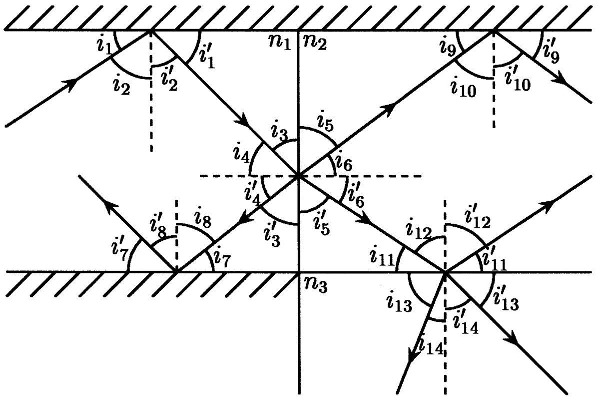
Exercices – Optique géométrique

« (. . .) que mon corps est le prisme inaperçu, mais vécu, qui réfracte le monde aperçu vers mon « Je ». Ce double mouvement de conscience, à la fois centrifuge et centripète, qui me relie au monde, transforme celui-ci par là même, lui donne une détermination, une qualification nouvelle. »

Edmond BARBOTIN – *Humanité de l'homme* Aubier, p. 48 (1970)

■ Lois de Snell-Descartes

Ex-O1.1 Mise en jambes



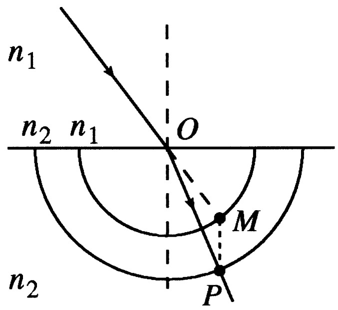
1) Refaire le schéma ci-contre en ne laissant que les rayons lumineux existant réellement.
2) Donner toutes les relations angulaires possibles en précisant pour chacune si elle est d'origine géométrique ou optique.

Ex-O1.2 La loi de la réfraction

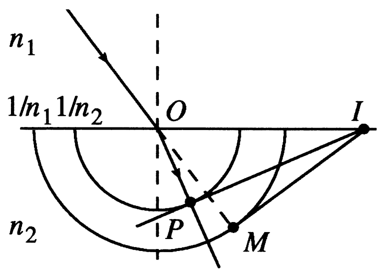
Un rayon lumineux dans l'air tombe sur la surface d'un liquide ; il fait un angle $\alpha = 56°$ avec le plan horizontal.
La déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté est $\theta = 13,5°$. Quel est l'indice n du liquide ?
Rép. : $n = 1,6$.

Ex-O1.3 Constructions de Descartes et de Huygens

Montrer que les deux constructions suivantes permettent de tracer le rayon réfracté.



1) Construction de Descartes :
○ tracer les cercles de rayons n_1 et n_2 ;
○ soit M l'intersection du rayon incident avec le cercle de rayon n_1 ;
○ soit P l'intersection du cercle de rayon n_2 et de la droite orthogonale à la surface de séparation passant par M ;
○ le rayon réfracté n'est autre que OP.



2) Construction de Huygens :
○ tracer les cercles de rayons $1/n_1$ et $1/n_2$;
○ soit M l'intersection du rayon incident avec le cercle de rayon $1/n_1$;
○ tracer la tangente en M au cercle de rayon $1/n_1$;
○ soit I le point d'intersection de la tangente avec la surface de séparation ;
○ soit P l'intersection du cercle de rayon $1/n_2$ et de la seconde tangente tracée ;
○ le rayon réfracté n'est autre que OP.

Ex-O1.4 Dispersion par le verre

Le tableau ci-contre donne les longueurs d'onde, dans le vide, de deux radiations monochromatiques et les indices correspondants pour deux types de verre différents.

Couleur	λ_0 (nm)	n (crown)	n (flint)
rouge	656,3	1,504	1,612
bleu	486,1	1,521	1,671

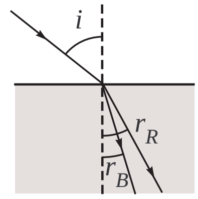
1) Calculer les fréquences de ces ondes lumineuses. Dépendent-elles de l'indice du milieu ?
On prendra $c_0 = 2,998.10^8\ m.s^{-1}$.

2) Calculer les célérités et les longueurs d'onde de la radiation rouge dans les deux verres.

3) a) Un rayon de lumière blanche arrive sur un dioptre plan air-verre, sous l'incidence $i = 60°$. L'indice de l'air est pris égal à $1,000$. Rappeler les lois de DESCARTES relatives à la réfraction de la lumière.

b) Calculer l'angle que fait le rayon bleu avec le rayon rouge pour un verre crown, puis pour un verre flint. Faire une figure.

c) Quel est le verre le plus dispersif ?



Ex-O1.5 Relation entre l'indice et la longueur d'onde

On mesure l'indice d'un verre pour différentes longueurs d'onde (dans le vide) :

λ (nm)	400	500	600	700	800
$n(\lambda)$	1,500	1,489	1,482	1,479	1,476

On veut déterminer les coefficients A et B de la relation de CAUCHY : $n(\lambda) = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$.

1) Déterminer les unités de A et de B.

2) Expliquer pourquoi il ne faut pas étudier n en fonction de λ, mais n en fonction de $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

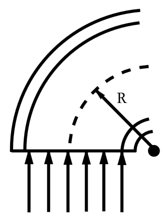
3) À l'aide d'une calculatrice, déterminer A et B par régression linéaire.

4) En déduire n pour $\lambda = 633\ nm$.

Ex-O1.6 Courbure d'une fibre optique

Une fibre optique est constitué d'une âme en verre d'indice $n_1 = 1,66$ et de diamètre $d = 0,05\ mm$ entourée d'une gaine en verre d'indice $n_2 = 1,52$. On courbe la fibre éclairée sous incidence normale.

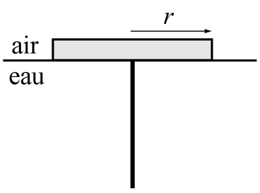
Quel est est le rayon de courbure R minimal pour lequel toute la lumière incidente traverse la fibre ?



Rép : Il faut $R > \dfrac{d}{2}.\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2}$

Ex-O1.7 Flotteur

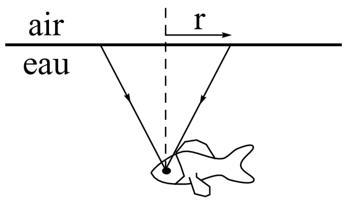
Un disque en liège de rayon r flotte sur l'eau d'indice n ; il soutient une tige placée perpendiculairement en son centre. Quelle est la longueur h de la partie de la tige non visible pour un observateur dans l'air ? Citer les phénomènes mis en jeu.



Rép. : $h = r\sqrt{n^2 - 1}$.

Ex-O1.8 Le point de vue du poisson

Un poisson est posé sur le fond d'un lac : il regarde vers le haut et voit à la surface de l'eau (d'indice $n = 1,33$) un disque lumineux de rayon r, centré à sa verticale, dans lequel il aperçoit tout ce qui est au-dessus de l'eau.



1) Expliquer cette observation.

2) Le rayon du disque est $r = 3,0\ m$. À quelle profondeur se trouve le poisson ?

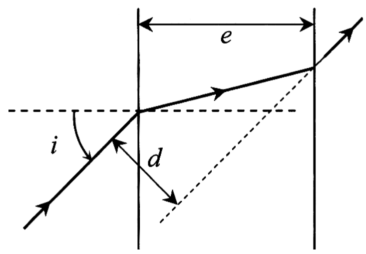
Rép. : $h = 2,6\ m$.

Ex-O1.9 Lame à faces parallèles

On considère une lame à faces parallèles en verre (indice n) plongée dans l'air. Elle peut être considérée comme l'association de deux dioptres plans parallèles.

Il y a donc stigmatisme approché dans les conditions de GAUSS (Cf. leçon suivante).

