'origine des axes, plus le niveau d'utilité augmente), on aura : $U_C < U_A$

Il s'agit là de deux résultats contradictoires, ce qui est impossible. Donc, il n'y aura jamais intersection entre deux courbes d'indifférence.

- Expliquez la décroissance du TMS le long d'une courbe d'indifférence.

Au haut de la courbe d'indifférence, nous avons le bien Y est abondant alors que le bien X est rare ($\Delta Y > \Delta X$), lorsqu'on descend tout au long de la courbe d'indifférence (on échange les quantités de Y contre celles de X), on constate que le bien Y devient rare et le bien X devient abondant ($\Delta Y < \Delta X$). Ceci, donc, explique pourquoi le TMS ($-\Delta Y/\Delta X$) est décroissant le long d'une courbe d'indifférence ;

- Si le consommateur est en dessous de sa droite budgétaire (et non sur cette droite), c'est que : a) il ne dépense pas tout son revenu.

Applications :

Application n° 1 :

1- Les utilités marginales :

* Pour la fonction d'utilité $U = f(X,Y) = X^{1/4} Y^{1/4}$

$$U_m(X) = f'_x(X,Y) = (X^{1/4} Y^{1/4})'_x = \frac{1}{4} Y^{1/4} X^{1/4 - 1}$$
$$= \frac{1}{4} Y^{1/4} X^{-3/4}$$

$$U_m(Y) = f'_y(X,Y) = (X^{1/4} Y^{1/4})'_Y = 1/4\, X^{1/4}\, Y^{1/4 - 1} = 1/4\, X^{1/4} Y^{-\frac{3}{4}}$$

* Pour la fonction d'utilité $U = f(X,Y) = a X^{\alpha} Y^{\beta}$

$$U_m(X) = f'_x(X,Y) = (a X^{\alpha} Y^{\beta})'_x = a \alpha X^{\alpha - 1} Y^{\beta}$$

$$U_m(Y) = f'_Y(X,Y) = (a X^{\alpha} Y^{\beta})'_Y = a \beta X^{\alpha} Y^{\beta - 1}$$

* Pour la fonction d'utilité : $U = f(X,Y) = X^{1/2} Y$

$$U_m(X) = f'_x(X,Y) = (X^{1/2} Y)'_x = 1/2\, X^{1/2 - 1} Y = \frac{1}{2} X^{-1/2} Y$$

$$U_m(Y) = f'_y(X,Y) = (X^{1/2} Y)'_Y = X^{1/2}$$

2- Le TMS_{XY} pour chacune de ces fonctions :

* Pour $U = f(X,Y) = X^{1/4} Y^{1/4}$

$$TMS_{XY} = \frac{U_m(X)}{U_m(Y)} = \frac{f'_x(X,Y)}{f'_y(X,Y)} = \frac{1/4\, X^{-3/4} Y^{1/4}}{1/4\, X^{1/4} Y^{-3/4}} = \frac{Y^{1/4} Y^{3/4}}{X^{1/4} X^{3/4}} = \frac{Y}{X}.$$

* Pour $U = f(X,Y) = a X^{\alpha} Y^{\beta}$

$$TMS_{XY} = \frac{U_m(X)}{U_m(Y)} = \frac{f'_x(X,Y)}{f'_y(X,Y)} = \frac{a \alpha X^{\alpha - 1} Y^{\beta}}{a \beta X^{\alpha} Y^{\beta - 1}} = \frac{\alpha Y^{\beta} Y^{\beta - 1}}{\beta X^{\alpha} X^{\alpha - 1}} = \frac{\alpha Y}{\beta X}.$$

* Pour $U = f(X,Y) = X^{1/2} Y$

$$TMS_{XY} = \frac{U_m(X)}{U_m(Y)} = \frac{f'_x(X,Y)}{f'_y(X,Y)} = \frac{1/2\, X^{-1/2} Y}{X^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{Y}{X^{1/2} X^{1/2}} = \frac{Y}{2X}.$$

Application n° 2 :

1- La représentation graphique des courbes d'indifférence pour un niveau d'utilité $U_1 = 4$ et $U_2 = 16$;

On doit d'abord déterminer leurs équations $Y = f(X)$

Nous avons $U = f(X, Y) = XY^2$

* Donc pour $U_1 = 4$, on a :

$$U = XY^2 = U_1 \Rightarrow XY^2 = 4 \Rightarrow Y^2 = \frac{4}{X} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{2}{\sqrt{X}}}$$

C'est l'équation de la courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité $U_1 = 4$.

Déterminons les coordonnées de quelques points appartenant à cette courbe à partir de son équation :

X	1	4	9	16
Y	2	1	2/3	1/2

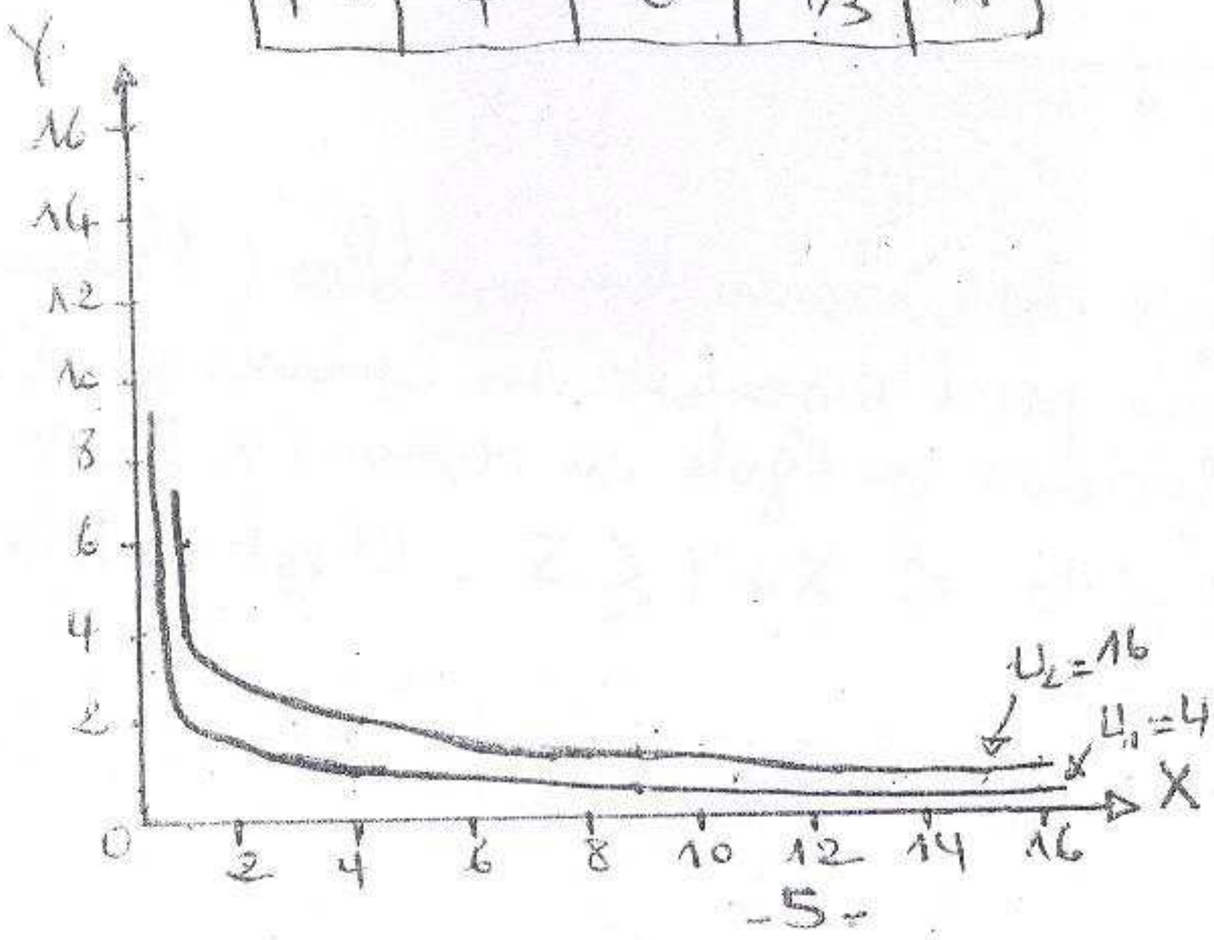
* Pour $U_2 = 16$, on a :

$$U = f(X, Y) = XY^2 = U_2 \Rightarrow XY^2 = 16 \Rightarrow Y^2 = \frac{16}{X} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{4}{\sqrt{X}}}$$

c'est l'équation de la courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité $U_2 = 16$:

Ainsi, Déterminons les coordonnées de quelques points appartenant à cette courbe à partir de son équation :

X	1	4	9	16
Y	4	2	4/3	1



2- Le TMS_{xy} avec $U = f(X,Y) = XY^2$

$$TMS_{xy} = \frac{U_m(X)}{U_m(Y)} = \frac{f'_x(X,Y)}{f'_y(X,Y)} = \frac{Y^2}{2XY^{2-1}} = \frac{Y^2}{2XY} = \frac{Y}{2X}.$$

Application n° 3 :

1- L'équation de la droite de budget :

Elle se définit par : $Y = -\frac{P_x}{P_y}X + \frac{R}{P_y}$

Nous avons : $P_x = P_y = 2$ et $R = 20$

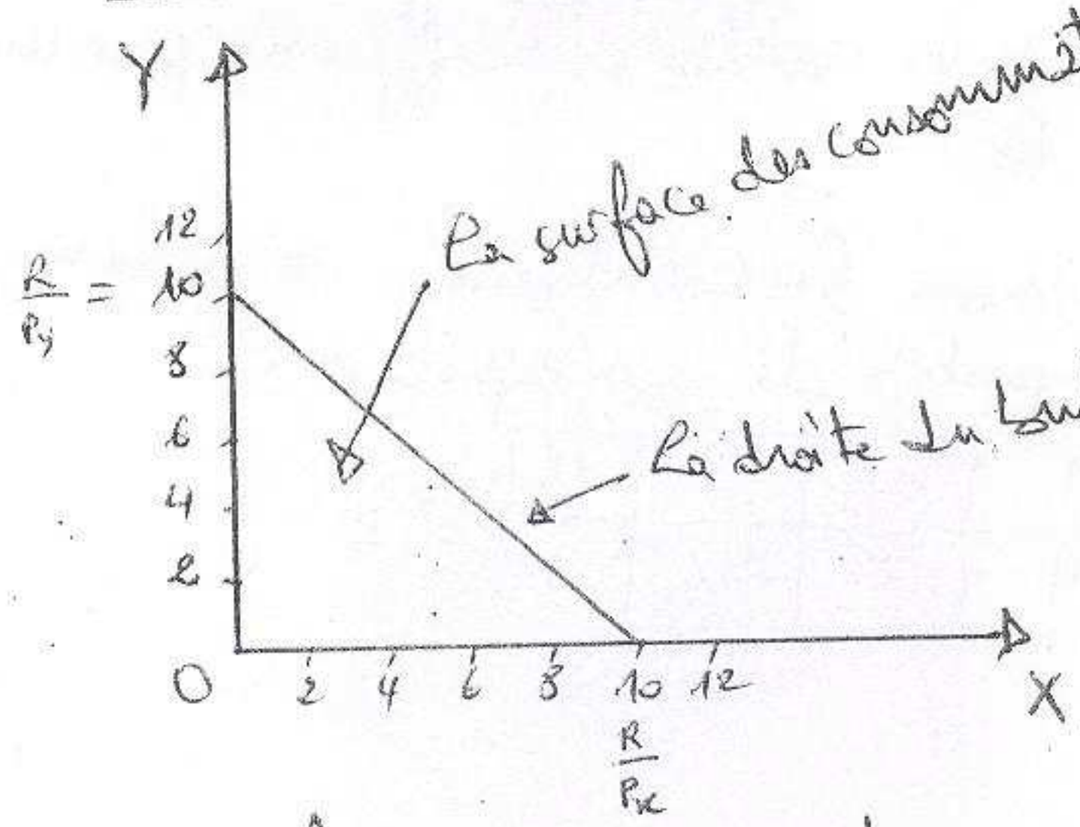
Donc $Y = -\frac{2}{2}X + \frac{20}{2} \Rightarrow \boxed{Y = -X + 10}$