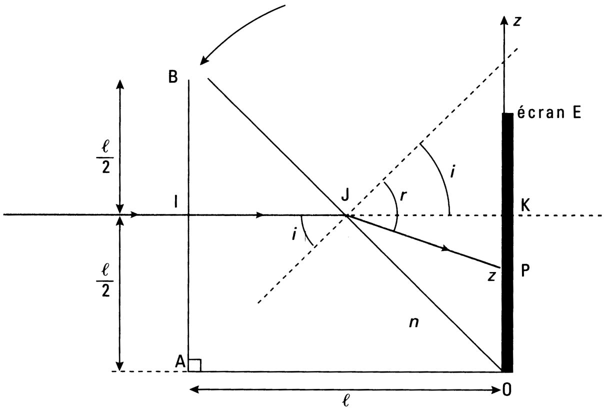
1) Faire une figure montrant qu'un rayon d'incidence i a subi à sa sortie un simple déplacement d'une distance d telle que :



$$d = e.\frac{\sin(i-r)}{\cos r} = e.\sin i\left(1 - \sqrt{\frac{1 - sin^2 i}{n^2 - sin^2 i}}\right) \quad \begin{cases} r \text{ est l'angle de réfraction à la } 1^{\text{ère}} \text{ réfraction} \\ e \text{ est l'épaisseur de la lame} \end{cases}$$

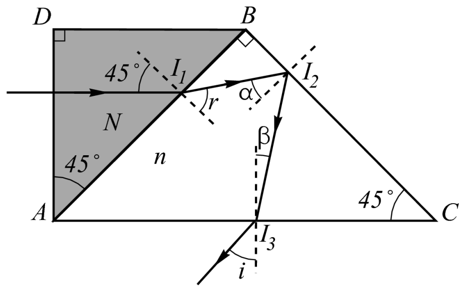
2) Montrer que la position de l'image est telle que $AA' = e(1 - \frac{1}{n})$ et que ce déplacement apparent a lieu dans le sens de la lumière. Calculer AA' pour une vitre d'épaisseur $1\ mm$. Conclusion ?

Ex-O1.10 **Indice d'un liquide**



Une cuve en verre a la forme d'un prisme de section droite rectangle isocèle. Elle est posée horizontalement sur une des arêtes de longueur l du triangle isocèle, et le sommet opposé à ce côté est ouvert pour permettre de remplir la cuve d'un liquide transparent d'indice n.
Un pinceau de lumière est envoyé horizontalement sur la face verticale de la cuve, dans un plan de section droite, à la hauteur $\dfrac{l}{2}$.
Ce rayon émerge au-delà de l'hypothénuse et rencontre en un point P un écran E placé verticalement à la distance l de la face d'entrée du dispositif. On néglige l'effet dû aux parois en verre sur la propagation du pinceau de lumière.
1) Quelle limite supérieure peut-on donner à la valeur de l'indice ?
2) Quel est l'indice n du liquide contenu dans la cuve en fonction de l et de z ?
3) A.N. : calculer n avec : $l = 30\ cm$ et $z = 6,7\ cm$.
Rép. : 1) $n \leq 1,414$; **2)** $n = \sqrt{2}\sin\left(i + \arctan\left(\dfrac{l-2z}{l}\right)\right)$; **3)** $n = 1,36$ (éthanol peut-être).

Ex-O1.11 **Deux prismes accolés**



Deux morceaux de verre taillés sous forme de triangles rectangles et isocèles d'indices respectifs N et n ont leur face AB commune. Un rayon incident frappe AD sous une incidence normale, se réfracte en I_1, se réfléchit en I_2 puis ressort en I_3 sous l'incidence i.
Les valeurs de N et n sont telles que la réflexion soit totale en I_2.
1) Écrire la relation de SNELL-DESCARTES aux points I_1 et I_3.
2) Quelles relations vérifient les angles r et α ; α et β ?
3) Quelle relation vérifient N et n pour que la réflexion soit limite en I_2 ?
Calculer N, r, α, β et i pour $n = \dfrac{3}{2}$ quand cette condition limite est réalisée.
On appelle N_0 cette valeur limite de N. Pour que la réflexion soit totale en I_2, N doit-il être plus grand ou plus petit que N_0 ?
4) Écrire la relation vérifiée par N et n pour que l'angle i soit nul. Que vaut N ?

Solution Ex-O1.4

1) $\nu_R = 4,568.10^{14}\ Hz$, $\nu_B = 6,167.10^{14}\ Hz$.
Les fréquences ne dépendent pas du milieu.
2) $c = \dfrac{c_0}{n}$, et donc : $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{c_0}{\nu}\dfrac{1}{n} = \dfrac{\lambda_0}{n}$.
• Dans le verre de crown :
$\boxed{c_R = 1,993.10^8\ m.s^{-1}}$ et $\boxed{\lambda_R = 436,3\ nm}$.
• Dans le verre de flint :
$\boxed{c_R = 1,86.10^8\ m.s^{-1}}$ et $\boxed{\lambda_R = 407,1\ nm}$.
3) a) Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et $n\sin i = n'\sin r$.
b) • Pour le verre de crown :
$r_R = 35,16°$ et $r_B = 34,71°$: le rayon bleu est plus dévié que le rayon rouge. L'angle entre le rayon rouge et le rayon bleu vaut $\boxed{\Delta r = 0,45°}$.
• Pour le verre de flint :
$r_R = 32,50°$ et $r_B = 31,22°$: le rayon bleu est plus dévié que le rayon rouge. L'angle entre le rayon rouge et le rayon bleu vaut $\boxed{\Delta r = 1,28°}$.
c) → Le « flint » est un verre plus dispersif que le « crown » car l'angle entre les deux rayons est le plus important.

Solution Ex-O1.5

1) n n'a pas d'unité, donc A n'a pas d'unité et B a la même unité que λ^2, *i.e* le mètre carré (m^2).

2) $n(\lambda)$ n'est pas une fonction affine, en revanche $n\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ est une fonction affine d'ordonnée à l'origine A et de cœfficient directeur B.

3) $\boxed{A = 1,468}$ et $\boxed{B = 5,2.10^{-15}\ m^2}$.

4) $n(633\ nm) = 1,468 + \dfrac{5,2.10^{-15}}{(633.10^{-9})^2}$

soit $\boxed{n = 1,481}$.

Solution Ex-O1.8

1) Par application du principe du retour inverse de la lumière, l'œil du poisson voit la zone de l'espace d'où il peut être vu.
Le poisson voit donc tout l'espace situé dans l'air au travers d'un cône de sommet son œil et de demi-angle au sommet égal à l'angle limite de réfraction pour le dioptre Eau/Air. En dehors de ce cône, il y a réflexion totale.

2) $\boxed{i_l = \arcsin \dfrac{n_{air}}{n_{eau}} = \arcsin \dfrac{1}{1,33} \approx 49°}$,
le poisson voit donc l'espace situé au-delà de la surface de l'eau sous un cône d'angle 98°, dont l'intersection avec la surface de l'eau est un disque de rayon r.
Avec $\tan i_l = \dfrac{r}{h}$, on a $\boxed{h = \dfrac{r}{\tan i_l} = 2,6\ m}$.

Solution Ex-O1.10

1) En I, l'incidence étant normale, le rayon incident n'est pas dévié.
Par contre, en J, l'angle d'incidence est $i = 45°$. Or l'énoncé dit que le rayon est transmis en J, donc $i \leq i_l = \arcsin \dfrac{1}{n}$, d'où $\sin i \leq \dfrac{1}{n}$
et donc $\boxed{n \leq \dfrac{1}{\sin i} = \sqrt{2} = 1,414}$.

2) En J on a $n \sin i = \sin r$,
donc : $n = \dfrac{\sin r}{\sin i} = \sqrt{2}\,\sin r$.
On peut calculer r à l'aide des données fournies par la tache lumineuse sur l'écran E.
Dans le triangle JKP,

$$\tan(r - i) = \frac{KP}{JK} = \frac{\frac{l}{2} - z}{\frac{l}{2}} = \frac{l - 2z}{l}.$$

Ainsi, $r = i + \arctan\left(\dfrac{l - 2z}{l}\right)$ et donc :

$$\boxed{n = \sqrt{2}\,\sin\left(i + \arctan\left(\frac{l - 2z}{l}\right)\right)}$$

3) $n = 1,36$ (éthanol peut-être).

Solution Ex-O1.11

1) En I_1 : $\boxed{N \sin 45° = N\dfrac{\sqrt{2}}{2} = n \sin r}$ ①
et en I_3, $\boxed{n \sin \beta = \sin i}$ ②.

2) La normale à BC et la normale à AB sont perpendiculaires entre elles. dans le triangle formé par ces normales et I_1I_2, on a : $\boxed{r + \alpha = \dfrac{\pi}{2}}$ ③.
De plus, avec le triangle I_2CI_3, on établit : $\boxed{\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}}$ ④.

3) • La condition de réflexion (avec phénomène de réfraction) limite en I_2 s'écrit : $n \sin \alpha = 1$ ⑤
Grâce à ① et ③, la relation ⑤ conduit à : $\boxed{N^2 = 2\,(n^2 - 1)}$ ⑥.

• **AN :** $\boxed{N \equiv N_0 = 1,58 \qquad r \equiv r_0 = 48,19°}$
$\boxed{\alpha = \alpha_0 = 41,81° \qquad \beta = 3,19° \qquad i = 4,79°}$

• Pour que la réflexion soit totale en I_2, il faut que l'angle α soit plus grand que l'angle d'incidence pour la réfraction limite α_0 que l'on vient de calculer (car alors la loi de Descartes pour la réfractrion n'est plus vérifiée : ⑤ devient $n \sin \alpha > 1$).
Alors ③ $\Rightarrow$ $r < r_0$, et donc ① $\Rightarrow$ $\boxed{N < N_0}$,
ce qui revient à dire $\boxed{N < \sqrt{2\,(n^2 - 1)}}$.