C'est l'équation de la droite du budget du consommateur.

* La représentation graphique :

Pour la tracer, on doit déterminer les coordonnées de deux points, puisqu'il s'agit d'une droite linéaire et décroissante.

X	0	10
Y	10	0



2- La surface des consommations possibles (l'ensemble budgétaire)

Elle est déterminée par l'ensemble des combinaisons (X,Y) dont la dépense est inférieure ou égale au revenu ($X.P_x + Y.P_y \leq R$)

$\Rightarrow 2X + 2Y \leq 10 \Rightarrow X + Y \leq 5$. C'est le triangle $(0, \frac{R}{P_y}, \frac{R}{P_x})$

3. La variation de R :

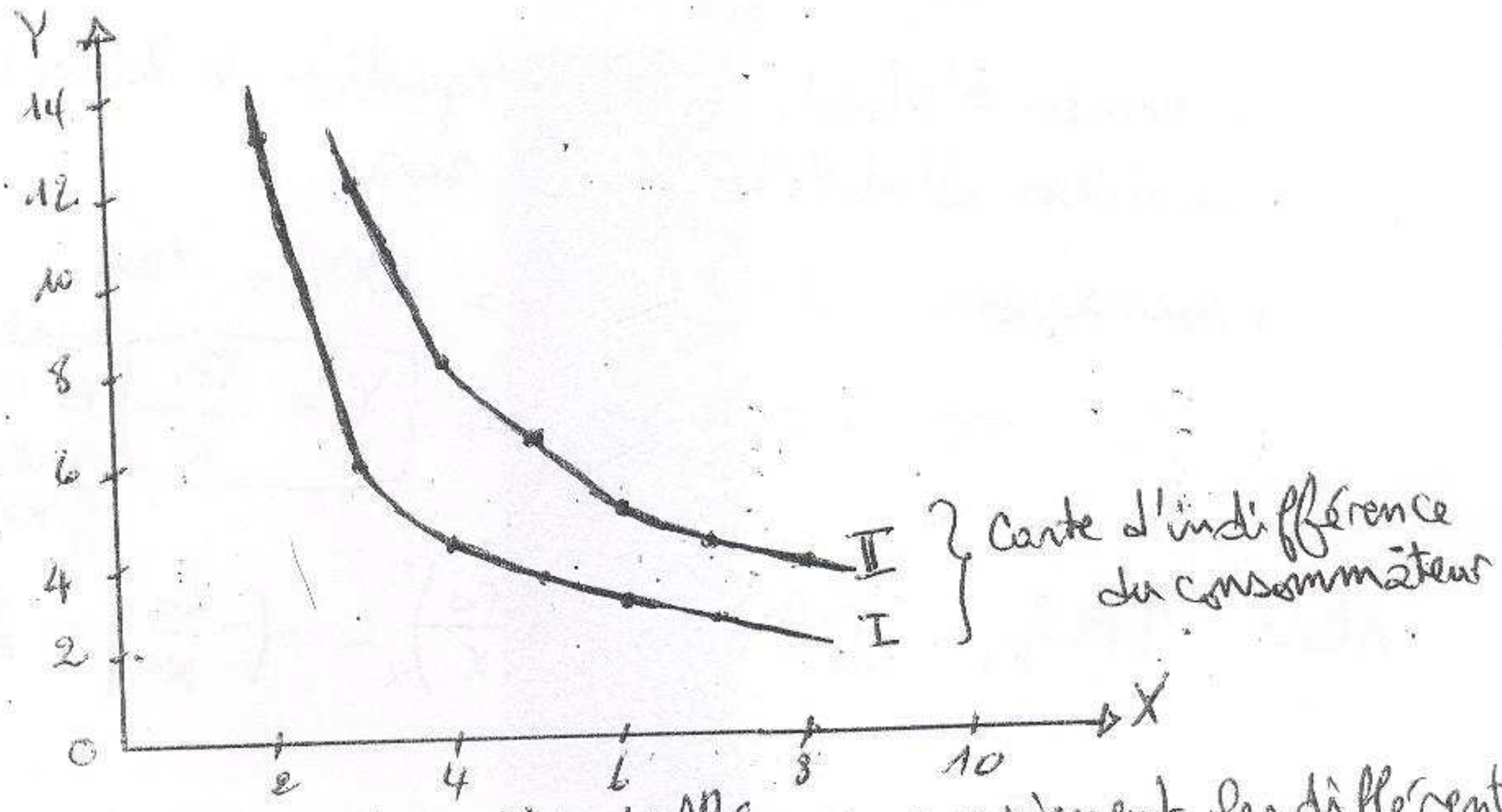
Si les prix restent constants ($P_x = P_y = 2$) et que le consommateur cherche à consommer 6 unités du bien X et 7 unités du bien Y, il lui faut un revenu de

$$X \cdot P_x + Y \cdot P_y = (6 \times 2) + (7 \times 2) = 12 + 14 = 26$$

Donc son revenu doit augmenter de 6 unités monétaires.

Application n° 4 :

1_ Les courbes d'indifférence I et II :



2_ Les courbes d'indifférence expriment les différents niveaux d'utilité du consommateur. Ce sont des courbes qui joignent les combinaisons ayant le même niveau d'utilité.

3_ Le TMS_{xy} à tous les points consécutifs des deux CI :

I			II		
X	Y	$TMS_{xy} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X}$	X	Y	$TMS_{xy} = \frac{-\Delta Y}{\Delta X}$
2	13	–	3	12	–
3	6	7 * ①	4	8	4 * ②
4	4,5	1,5	5	6,3	1,7
5	3,5	1	6	5	1,3
6	3	0,5	7	4,4	0,6
7	2,7	0,3	8	4	0,4

① * $TMS_{xy} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

$= -\frac{6-13}{3-2} = 7$

② $TMS_{xy} = -\frac{\Delta Y}{\Delta X} = -\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$

$= -\frac{8-12}{4-3} = 4$

Exercices :

Exercice 1 :

1- L'expression du TMS_{xy} au sens économique avec $U = f(x,y) = 2xy$

$$TMS_{xy} = \frac{Um(X)}{Um(Y)} = \frac{f'_x(X,Y)}{f'_y(X,Y)} = \frac{2Y}{2X} = \frac{Y}{X}$$

2- L'expression du TMS_{xy} au sens mathématique pour un niveau d'utilité fixé à 100 :

$$TMS_{xy} = -\frac{\partial y}{\partial x} = -(y(x))'_x$$

Déterminons d'abord, $y(x)$ l'équation de la courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité fixé à 100 :

Nous avons : $U = f(x,y) = 2xy = 100$

$$\Rightarrow Y = \frac{100}{2X} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{50}{X}}$$

c'est l'équation de la CI pour un niveau d'utilité fixé à 100.

Alors : $TMS_{xy} = -(y(x))'_x = -\left(\frac{50}{X}\right)'_x = -\left(-\frac{50}{X^2}\right) = \frac{50}{X^2}$

3- Les valeurs du TMS_{xy} pour $X = 20$, $X = 25$ et $X = 50$ en utilisant les deux méthodes :

$U = f(x,y) = 2xy = 100$			
X	20	25	50
$Y = \frac{50}{X}$	$\frac{50}{20} = 2,5$	2	1
(1) $TMS_{xy} = \frac{Um(X)}{Um(Y)} = \frac{Y}{X}$	$\frac{2,5}{20} = 0,125$	0,08	0,02
(2) $TMS_{xy} = -(y(x))' = \frac{50}{X^2}$	$\frac{50}{(20)^2} = 0,125$	0,08	0,02

(1) : Méthode n° 1 (expression économique du TMS_{xy})

(2) : Méthode n° 2 (Expression mathématique du TMS_{xy})

4_ La signification du $TMS_{xy} = 4$: Le consommateur pour garder le même niveau de satisfaction de 100 (ou rester sur la même courbe d'indifférence), doit renoncer 4 unités du bien Y pour avoir une unité supplémentaire du bien X.

5_ Les quantités d'équilibre : (la méthode du TMS_{xy} à l'équilibre)

Nous avons, d'après la question, $R = 200$, $P_x = 12$ et $P_y = 6$, donc on cherchera les valeurs de X et Y pour déterminer $U = ?$

Il s'agit là, d'un programme de maximisation pour le consommateur défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{Max } U = f(X,Y) = 2XY \\ \text{sous la contrainte} \\ R = 200 = X.P_x + Y.P_y = 12X + 6Y \end{cases}$$

À l'équilibre :

$$\begin{cases} TMS_{xy} = \dfrac{U_m(X)}{U_m(Y)} = \dfrac{f'_x(X,Y)}{f'_y(X,Y)} = \dfrac{P_x}{P_y} \\ R = 200 = 12X + 6Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Y}{X} = \dfrac{12}{6} \\ 200 = 12X + 6Y \end{cases}$$

D'après la première question

$$\Rightarrow \begin{cases} Y = 2X \quad (1) \\ 200 = 12X + 6Y \quad (2) \end{cases}$$

C'est la condition d'équilibre

On remplace (1) dans (2), on a :

$200 = 12X + 6Y = 12X + 6(2X)$

$\Rightarrow 200 = 12X + 12X = 24X \Rightarrow X^* = \dfrac{200}{24} = 8{,}33$

et $Y^* = 2X^* = 2(8{,}33) = 16{,}66$.

Donc les quantités à consommer à l'équilibre sont 8,33 unités pour le bien X et 16,66 unités pour le bien Y.

6_ Le niveau d'utilité maximal obtenu :

$U_{max} = f(X^*, Y^*) = 2X^*Y^* = 2(8{,}33 \times 16{,}66) = 277{,}55$

Pour un niveau de revenu de 200, sachant que $P_x = 12$ et $P_y = 6$, le consommateur atteindra un niveau d'utilité maximal de 277,55.