4) Si i est nul, alors β est nul, soit $\alpha = r = \dfrac{\pi}{4}$,
et donc ① $\Rightarrow$ $N = n$, soit : $\boxed{N = n = \dfrac{3}{2}}$

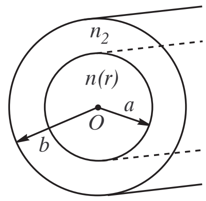
DL n°1 – La fibre optique

1. Atténuation dans la fibre

Les pertes par transmission (notées X) sont exprimées en dB.km^{-1}. On rappelle que $X_{dB} = 10\ \log \dfrac{P_2}{P_1}$, avec P_1 puissance optique **à** l'entrée de la fibre et P_2 puissance optique au bout d'un kilomètre de parcours. Vers 1970, l'atténuation était de 10 $dB.km^{-1}$. Actuellement, on arrive à $0,005\ dB.km^{-1}$. Dans les deux cas, exprimer en % les pertes au bout d'un km.

2. Profil d'indice

Une fibre optique est généralement constituée d'un cœur de rayon a dont l'indice n varie avec la distance r à l'axe, et d'une gaine d'indice constant n_2. On suppose que :



$$\left| \begin{array}{ll} n^2(r) = n_1^2(1 - 2\Delta.(\frac{r}{a})^\alpha) & \text{pour } r < a \\ n^2(r) = n_2^2 & \text{pour } a < r < b \end{array} \right.$$

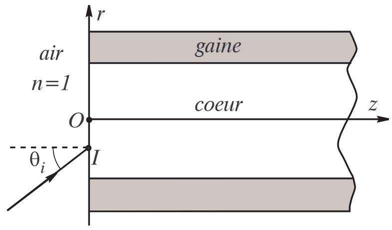
avec $n_2 < n_1$, α constante positive, b rayon extérieur de la gaine et $\Delta = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$.

Dans la pratique, n_1 et n_2 ont des valeurs très voisines et Δ est très petit, en général $\Delta \approx 10^{-2}$.
→ Représenter $n = f(r)$ pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ et α infini.

3. Fibre à saut d'indice

On envisage le cas d'une fibre à saut d'indice (α infini)[1].

a) Le plan d'incidence d'un rayon SI se propageant dans l'air et tombant sur la fibre est le plan du schéma ci-contre.



→ Montrer que si θ_i reste inférieur à un angle θ_a, un rayon peut être guidé dans le cœur.
On appelle ouverture numérique (O.N.) la quantité $\sin\theta_a$.
→ Exprimer l'O.N. en fonction de n_1 et Δ.
Application numérique :
Calculer l'O.N. pour $\Delta = 10^{-2}$ et $n_1 = 1,5$.

b) Une impulsion lumineuse arrive à $t = 0$, au point O ($r = 0$) sous la forme d'un faisceau conique convergent, de demi-angle au sommet θ_i ($\theta_i < \theta_a$). Pour une fibre de longueur l , calculer l'élargissement temporel Δt de cette impulsion à la sortie de la fibre.
Exprimer Δt en fonction de l , n_1, c et θ_i.
A.N : Calculer Δt pour $l = 10\ km$, $\theta_i = 8°$ et $n_1 = 1,5$. On prendra $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.

c) Soit un faisceau conique convergent à l'entrée d'une seconde fibre à saut d'indice. Ce faisceau a pour demi-angle au sommet l'angle θ'_a correspondant à l'O.N. de la seconde fibre.
→ Exprimer $\Delta t'$ en fonction de l , n_1, n_2 et c.
Application numérique : Calculer la nouvelle O.N. et $\Delta t'$ pour $l = 1\ km$, $n_1 = 1,456$ et $n_2 = 1,410$ (fibre silice/silicone).

d) On envoie à l'entrée de la fibre de la question précédente des impulsions très brèves de durée δT avec une période T (on suppose que $\delta T \ll T$).
→ Quelle est la valeur minimale de T pour que les impulsions soient séparées à la sortie de la fibre ?

e) En transmission numérique, on exprime le résultat en nombre maximum d'éléments binaires (présence ou absence d'impulsion = bit) qu'on peut transmettre par seconde. Que vaut le débit en $b.s^{-1}$ (bits par seconde) des fibres étudiées ?
Les comparer aux standard téléphone Numéris (64 kb/s), au standard télévision (100 Mb/s) ou à une ligne « ADSL » classique qui permet un transfert de 512 Mo par seconde (soit plus de $4.10^9\ b/s$).

1. Utiliser les lois de Descartes et un soupçon de géométrie.

Ex-O1.12 Arc-en-ciel (, CCP2005)** [C20/16 ; P2/573]

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, on peut admettre que chaque goutte d'eau se comporte comme une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. On recherche les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle (c'est à cette condition que l'intensité lumineuse sera maximale, donc observable pour l'œil). Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation D de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation D est une fonction de l'angle d'incidence i.

On admettra que la condition de parallélisme des rayons émergents se traduit mathématiquement par $\dfrac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}i} = 0$.

1) Rappeler les lois de Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice n. Exprimer la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$ exclusivement en fonction de l'indice n et du sinus de l'angle d'incidence.

2) Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre O et de rayon R, est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre 0° et 90°.

Son indice, pour une radiation donnée, sera noté n tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.

Répondre aux questions ci- après pour chacun des trois cas suivants :

- lumière directement transmise (figure 1)

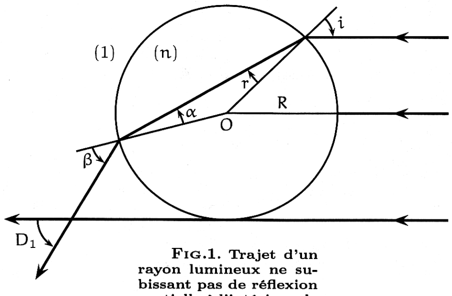


Fig.1. Trajet d'un rayon lumineux ne subissant pas de réflexion partielle à l'intérieur de la goutte

- lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (figure 2) ;

- lumière transmise après deux réflexions à l'intérieur de la goutte (figure 3).

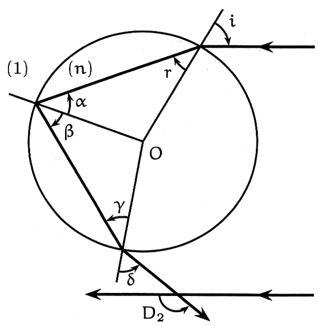


Fig. 2. Trajet d'un rayon lumineux subissant une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte

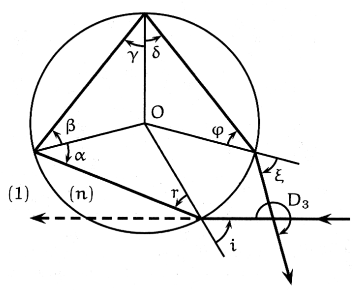


Fig. 3. Trajet d'un rayon lumineux subissant deux réflexions partielles à l'intérieur de la goutte

a) Exprimer en fonction de l'angle d'incidence i ou de l'angle de réfraction r, tous les angles marqués de lettres grecques.

b) En déduire l'angle de déviation D propre à chaque cas, en fonction de i et de r.

c) Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus de l'angle d'incidence et l'indice n de l'eau.

3) Le Soleil étant supposé très bas sur l'horizon, normal au dos d'un observateur, montrer que celui-ci ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet θ_2 et θ_3.

→ Exprimer ces deux angles en fonction de D_2 et D_3.

4) Les angles θ_2 et θ_3 dépendant de l'indice n de l'eau, on observe un phénomène d'irisation dû au fait que cet indice évolue en fonction de la longueur d'onde.

→ Calculer ces angles θ_2 et θ_3 pour le rouge et le violet, sachant que pour le rouge l'indice vaut $n_R = 1,3317$ tandis que pour le violet il est égal à $n_V = 1,3448$.

5) En admettant que l'observateur se trouve face à un rideau de pluie, dessiner la figure qui apparaît dans son plan d'observation en notant la position respective des rouges et des violets.

Ex-O1.13 **Taille d'un miroir**

Quelle taille minimum doit avoir un miroir plan pour qu'un homme de $1,80\ m$ puisse s'y voir entièrement et où le miroir doit-il se trouver ?

Rép. : Miroir de $90\ cm$ placé à $85\ cm$ du sol.