Exercice 2 : (Série d'exercice n° 1)

1 - * Les quantités optimales $E(X^*, Y^*)$:

Le programme du consommateur est défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{Max } U = f(X, Y) = 4X^2Y \\ \text{sc } R = 100 = 10X + 20Y \end{cases}$$

A partir du programme du consommateur la fonction de Lagrange se définit comme suit :

$$\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = \text{Fonction objectif} + \lambda(\text{Fonction contrainte})$$

Donc : $\mathcal{L}(X, Y, \lambda) = 4X^2Y + \lambda(100 - 10X - 20Y)$

Nous avons un programme de maximisation, Donc on doit maximiser $\mathcal{L}$

$$\text{Max } \mathcal{L} \Rightarrow \begin{cases} * \ \mathcal{L}'_x = 0, \ \mathcal{L}'_y = 0, \ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \\ * \ \mathcal{L}'' < 0 \ \text{(on suppose que cette condition est vérifiée)} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \times 4XY - 10\lambda = 0 \\ 4X^2 - 20\lambda = 0 \\ 100 - 10X - 20Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\lambda = 8XY \\ 20\lambda = 4X^2 \\ 100 = 10X + 20Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{8XY}{10} \\ \lambda = \dfrac{4X^2}{20} \\ 100 = 10X + 20Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{4XY}{5} \quad (1) \\ \lambda = \dfrac{2X^2}{10} \quad (2) \\ 100 = 10X + 20Y \quad (3) \end{cases}$$

De (1) et (2), on a : $\lambda = \dfrac{4XY}{5} = \dfrac{2X^2}{10} \Rightarrow \boxed{Y = \dfrac{1}{4}X}$

On remplace cette relation dans (3), on a :

$100 = 10X + 20\left(\dfrac{1}{4}X\right) \Rightarrow 100 = 10X + 5X \Rightarrow 15X = 100$

$X^* = \dfrac{100}{15} = 6,66$ et $Y^* = \dfrac{1}{4}X^* = \dfrac{1}{4} \times 6,66 = 1,66$

* Condition du deuxième ordre : ($\mathcal{L}'' < 0$) :

Nous avons :

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 8XY - 10\lambda \\ \mathcal{L}'_y = 4X^2 - 20\lambda \\ \mathcal{L}'_\lambda = 100 - 10X - 20Y \end{cases} \quad \text{et} \quad |\Delta| = \begin{vmatrix} \mathcal{L}''_{xx} & \mathcal{L}''_{xy} & \mathcal{L}''_{x\lambda} \\ \mathcal{L}''_{yx} & \mathcal{L}''_{yy} & \mathcal{L}''_{y\lambda} \\ \mathcal{L}''_{\lambda x} & \mathcal{L}''_{\lambda y} & \mathcal{L}'_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 8Y & 8X & -10 \\ 8X & 0 & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{vmatrix}$$

Donc $\text{dét}|\Delta| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} M_{ij}$ (En fixant la dernière ligne $i=3$ et en choisissant la colonne

$$\text{dét}|\Delta| = (-1)^{3+1}(-10)\begin{vmatrix} 8X & -10 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-20)\begin{vmatrix} 8Y & -10 \\ 8X & -20 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{3+3}(0)\begin{vmatrix} 8Y & 8X \\ 8X & 0 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$\text{dét}|\Delta| = (-10)\left[(8X \times -20) - (\underbrace{-10 \times 0}_{0})\right] - (-20)\left[(8Y \times -20) - (-10 \times 8X)\right]$$

$$= (-10)(-160X) - (-20)\left[(-160Y) - (-80X)\right]$$

$$= 1600X - \left[3200Y - 1600X\right] = 1600X - 3200Y + 1600X$$

$$\text{dét}(\Delta) = 3200X - 3200Y \quad (\text{or } X^* = 6{,}66 \text{ et } Y^* = 1{,}66)$$

$$= 3200.(6{,}66) - 3200(1{,}66)$$

$$= 21312 - 5312$$

$\text{dét}(\Delta) = 16000 > 0 \Rightarrow \mathcal{L}'' < 0$ Donc cette condition est verifiée.

En conséquence, la combinaison optimale du consommateur est :

$E(X^* = 6,66,\ Y^* = 1,66)$

* Le niveau d'utilité totale maximale découlant de la combinaison optimale est :

$$U_{max} = 4X^{*2}Y^* = 4((6,66)^2 \times (1,66)) = 294,52$$

2. La signification économique du multiplicateur de Lagrange λ :

on a : $$\lambda = \frac{2XY}{S} = \frac{2(6,66 \times 1,66)}{5} = 4,44$$

λ : représente l'utilité marginale du revenu. C'est la valeur dont s'accroît l'utilité si le revenu augmente d'une seule unité l'utilité totale s'accroît de la valeur de λ.

Par exemple :

$R = 100 \longrightarrow U_{max} = 294,52$

$R+1 = 101 \longrightarrow U_{max} + \lambda = 294,52 + 4,44$
$= 298,96$

3. Le revenu nécessaire pour l'utilité de la position précédente ($U = 294$) avec $P(x) = 5$ et $P(y) = 10$:

D'après les données, le programme du consommateur est un programme minimisation définit comme suit :

$$\begin{cases} \text{Min } R = 5x + 10y \\ \text{s.c } U = 4X^2Y = 294 \end{cases}$$

Par la méthode du TMS à l'équilibre :

À l'équilibre : $$\begin{cases} TMS_{XY} = \frac{Um(X)}{Um(Y)} = \frac{U'_x(X,Y)}{U'_y(X,Y)} = \frac{P_x}{P_y} \\ U = 4X^2Y = 294 \quad \text{(la contrainte)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4 \times 2XY}{4X^2} = \dfrac{5}{10} \\ 4X^2Y = 294 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{1}{4}X \quad (1) \\ 4X^2Y = 294 \quad (2) \end{cases}$$

on remplace (1) dans (2), on a : $4X^2\left(\frac{1}{4}X\right) = 294$

$$\Rightarrow X^3 = 294 \Rightarrow X^* = \sqrt[3]{294} = 6,65.$$

$$Y^* = \frac{1}{4}X^* = \left(\frac{1}{4} \times 6,65\right) = 1,66$$

Donc la combinaison d'équilibre est définie par E($X^* = 6,65$ et $Y^* = 1,66$).