Ex-O1.14 **Mesure d'un angle de rotation par la méthode de Poggendorff**

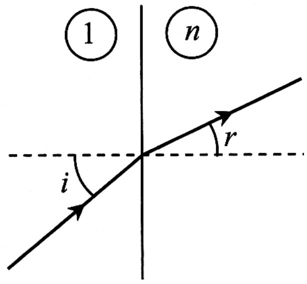
Montrer que lorsque le miroir tourne d'un angle α le rayon réfléchi tourne de 2α. (on peut ainsi mesurer l'angle dont tourne un objet mobile en collant un petit miroir sur lequel on envoie un rayon lumineux et en mesurant l'angle dont tourne le réfléchi.)

Solution Ex-O1.12

1) • Lois de Descartes pour la réfraction :

① le rayon réfracté est dans le plan d'incidence
② $1.\sin i = n.\sin r$

• En différentiant cette expression (pour une radiation monochromatique, $n = n(\lambda)$ étant fixé) : $\cos i.\mathrm{d}i = n.\cos r.\mathrm{d}r$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{n}\dfrac{\cos i}{\cos r}$



En utilisant la loi de la réfraction :
$\sin i = n.\sin r$
et la relation trigonométrique :
$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

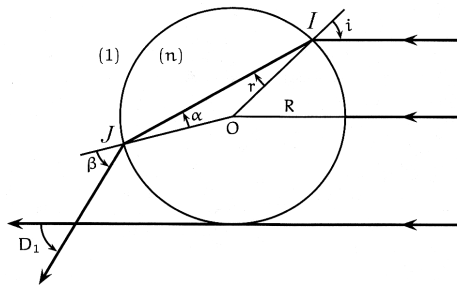
$\rightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2 i}{n^{-}\sin^2 i}}}$

2) Figure 1

a) Pour la lumière directement transmise, il apparaît que le triangle OIJ est isocèle, et que par conséquent, les angles à la base sont égaux : $\boxed{\alpha = r}$.

En appliquant la loi de Snell-Descartes en J, on obtient $n.\sin\alpha = \sin\beta$.

Or $\alpha = r$ et $\sin i = n.\sin r$. Donc : $\boxed{\beta = i}$.



b) En I, le rayon lumineux subit une réfraction ; il subit donc une déviation $D_I = i - r$.

En J il subit également une réfraction : $D_J = \beta - \alpha$.

Or $\alpha = r$ et $\beta = i$.

La déviation totale est : $D_1 = D_I + D_J = i - r + i - r$. Soit : $\boxed{D_1 = 2(i-r)}$

c) En différentiant cette expression : $\mathrm{d}D_1 = 2\mathrm{d}i - 2\mathrm{d}r$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 2 - 2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$.

La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est : $\dfrac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 0$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1$

Par ailleurs, d'après **1)** : $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$.

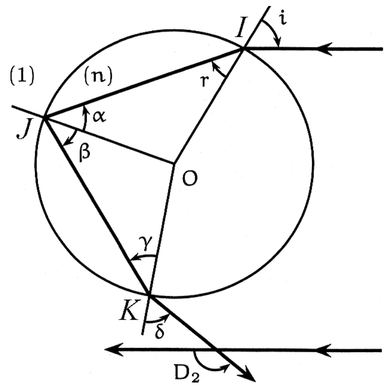
On doit donc avoir : $n^2 - \sin^2 i = 1 - \sin^2 i$, soit : $n^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{n = 1}$.

Cette solution n'a pas d'intérêt physique car l'indice de l'eau $n \simeq \dfrac{4}{3}$ n'est en réalité pas le même que celui de l'air ! Il n'est donc pas possible d'observer un faisceau parallèle recherché dans les conditions de la figure 1.

2) Figure 2

a) Pour la lumière réfléchie une fois à l'intérieur de la goutte, on trouve que et $\boxed{\alpha = r}$ car le triangle OIJ est isocèle. La loi de la réflexion appliquée en J donne $\boxed{\beta = \alpha = r}$.

Le triangle OJK étant isocèle également : $\boxed{\gamma = \beta = r}$.



Enfin, la loi de la réfraction appliquée en K donne $n.\sin\gamma = \sin\delta$, avec $\gamma = r$ et $n.\sin r = \sin i$, il vient $\boxed{\delta = i}$.

b) Dans le cas où le rayon lumineux subit une réflexion à l'intérieur de la goutte, il subit :
- en I une réfraction qui le dévie de $D_I = i - r$.
- En J il subit une réflexion, ce qui provoque une déviation $D_J = \pi - 2\alpha = \pi - 2r$.
- Il subit enfin en K une réfraction, ce qui provoque une dernière déviation $D_K = \delta - \gamma = i - r$.

La déviation totale est : $D_2 = D_I + D_J + D_K$.

Soit : $\boxed{D_2 = \pi + 2i - 4r}$

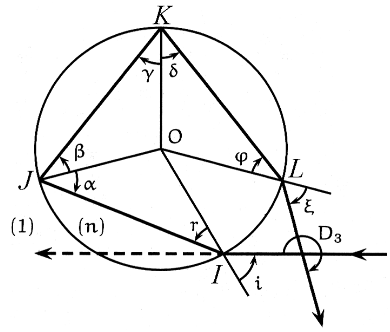
c) En différentiant cette expression : $\mathrm{d}D_2 = 2\mathrm{d}i - 4\mathrm{d}r$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 2 - 4\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$.

La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est : $\dfrac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 0$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{2}$

Par ailleurs, d'après **1)** : $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$.

On doit donc avoir : $n^2 - \sin^2 i = 4(1 - \sin^2 i)$, soit : $\boxed{\sin^2 i = \dfrac{4-n^2}{3}}$.

2) Figure 3



a) Pour la lumière réfléchie deux fois dans la goutte, on a toujours OIJ isocèle qui donne $\boxed{\alpha = r}$.

La loi de la réflexion en J donne $\boxed{\beta = \alpha = r}$. Le triangle OJK étant isocèle, on a $\boxed{\gamma = \beta = r}$.

La loi de la réflexion en K donne $\delta = \gamma = r$. Le triangle OKL étant isocèle : $\boxed{\varphi = \delta = r}$.

Enfin, la loi de la réfraction en L donne $n.\sin\varphi = \sin\xi$.

Comme $\varphi = r$ et que $n.\sin r = \sin i$, on a : $\boxed{\xi = i}$

b) Dans le cas où le rayon lumineux subit deux réflexions à l'intérieur de la goutte, il subit :
- en I une réfraction qui provoque une première déviation $D_I = i - r$,
- puis en J une réflexion, qui provoque une deuxième déviation $D_J = \pi - 2\alpha = \pi - 2r$,
- puis en K une autre réflexion, qui provoque une troisième déviation $D_K = \pi - 2\gamma = \pi - 2r$,
- et enfin en L une réfraction qui provoque une dernière déviation $D_L = \xi - \varphi = i - r$.

$\rightarrow$ La déviation totale est : $D_3 = D_I + D_J + D_K + D_L$. Soit : $\boxed{D_3 = 2\pi + 2i - 6r}$

c) En différentiant cette expression : $\mathrm{d}D_3 = 2\mathrm{d}i - 6\mathrm{d}r$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}D_3}{\mathrm{d}i} = 2 - 6\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}$.

La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est : $\dfrac{\mathrm{d}D_3}{\mathrm{d}i} = 0$, soit : $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \dfrac{1}{3}$

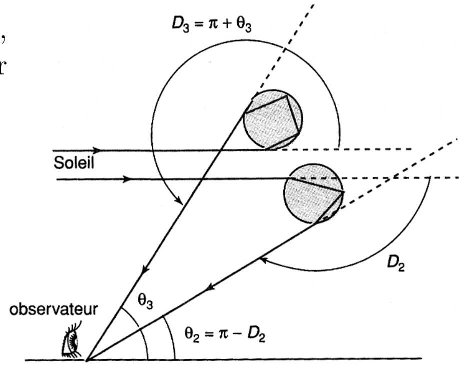
Par ailleurs, d'après **1)** : $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$.

On doit donc avoir : $n^2 - \sin^2 i = 9(1 - \sin^2 i)$, soit : $\boxed{\sin^2 i = \dfrac{9-n^2}{8}}$.

3) • L'observateur regarde vers l'horizon, dans la direction du rideau de pluie qui provoque le phénomène de déviation de la lumière incidente du Soleil. Il observe des maxima d'intensité lumineuse pour les deux configurations calculées à la question précédente.