En conséquence le revenu nécessaire pour atteindre un niveau d'utilité de 294 est :

$$R_{min} = x^* \cdot P_x + y^* \cdot P_y = (6,65 \times 5) + (1,66 \times 10)$$

$$R_{min.} = 49,85.$$

consommateur (ou revenu nominal) na varie pas, l'augmentation du prix d'un produit signifie qu'il doit dépenser plus pour l'acquisition d'une quantité de ce produit. Cela se traduit donc par une baisse de son revenu réel ou de son pouvoir d'achat et vice versa.

L'élasticité prix-direct : elle mesure la sensibilité de la demande d'un bien X aux variations relatives de ses prix :

$$E_p = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P}{Q} \quad \text{ou} \quad E_p = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial P}{P}} = \frac{\partial Q}{\partial P} \times \frac{P}{Q}$$

L'élasticité prix-croisé : elle exprime, la réaction relative de la demande d'un bien **X** à la variation relative du prix d'un autre bien **Y.**

$$E_{XY} = \frac{\frac{\Delta Q_x}{Q_x}}{\frac{\Delta P_y}{P_y}} = \frac{\Delta Q_x}{\Delta P_y} \times \frac{P_y}{Q_x} \quad \text{ou} \quad E_{XY} = \frac{\frac{\partial Q_x}{Q_x}}{\frac{\partial P_y}{P_y}} = \frac{\partial Q_x}{\partial P_y} \times \frac{P_y}{Q_x}$$

L'élasticité revenu : c'est le coefficient qui mesure la variation relative de la demande consécutive à une variation relative du revenu.

$$E_R = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta R}{R}} = \frac{\Delta Q}{\Delta R} \times \frac{R}{Q} \quad \text{ou} \quad E_R = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial R}{R}} = \frac{\partial Q}{\partial R} \times \frac{R}{Q}$$

Les lois d'Engel : sont traduit par les interprétations des différentes valeurs de l'élasticité revenu. Ainsi :

- Si $E_R = 1$: ($\Delta Q/Q = \Delta R/R$) c'est pour le cas des biens normaux (ex: les dépenses d'habillement et de logement);
- Si $E_R > 1$ l'élasticité est forte : ($\Delta Q/Q > \Delta R/R$) c'est pour le cas des biens supérieurs ou de luxe (ex: les dépenses de loisirs comme les vacances, les voyages, etc....);
- Si $E_R < 1$: l'élasticité est faible ($\Delta Q/Q < \Delta R/R$) c'est pour le cas des biens de première nécessité (ex: les biens de consommations en général);
- Si $E_R < 0$: l'élasticité est négative. C'est pour le cas des biens inférieurs. Pour ces biens, lorsque le revenu augmente la quantité demandée de ces biens diminue.

Applications :

Application n° 1 :

- L'élasticité - revenu du bien X :

$$\varepsilon_R = \frac{\Delta Q}{\Delta R} \times \frac{R_1}{Q_1} = \frac{(Q_2 - Q_1)}{(R_2 - R_1)} \times \frac{R_1}{Q_1} = \frac{(105 - 100)}{(33\,000 - 30\,000)} \times \frac{30\,000}{100}$$

$$\varepsilon_R = \frac{5}{3000} \times 300 = 0{,}5$$

$\varepsilon_R = 0{,}5 < 1$, le bien X est un bien normal de première nécessité. Si le revenu du consommateur augmente de 1% la quantité demandée du bien X augmente de 0,5 %.

- L'élasticité - prix directe du bien X :

$$|\varepsilon_p| = \left|\frac{\Delta Q}{\Delta P_x} \times \frac{P_{x_1}}{Q_1}\right| = \left|\frac{(Q_2 - Q_1)}{(P_{x_2} - P_{x_1})} \times \frac{P_{x_1}}{Q_1}\right| = \left|\frac{(1100 - 800)}{(35 - 45)} \times \frac{45}{800}\right|$$

$$|\varepsilon_p| = \left|\frac{300}{-10} \times \frac{45}{800}\right| = |-1{,}68| = 1{,}68$$

$|\varepsilon_p| > 1$

La demande du bien X est élastique. Si le prix du bien X augmente de 1%, sa demande sera baissée de 1,68 %.

- L'élasticité - prix croisée du bien X :

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta Q}{\Delta P_y} \times \frac{P_{y_1}}{Q_1} = \frac{(Q_2 - Q_1)}{(P_{y_2} - P_{y_1})} \times \frac{P_{y_1}}{Q_1} = \frac{(1100 - 800)}{(70 - 50)} \times \frac{50}{800}$$

$$\varepsilon_c = \frac{300}{20} \times \frac{50}{800} = 9{,}37 \Rightarrow \varepsilon_c > 0$$

On dit que les deux biens X et Y sont des biens substituables. Si le prix du bien Y augmente de 1%, la demande du bien X augmente aussi de 9,37 %.