Toutes les gouttes susceptibles de donner l'angle d'observation adéquat sont situées sur un cône de sommet l'œil de l'observateur, d'axe la direction incidente du Soleil, et d'angle au sommet θ_2 pour l'observation de l'arc primaire (correspondant à une incidence i_2 sur la goutte). On a donc : $\boxed{\theta_2 = \pi - D_2}$

• On obtient le même phénomène pour l'arc secondaire, mais cette fois-ci, l'angle θ_3 d'observation est donné par $\boxed{\theta_3 = D_3 - \pi}$

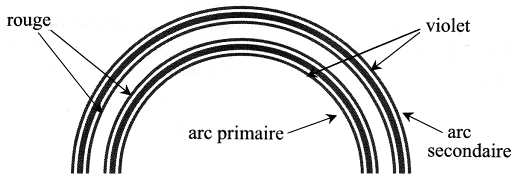


4) On a :

$$\begin{array}{rcl|rcl} \sin^2 i_2 &=& \dfrac{4-n^2}{3} & \sin^2 i_3 &=& \dfrac{9-n^2}{8} \\ n.\sin r_2 &=& \sin i_2 & n.\sin r_3 &=& \sin i_3 \\ D_2 &=& \pi + 2i_2 - 4r_2 & D_3 &=& 2\pi + 2i_3 - 6r_3 \\ \theta_2 &=& \pi - D_2 & \theta_3 &=& D_3 - \pi \end{array}$$

Angles (°)	i_2	r_2	D_2	θ_2	i_3	r_3	D_3	θ_3
Violet	58,73	39,46	139,62	40,38	71,46	44,83	233,94	53,94
Rouge	59,48	40,31	137,72	42,28	71,88	45,54	230,52	50,52

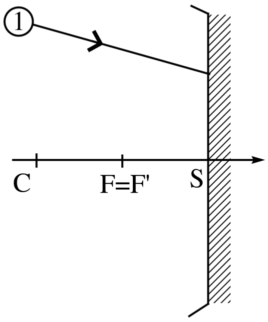
Un observateur situé face au rideau de pluie verra ici deux arcs-en-ciel :
- l'arc primaire allant du violet au rouge en partant de l'intérieur,
- et l'arc secondaire, plus grand, et moins intense (puisqu'une partie de la lumière a déjà été dispersée dans la formation de l'arc primaire) allant du rouge au violet.



■ Miroirs sphériques

O3

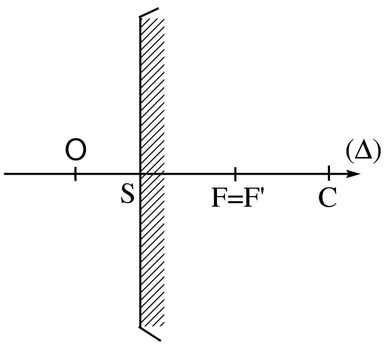
Ex-O3.1 Tracé de rayon pour un miroir concave



Compléter le tracé du rayon ① :

1) En utilisant des rayons parallèles à ① (deux méthodes)
2) En utilisant des rayons coupant ① le plan focal objet (deux méthodes)
3) En envisageant un objet AB fictif, judicieusement choisi, et son image $A'B'$.

Ex-O3.2 Tracé d'image pour un miroir convexe



Soit un miroir convexe de rayon $\overline{SC} = +60\ cm$. Quelle est la position de l'image $A'B'$, sa nature et le grandissement transversal correspondant dans les deux cas suivants
1) l'objet AB est tel que $\overline{SA} = -30\ cm$
2) l'objet AB est tel que $\overline{SA} = +15\ cm$. Peut-on se servir de la question précédente pour éviter les calcul ?
3) Trouver la position de l'objet AB qui conduit à un grandissement transversal $G_t = -\frac{1}{2}$. Quelle est sa nature ?
✠ On fera une figure à l'échelle pour chacune des questions.

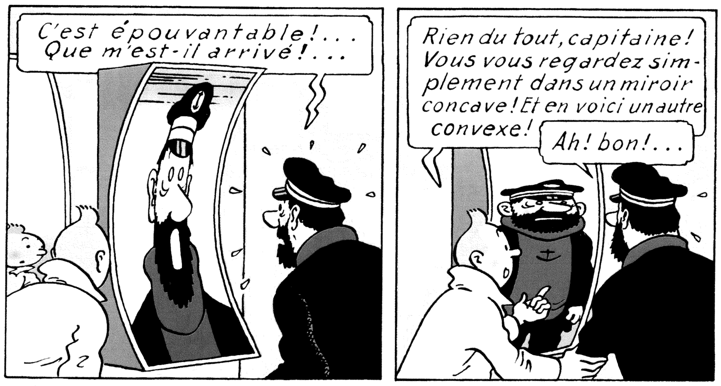
Rép : 1) $\overline{SA'} = +15\ cm$, $G_t = \frac{1}{2}$; **2)** $\overline{SA'} = -30\ cm$, $G_t = 2$; **3)** $\overline{SA} = +60\ cm$

Ex-O3.3 Petite cuillère

Un individu a son œil placé à $25\,cm$ du creux d'une petite cuillère considérée comme un miroir sphérique convergent.
1) Sachant que l'individu voit son œil inversé et réduit d'un facteur 9, calculer le rayon de courbure de la cuillère.
2) Quel est le grandissementde la nouvelle image si l'individu retourne la cuillère, tout en conservant la même distance de $25\,cm$?
Rép : 1) $\overline{SC} = -5\ cm$; **2)** $G_t = 9/100$

Ex-O3.4 Tintin et Haddock

Dans *Le Trésor de Rackham le Rouge*, Haddock découvre les lois de l'optique géométrique...
À l'aide de deux schémas, justifiez les explications de Tintin.
À travers quel miroir Haddock pourrait-il s'observer la tête en bas et les pieds en l'air ? Faire un schéma.
En considérant la case dessinée par Hergé, évaluer alors la focale du miroir correspondant.



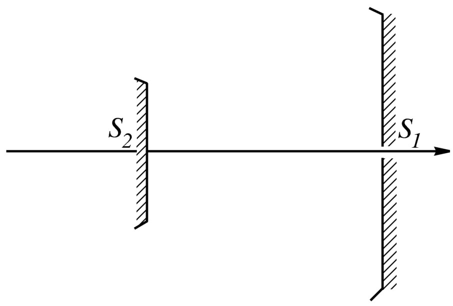
Ex-O3.5 Autocollimation : On considère un miroir sphérique concave, de centre C et de rayon $R = \overline{SC} < 0$. Un objet transverse AB est placé avant le miroir, et celui-ci en fait une image $A'B'$.

1) Exprimer le grandissement $G_t = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ du miroir en fonction de la position de l'objet ($p = \overline{SA}$) et celle de l'image ($p' = \overline{SA'}$) sur l'axe optique.
2) On veut que l'image se forme dans le plan de l'objet. Quel est le grandissement du miroir ?
3) Quelle position particulière occupe alors l'objet ? En déduire une méthode de détermination expérimentale de la distance focale d'un miroir concave.
4) Cette méthode est-elle transposable au cas d'un miroir convexe ?

Rép : 1) ➜ Cf. Cours $G_t = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{p'}{p}$; **2)** $A = A'$, donc $p = p'$ et $G_t = -1$;
3) En utilisant la relation de conjugaison avec origine au centre, on obtient : $A = C$; **4)** Pas de manière très pratique car l'objet doit être virtuel, et donc l'image aussi.

Ex-O3.6 Principe du télescope de Cassegrain (*)

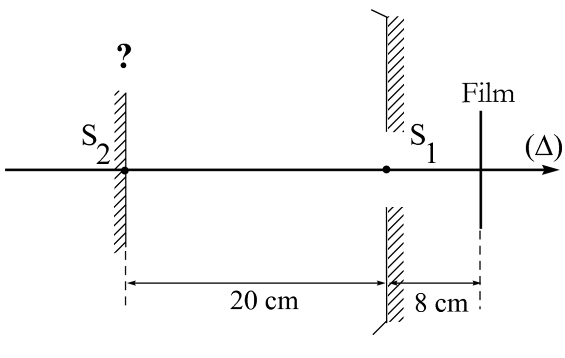
Un miroir sphérique concave de sommet S_1 et de distance focale $f_1 = 100\ cm$, percé au voisinage du sommet et un petit miroir sphérique convexe, de sommet S_2 et de distance focale f_2 sont disposés de telle sorte que leur axe principal commun S_1S_2 soit aligné avec le centre du soleil. Sachant que le soleil est vu de la terre sous un angle $2\alpha = 10^{-2}\ rad$ et que le diamètre de son image, qui se forme en S_1, est $5\ cm$:



1) Étudier l'image intermédiaire du soleil donnée par le miroir concave supposé seul.
2) Représenter la marche des rayons provenant du disque solaire et se réfléchissant sur les 2 miroirs.
3) Calculer f_2 et $\overline{S_1S_2}$.