Application n° 2 :

1 – La fonction d'utilité vérifie t-elle la convexité des préférences :

Notons U_0 une valeur donnée de l'utilité, on peut alors écrire :

$$U = U_0 = 4X^2Y^2 \Rightarrow Y^2 = \frac{U_0}{4X^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{\sqrt{U_0}}{2X}}$$ (équation des courbes d'indifférences pour un niveau d'utilité U_0)

$y(x)$

Donc $y'(x) = \dfrac{-\sqrt{U_0}}{2X^2} < 0 \Rightarrow$ les courbes d'indifférence du consommateur sont décroissantes.

$$y''(x) = \left(\frac{-\sqrt{U_0}}{2X^2}\right)'_x = \frac{-\sqrt{U_0}}{2} \times -2 \times \frac{1}{X^3} = \frac{\sqrt{U_0}}{X^3} > 0$$

Donc les courbes d'indifférence (les préférences) du consommateur sont convexes.

2 – Le TMS_{xy} :

$$TMS_{xy} = \frac{U_m(X)}{U_m(Y)} = \frac{f'_x(X,Y)}{f'_y(X,Y)} = \frac{4 \times 2 \times X \times Y^2}{4 \times 2 \times X^2 \times Y} = \frac{Y}{X}$$

3 – Les fonctions de la demande en bien X et en bien Y :

Nous avons le programme du consommateur est défini comme suit :

$$\begin{cases} \text{Max } U = f(X,Y) = 4X^2Y^2 \\ \text{s.c} \\ R = x.P_x + y.P_y \end{cases}$$

Par la méthode du TMS à l'équilibre, nous avons à l'équilibre :

(D'après la réponse précédente)

$$\begin{cases} TMS_{XY} = \dfrac{Um(X)}{Um(Y)} = \dfrac{P_x}{P_y} \\ R = x.P_x + y.P_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Y}{X} = \dfrac{P_x}{P_y} \\ R = x.P_x + y.P_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{P_x}{P_y} X & (1) \\ R = x.P_x + y.P_y & (2) \end{cases}$$

On remplace (1) dans (2), on a :

$$\begin{cases} Y = \dfrac{P_x}{P_y}.X \\ R = x.P_x + P_y\left(\dfrac{P_x}{P_y}.x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{P_x}{P_y}.x \\ R = x.P_x + x.P_x = 2x.P_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{P_x}{P_y}.x \\ x = \dfrac{R}{2P_x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{P_x}{P_y}\left(\dfrac{R}{2P_x}\right) \\ x = \dfrac{R}{2P_x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^* = Q_x = \dfrac{R}{2P_x} & f(R, P_x) \text{ c'est la fonction de la demande du bien } X. \\ Y^* = Q_y = \dfrac{R}{2P_y} & f(R, P_y) \text{ c'est la fonction de la demande du bien } Y. \end{cases}$$

Exercices :

Exercice N°1

1. La fonction d'utilité est-elle homogène ?

Une fonction d'utilité est homogène si : $f(hx, hy) = h^k f(x, y)$

on dit que la fonction d'utilité est homogène de degré k.

Pour $U = f(X, Y) = X^{1/3} Y^{2/3}$

Donc $f(hX, hY) = (hX)^{1/3} (hY)^{2/3} = h^{1/3}.X^{1/3} h^{2/3} Y^{2/3}$

$= h^{1/3} h^{2/3} X^{1/3} Y^{1/3} = h^{1/3 + 2/3} X^{1/3} Y^{2/3}$

$= h\, X^{1/3} Y^{2/3} = h\, f(X, Y)$.

Donc la fonction d'utilité est homogène de degré $k = 1$.

2. La courbe de consommation-revenu est une courbe qui joint l'ensemble des points d'équilibre du consommateur successifs lorsque le revenu change et les prix relatifs restent constants.

La C.C.R est une droite car la fonction d'utilité du consommateur est homogène.

3. Les fonctions de la demande en bien X et en bien Y :

Le consommateur cherche à maximiser son utilité $U = x^{1/3} y^{2/3}$ sous contrainte de son revenu $R = x \cdot P_x + y \cdot P_y$.

$$\text{Max } \mathcal{L}(X, Y, \lambda) = x^{1/3} y^{2/3} + \lambda(R - x \cdot P_x - y \cdot P_y)$$

<u>Condition du 1er ordre</u> : (Remarque : on fait l'hypothèse que les conditions du 2ème ordre sont satisfaites).

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 0 \\ \mathcal{L}'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} x^{-2/3} y^{2/3} - \lambda P_x = 0 \\ \frac{2}{3} y^{-1/3} x^{1/3} - \lambda P_y = 0 \\ R - x \cdot P_x - y \cdot P_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\frac{1}{3} x^{-2/3} y^{2/3}}{P_x} & (1) \\ \lambda = \dfrac{\frac{2}{3} y^{-1/3} x^{1/3}}{P_y} & (2) \\ R = x \cdot P_x + y \cdot P_y & (3) \end{cases}$$

De (1) et (2) on a :

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3} x^{-2/3} y^{2/3}}{P_x} = \frac{\frac{2}{3} y^{-1/3} x^{1/3}}{P_y} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3} y^{1/3} y^{2/3}}{P_x} = \frac{\frac{2}{3} x^{2/3} x^{1/3}}{P_y}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3P_x} = \frac{2x}{3P_y} \Rightarrow \boxed{y = \frac{P_x}{P_y} 2x}$$

En remplaçant ceci dans (3), on a :

$$R = x \cdot P_x + \left(\frac{P_x}{P_y} \cdot 2x\right) \cdot P_y = x \cdot P_x + 2x \cdot P_x = 3x \cdot P_x$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{R}{3P_x} \quad (Q_x = f(R, P_x)).$$

$$y^* = \frac{P_x}{P_y} 2\left(\frac{R}{3P_x}\right) = \frac{2R}{3P_y} \quad Q_y = f(R, P_y).$$

Ainsi,

$$\boxed{X^* = Q_x = \frac{R}{3P_x}}$$ c'est la fonction de la demande du bien X.

$$\boxed{Y^* = Q_y = \frac{2R}{3P_y}}$$ c'est la fonction de la demande du bien Y.