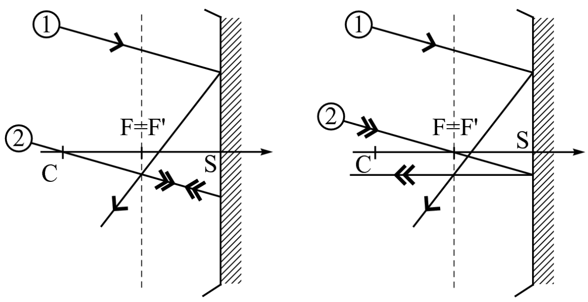
Ex-O3.7 Téléobjectif à deux miroirs (*)

Un téléobjectif est constitué de deux miroirs : un miroir concave $\mathcal{M}_1$ de $30\,cm$ de focale, percé d'un trou en son sommet S_1, et d'un miroir $\mathcal{M}_2$.
1) Quel doit être le rayon de courbure de $\mathcal{M}_2$ pour que l'image d'un objet placé à l'infini sur l'axe se forme sur le plan du film ?
2) Quel doit être le diamètre d_2 de $\mathcal{M}_2$ pour que tous les rayons réfléchis par $\mathcal{M}_1$ de diamètre $d_1 = 10\ cm$ soient collectés par $\mathcal{M}_1$?
3) Quel doit être le diamètre d_3 du trou pour que les rayons atteignent le film ?



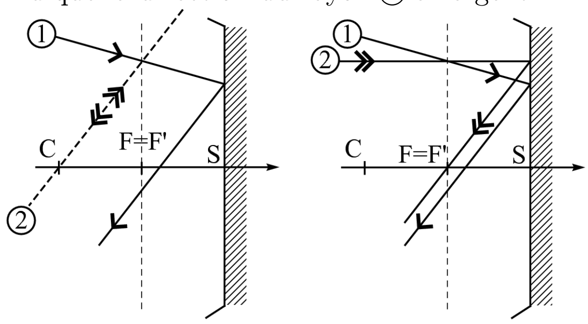
Solution Ex-O3.1

1) On trace un rayon ② parallèle à ① passant par C (il n'est pas dévié) ou par F (il émerge parallèlement à l'axe optique). Les deux rayons ① et ② incidents peuvent être supposés venir d'un objet ponctuel placé à l'infini dont l'image est un foyer image secondaire.



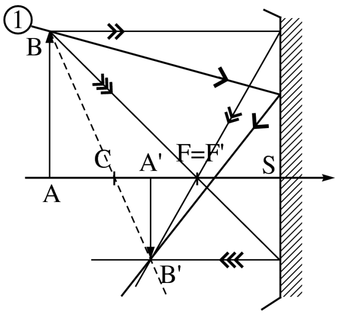
2) On trace un rayon ② incident venu de C et passant par l'intersection de ① avec le plan focal objet. Cette intersection peut être considérée comme un foyer objet secondaire dont l'image est à l'infinie. Les rayons émergents doivent donc être parallèles entre eux. Le rayon passant par C n'étant pas dévié, il indique la direction du rayon ① émergent.

On trace un rayon ② incident parallèle à l'axe optique passant par l'intersection de ① avec le plan focal objet. Cette intersection peut être considérée comme un foyer objet secondaire dont l'image est à l'infinie. Les rayons émergents doivent donc être parallèles entre eux. Le rayon ② émerge en passant par $F' = F$; il indique la direction du rayon ① émergent.



3) On imagine un objet AB dont l'extrémité B est traversée par ①.

On construit l'image $A'B'$ de AB en utilisant les rayons utiles issus de B et on complète ① sachant qu'il passe aussi par B'.



Solution Ex-O3.7

1) • $\boxed{A_\infty \xrightarrow{\mathcal{M}_1} F'_1 = A' \xrightarrow{\mathcal{M}_2} A''_{\in \text{Film}}}$

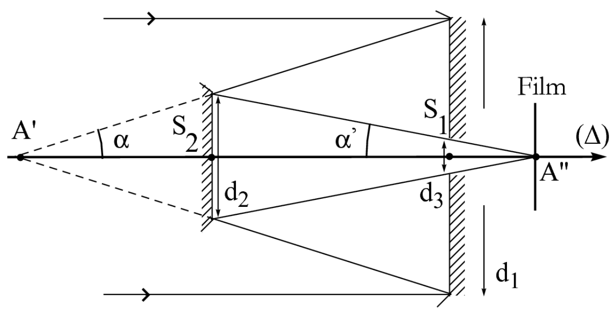
L'objet A_∞ est à l'infini, son image intermédiaire est au foyer de $\mathcal{M}_1$, soit : $\overline{S_1A'} = \overline{S_1F_1} = -30\,cm$, d'où : $p_2 = \overline{S_2A'} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A'} = +20 - 30 = -10\,cm$.

De plus, comme A'', image de A' à travers $\mathcal{M}_2$, doit appartenir au film photographique, on a : $p'_2 = \overline{S_2A''} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A''} = +20 + 8 = +28\,cm$.

→ alors, en utilisant la relation de conjugaison pour $\mathcal{M}_2$ $\left(\dfrac{1}{p'_2} + \dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{f_2} = \dfrac{2}{\overline{S_2C_2}}\right)$, on obtient :

$$\boxed{\overline{S_2C_2} = R_2 = 2\frac{p'_2\,p_2}{p'_2 + p_2} = -31,1\,cm}$$

Rq : le miroir $\mathcal{M}_2$, pour la lumière incidente est un miroir concave (comme $\mathcal{M}_1$), mais c'est en tant que miroir convexe qu'il est utilisé puisqu'il agit sur les rayons réfléchis par $\mathcal{M}_1$!



2) Pour que tous les rayons réfléchis par $\mathcal{M}_1$ soient collectés, il faut qu'ils frappent tous $\mathcal{M}_2$ pour ensuite revenir sur $\mathcal{M}_1$. Pour cela, on doit avoir :

$$\tan\alpha = \frac{d_2}{2\,S_2A'} = \frac{d_1}{2\,S_1A'}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d_2 = d_1\frac{S_2A'}{S_1A'} = 10.\frac{10}{30} = 3,33\,cm}$$

3) Pour que tous les rayons atteignent le film, on doit avoir : $\tan\alpha' = \dfrac{d_2}{2\,S_2A''} = \dfrac{d_3}{2\,S_1A''}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d_3 = d_2\frac{S_1A''}{S_2A''} = 3,3.\frac{8}{28} = 0,95\,cm}$$

■ Lentilles minces et applications

Ex-O4.1 lentille simple

Un objet AB de taille $1,0\ cm$ est placé $5,0\ cm$ avant le centre optique O d'une lentille convergente,d e distance focale $f' = 2,0\ cm$ (AB est perpendiculaire à l'axe optique).

1) Calculer la vergence de la lentille et préciser son unité.

2) Construire l'image $A'B'$ de AB en utilisant les trois rayons «utiles». Mesurer alors $\overline{A'B'}$ et $\overline{OA'}$.

3) Retrouver $\overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$ par le calcul.

4) Calculer le grandissement G_t. Que peut-on dire de l'image ?

5) Nommer et rappeler les conditions d'utilisation des expressions précédentes.

Rép : 1) $V = 50\ \delta$

2) $\overline{OA'} \simeq +3,3\ cm$ et $\overline{A'B'} \simeq -0,7\ cm$

3) $\overline{OA'} = \dfrac{\overline{OA}\, f'}{\overline{OA} + f'} \simeq +3,3\ cm$

et $\overline{A'B'} = \dfrac{\overline{AB}\, f'}{\overline{OA} + f'} \simeq -0,67\ cm$

4) $G_t = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\dfrac{2}{3} \simeq -0,67 < 0$: image renversée

5) Cf. Conditions de Gauss.

Ex-O4.2 Projection à l'aide d'une lentille convergente

On désire projeter, à l'aide d'une lentille mince convergente, l'image d'un petit objet AB sur un écran E parallèle à AB. La distance de AB à E est donnée et égale à D. On souhaite obtenir un grandissement égal à a en valeur absolue. Quelle distance focale f' doit avoir la lentille utilisée ?

A.N. : $a = 10$ et $D = 2\ m$.

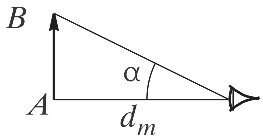
Rép : $f' = \dfrac{D}{\frac{1}{a} + 2 + a} = \dfrac{aD}{(1+a)^2} \simeq 16,5\ cm$.

Ex-O4.3 Loupe (*)

Pour examiner un petit objet AB à l'œil nu, en observant le maximum de détails, on doit l'approcher le plus près possible de l'œil. L'expérience montre cependant qu'il existe une distance minimale de vision distincte, notée d_m, en dessous de laquelle l'œil ne peut plus accommoder.

Le plus grand angle sous lequel on peut voir à l'œil nu l'objet AB est donc : $\alpha = AB/d_m$ (nous supposons l'objet assez petit pour pouvoir confondre l'angle et sa tangente).

Pour un œil normal, d_m est de l'ordre de $25\ cm$. Le point A correspondant est appelé *punctum proximum* (P.P.).



Toutefois l'observation rapprochée est fatigante, car l'œil doit accommoder ; l'observation idéale correspond à un objet éloigné (objet à l'infini) – alors, l'oeil n'accommode plus et on dit que l'objet observé est au *punctum remotum* (P.R.) de l'oeil.

Il est possible d'obtenir cette condition, tout en augmentant l'angle sous lequel on voit l'objet AB ; il suffit en effet de placer AB dans le plan focal objet d'une lentille convergente de focale f'.

L'image est alors à l'infini. On appelle α' l'angle sous lequel cette image est observée.

1) Montrer que le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ de la loupe vaut $\dfrac{0,25}{f'}$.

Rq : Attention ! dans cet exercice, le grossissement n'a pas la même définition que celle qui a été donnée en cours.

A.N. : $G = 2$. Calculer la distance focale puis la vergence (ou puissance) de la loupe.

2) Mettre au point, c'est amener l'image dans le champ de vision de l'œil entre le *punctum remotum* (qui est à l'infini) et le *punctum proximum*.

Le petit déplacement correspondant de l'ensemble {loupe-œil} s'appelle la latitude de mise au point.

→ Calculer la latitude de mise au point d'une loupe constituée par une lentille mince convergente de $3\ cm$ de distance focale pour un œil restant au foyer image de la loupe.

Rép : **1)** Faire un schéma de la lentille utilisée comme loupe avec un objet AB placé dans son plan focal objet. Faire apparaître le trajet de 2 rayons incidents issus de B : (1) celui qui arrive sur la lentille parallèlement à l'axe optique et (2) celui qui passe par le centre optique O.
Où se trouve α' sur le schéma ? Exprimer α' en fonction de AB et de f' en se souvenant qu'on travaille dans les conditions de GAUSS ; idem pour α tel que défini dans l'énoncé. En déduire G.
On trouve $V = +8\ \delta$.
2) Latitude de mise au point Δp : sur le même schéma, comprendre où doivent se trouver les deux positions extrêmes A_1 et A_2 de A pour que : (1) $A'B'$ soit observée à l'infini (P.R. $= +\infty$ pour un œil idéal) ou (2) $A'B'$ soit observée à la distance minimale d'observation (P.P. $= d_m$).
On trouve $\Delta p = \overline{OA_1} - \overline{OA_2} = \overline{FA_2} = \dfrac{f'^2}{d_m} \simeq +4\ mm$.

Ex-O4.4 Principe du microscope (*)

Un **objectif**, assimilé à une lentille mince $\mathcal{L}_1$ de distance focale f'_1, donne d'un objet réel situé en avant de son foyer objet F_1, très proche de celui-ci, une image réelle A_1B_1.
Cette image est agrandie par l'**oculaire**, assimilé à une lentille mince $\mathcal{L}_2$, jouant le rôle d'une loupe de distance focale f'_2. Si A_1B_1 est située dans le plan focal objet de l'oculaire, l'image définitive $A'B'$ est rejetée à l'infini et l'œil n'accommode pas.
Rq : *Dans la réalité, objectif et oculaire sont formés de nombreuses lentilles.*
Soit un **microscope** pour lequel $f'_1 = 5\ mm$, $f'_2 = 20\ mm$, la distance F'_1F_2 (intervalle optique) est de 18 cm. L'observateur met au point de façon à observer l'image définitive à l'infini.
1) Faire une figure sur laquelle on mettra en évidence la direction de A' et de B' et l'angle α' sous lequel l'observateur voit l'image définitive.
2) Calculer la puissance du microscope, rapport de l'angle α' à la taille de l'objet AB.
3) Les rayons lumineux issus des différents points de l'objet se concentrent après la traversée du microscope dans un cercle voisin du plan focal image de l'oculaire. Si la pupille de l'œil est placée au niveau de ce cercle, appelé **cercle oculaire,** elle reçoit un maximum de lumière.
Sachant que c'est l'objectif qui diaphragme le faisceau lumineux, représenter le trajet des rayons extrêmes pour les deux faisceaux issus de A et de B, puis hachurer les deux faisceaux. L'intersection des faisceaux émergents définit le cercle oculaire.

> **Propriété :** Constater, à l'aide de la construction graphique, *et retenir*, que ce **cercle oculaire** est l'image de l'objectif par l'oculaire.

Rép : $\mathcal{P} = \dfrac{\alpha'}{AB} = \dfrac{e}{f'_1f'_2} = 1\,800\ \delta$.

Ex-O4.5 Principe de la lunette astronomique ou du viseur à l'infini (doublet afocal)

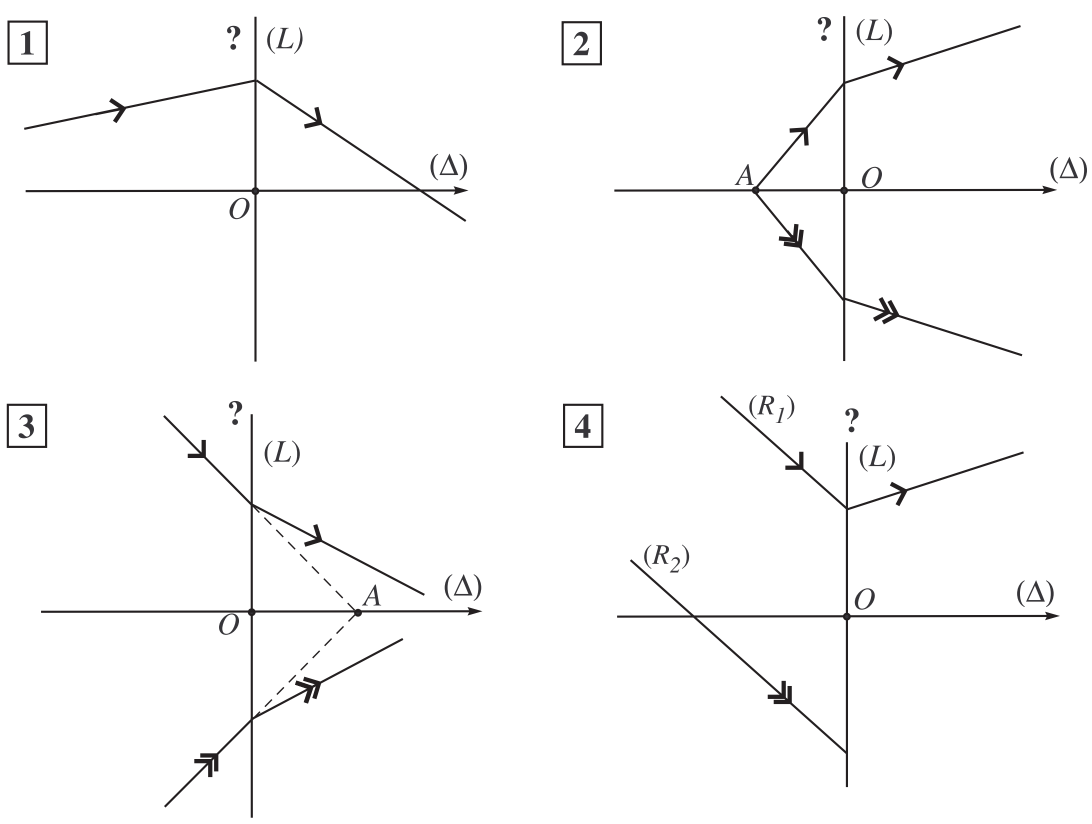
Un objectif de grande focale f'_1 donne d'un objet AB éloigné (considéré comme à l'infini) une image dans son plan focal. Un oculaire joue le rôle de loupe et donne une image à l'infini de l'image donnée par l'objectif. L'objectif et l'oculaire sont assimilés à des lentilles minces convergentes $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.
Soit une petite lunette astronomique pour laquelle $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ ont pour convergences $C_1 = 2\ \delta$ (dioptries) et $C_2 = 50\ \delta$. L'interstice entre les deux lentilles est $e = 52\ cm$.
Où se trouve l'image définitive ? Faire une figure et noter, sur cette figure, α (angle sous lequel est vu un rayon incident issu de B) et α' (angle sous lequel émerge la lumière une fois qu'elle a traversé la lunette).
Montrer que le grossissement de la lunette est $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{f'_1}{f'_2}$. Calculer ce grossissement.

> **Définition :** l'énoncé appelle **convergence**, notée C, ce que nous appelons dans le cours **vergence**, notée V. Il s'agit bien de la même notion.