4. La fonction de demande du bien X en fonction du revenu :

* Nous avons la fonction de la demande du bien X d'une façon générale est $X^* = Q_x = \frac{R}{3P_x}$

Donc la demande du bien X en fonction du Revenu est :

$$Q_x = X^* = Q_x = \frac{R}{3P_x} \text{ (avec } P_x \text{ est constant)}$$

$$X^* = f(R)$$

* L'élasticité revenu de X est :

$$\varepsilon_R = \frac{\partial Q_x}{\partial R} \times \frac{R}{Q_x} \quad \text{avec} \quad Q_x = x^* = f(R) = \frac{R}{3P_x} \left(\text{équation de la courbe d'Engel(X)}\right)$$

$$= \frac{1}{3P_x} \cdot \frac{R}{\frac{R}{3P_x}} = \frac{1}{3P_x} \cdot R \cdot \frac{3P_x}{R} = 1$$

Lorsque le revenu augmentera de 1 %, la quantité à consommer du bien X à l'optimum augmentera aussi de 1 %.

Le bien X est bien normal.

5. La fonction de demande du bien Y en fonction du revenu :

* Nous avons la fonction de la demande du bien Y d'une façon générale est donnée par : $Q_y = Y^* = \frac{2R}{3P_y}$

Donc la demande du bien Y en fonction du revenu est :

$$Q_y = Y^* = \frac{2R}{3P_y} \quad \left(\begin{array}{c}\text{avec } P_y \text{ est constant} \\ Y^* = f(R)\end{array}\right)$$

* L'élasticité-revenu de Y est :

$$\varepsilon_R = \frac{\partial Q_y}{\partial R} \times \frac{R}{Q_y} \quad \text{avec } Q_y = Y^* = f(R) = \frac{2R}{3P_y} \left(\begin{array}{c}\text{équation de} \\ \text{la courbe d'Engel} \\ (Y)\end{array}\right)$$

$$= \left(\frac{2R}{3P_y}\right)'_R \times \frac{R}{\frac{2R}{3P_y}} = \frac{2}{3P_y} \times R \times \frac{3P_y}{2R} = 1 .$$

Lorsque revenu augmentera de 1%, la quantité demandée du bien Y à l'optimum augmentera aussi de 1%.

Le bien Y est aussi un bien normal.

c/ Lorsque la fonction d'utilité est homogène :

- La courbe de consommation revenu est une droite qui passe par l'origine.

- $\varepsilon_R(X) = 1$ et $\varepsilon_R(Y) = 1$.

6 - * La combinaison optimale :

Nous avons d'après la réponse de la question 3 :

$$X^* = d_x = \frac{R}{3P_x} \quad \text{et} \quad Y^* = f_y = \frac{2R}{3P_y}$$

Or $R = 150$ Dhs, $P_x = 5$ Dhs et $P_y = 10$ Dhs.

Donc : $X^* = \frac{150}{3(5)} = 10$ et $Y^* = \frac{2(150)}{3(10)} = 10$.

$E(X^* = 10$ et $Y^* = 10)$

* Le niveau de satisfaction maximale :

$$U_{max} = X^{*1/3}\, Y^{*2/3} = (10)^{1/3}\,(10)^{2/3} = 10^{1/3 + 2/3} = 10^{3/3} = 10$$

7. Le multiplicateur de Lagrange λ :

D'après la réponse de la question 3, nous avons :

$$\lambda = \frac{1/3\, x^{-2/3}\, y^{2/3}}{P_x} = \frac{2/3\, y^{-1/3}\, x^{1/3}}{P_y} = \frac{2/3\, x^{1/3}}{P_y\, y^{1/3}} = \frac{2/3\,(10)^{1/3}}{10\,(10)^{1/3}}$$

$\lambda = 0{,}06$. (c'est l'utilité marginale du revenu).

Donc si le revenu augmente d'un dirham (une seule unité monétaire) l'utilité augmentera de $\Delta = 0{,}06$.

Exercice 2 :

1. La demande globale du bien X : c'est la sommation des demandes individuelles.

$$X_G = X_1 + X_2 + X_3$$

$$X_G = (-4P_x + 20) + (-3P_x + 50) + (-2P_x + 200)$$

$$= -4P_x - 3P_x - 2P_x + 20 + 50 + 200$$

$$\boxed{X_G = -9P_x + 270} \quad (X_G = Q_G)$$

2. L'élasticité-prix de la demande pour $P_x = 20$ DHS :

$$\varepsilon_p = \frac{\partial Q_G}{\partial P_x} \times \frac{P_x}{Q_G} \quad \text{avec } Q_G = X_G.$$

$$= (-9P_x + 270)'_{P_x} \times \frac{P_x}{-9P_x + 270} = (-9) \times \frac{20}{-9(20) + 270}$$

$$\varepsilon_p = -2 \Rightarrow |\varepsilon_p| = 2 > 1$$

En conséquence la demande du bien X est élastique. Elle est beaucoup sensible aux variations du prix (P_x).

3. Deux exceptions à la loi de la demande :

* L'effet Veblen pour les biens supérieurs (ou de luxe).
* L'effet Griffen pour les biens inférieurs.