Ex-O4.6 **Étude d'un doublet**
On place sur un même axe deux lentilles minces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ à 16 cm l'une de l'autre. La lumière arrive sur $\mathcal{L}_1$ et émerge par $\mathcal{L}_2$. $\mathcal{L}_1$ est une lentille convergente de distance focale $f_1' = 10\ cm$. $\mathcal{L}_2$ est une lentille divergente de distance focale $f_2' = -4\ cm$.
À quelle distance de $\mathcal{L}_1$ doit-on placer un petit objet plan perpendiculaire à l'axe pour en obtenir une image à l'infini ?
Rép : $\overline{O_1A} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1A} = -20\ cm$ (Utiliser la Relation de Newton,).

Ex-O4.7 **Principe de la lunette de Galilée** (jumelles de théâtre)
Les deux lentilles de l'exercice précédent sont maintenant distantes de 6 cm.
1) Où se trouve, pour un observateur situé en arrière de $\mathcal{L}_2$, l'image d'un objet à l'infini vu, à l'œil nu, sous un angle α ?
2) On a ainsi réalisé une lunette de Galilée. Calculer le grossissement ($G = \frac{\alpha'}{\alpha}$) de cette lunette dans ces conditions d'observation (vision à l'infini et α' étant l'angle sous lequel on voit l'image). Faire une figure à l'échelle avant de vous lancer des des calculs.
Rép : $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f_1'}{f_2'} = 2,5.$

Ex-O4.8 **Tracés de rayons et caractérisation des lentilles**

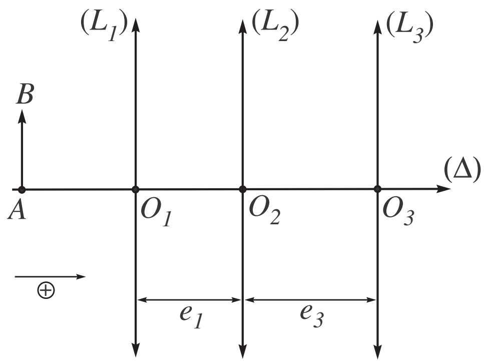


1) Dans les quatre situations représentées ci-dessus, à l'aide d'une série de constructions graphiques qu'il faudra justifier :
- déterminer la position du foyer objet F et du foyer image F' de chaque lentille
- conclure quant à la nature de chaque lentille (et compléter sa représentation graphique).
2) Sur la figure **2**, quelle est la nature et la position de l'image A' de A à travers $(\mathcal{L})$?
3) Même question pour la figure **3**.
4) Compléter la figure **4** en représentant le rayon émergeant provenant du rayon incident (R_2) (sur le schéma (R_2) est parallèle à (R_1)).

■ Problèmes avec associations de lentilles minces

Ex-O4.9 ENAC 2003 - Épreuve de physique - Questions 25-30

1) Une lentilles mince convergente (L_1) a pour centre O_1, foyer objet F_1, foyer image F'_1 et distance focale f'_1. deux autres lentilles convergentes (L_2) et (L_3) possèdent les caractéristiques notées respectivement :
- pour (L_2) : O_2, F_2, F'_2 et f'_2 ;
- pour (L_3) : O_3, F_3, F'_3 et f'_3.
Les trois lentilles possèdent le même axe optique.
Les distances qui séparent (L_1) de (L_2) et (L_2) de (L_3) sont respectivement e_1 et e_3.
Établir la condition pour que le système soit afocal.



A) $\dfrac{1}{e_1+f'_1} - \dfrac{1}{e_3+f'_3} = \dfrac{1}{f'_2}$ B) $\dfrac{1}{e_1-f'_1} + \dfrac{1}{e_3-f'_3} = \dfrac{1}{f'_2}$
C) $f'_1 + f'_2 = e_1 + e_3$ D) $(e_1 - f'_1)(e_3 - f'_3) = f'^2_2$

2) *Dans toute la suite*, on suppose que le foyer F'_1 se trouve en O_2. Comment faut-il choisir e_3 pour que le système des trois lentilles soit afocal ?

A) $e_3 = f'_3$ B) $e_3 = f'_2$ C) $e_3 = f'_1$ D) $e_3 = \dfrac{f'_1 + f'_3}{2}$

3) Sachant que $f'_1 = 4\ cm$ et $f'_3 = 3\ cm$, calculer les grandissements transversal γ et angulaire G du système.

A) $\gamma = -\dfrac{3}{4}$ B) $\gamma = -\dfrac{1}{2}$ C) $G = -2$ D) $G = -\dfrac{4}{3}$

4) Avec les mêmes valeurs des distances focales f'_1 et f'_3, établir la relation de conjugaison entre l'abscisse $x = \overline{F_1A}$ d'un objet AB et l'abscisse $x' = \overline{F'_3A'}$ de son image $A'B'$ exprimées en centimètres.

A) $x' = \dfrac{3}{4}(f'_2 x + 4)$ B) $x' = 2(x - 2f'_2)$
C) $x' = \dfrac{4}{3}(x - 3f'_2)$ D) $x' = \dfrac{9}{16 f'_2}(f'_2 x - 16)$

5) On veut que l'image de O_1 soit F'_3. Quelle valeur de f'_2 faut-il adopter pour qu'il en soit ainsi ?

A) $f'_2 = 2\ cm$ B) $f'_2 = 3\ cm$ C) $f'_2 = 4\ cm$ D) $f'_2 = 6\ cm$

6) Déterminer dans ces conditions les grandissements transversaux γ_1, γ_2 et γ_3 des trois lentilles.

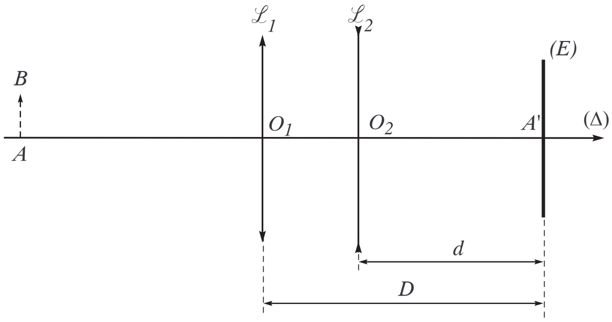
A) $\gamma_1 = -\dfrac{4}{x},\ \gamma_2 = x - 8,\ \gamma_3 = \dfrac{x}{8}(x-8)$ B) $\gamma_1 = -\dfrac{2}{x},\ \gamma_2 = x - 6,\ \gamma_3 = -\dfrac{3x}{8(x-6)}$
C) $\gamma_1 = \dfrac{4}{x},\ \gamma_2 = \dfrac{x}{x-4},\ \gamma_3 = -\dfrac{3}{16}(x-4)$ D) $\gamma_1 = -\dfrac{3}{2x+4},\ \gamma_2 = \dfrac{x}{4},\ \gamma_3 = -\dfrac{(2x+4)}{x}$

Rép. :
1.b)
2.a)
3.a) et **3.d)**
4.d)
5.c)
6.c) .

DL n°2 – Latitude de mise au point (*)

Sur le schéma, la distance D est fixe ; le réglage du système est réalisé en jouant sur la distance d.
Données : $f_1' = 4\ cm$ et $f_2' = -6\ cm$.

On note : $AB \overset{\mathcal{L}_1}{\longrightarrow} A_1B_1 \overset{\mathcal{L}_2}{\longrightarrow} A'B'$.



1. Questions préléminaires (cours) :

Où doit se trouver un objet pour qu'une lentille divergente (de centre O_2, de foyer objet F_2, de foyer image F_2') en donne une image *réelle* ? et dans ce cas, l'image réelle se trouve-t-elle *avant* ou *après* l'objet ? Quelle est alors la nature de l'objet pour la lentille divergente ?

2. Mise au point à l'infini

2.a) Les sytème est réglé de façon à ce que les objets à l'infini donnent une image nette sur l'écran. Quel est nécessairement le signe de $D - f_1'$ pour que ceci soit possible ?
2.b) Lorsque cette condition est réalisée, quelle est la valeur de d, notée d_∞, correspondant à ce réglage ?
Pour répondre à cette question, il faudra montrer que d_∞ vérifie l'équation du second degré suivante :

$$d_\infty^2 + (f_1' - D)\, d_\infty - f_2'\,(f_1' - D) = 0 \qquad \underline{\text{Rép :}}\ d_\infty = \frac{1}{2}\left[D - f_1' + \sqrt{(D - f_1')\,(D - f_1' - 4f_2')}\right]$$

2.c) Si $D = 5\ cm$, que vaut d_∞ ?
→ Faire un schéma du système et construire l'image d'un objet AB à l'infini vu sous l'angle α, pour $D = 5\ cm$.
2.d) Établir que la taille de l'image vérifie la relation $\overline{A'B'} = -\alpha\, \dfrac{d_\infty\, f_1'}{f_1' + d_\infty - D}$.

3. Modification du système

3.a) Lorsque l'on veut mettre au point sur un objet à distance finie, dans quel sens faut-il déplacer la lentille divergente ?
3.b) On souhaite réaliser un système tel que d_∞ corresponde à la valeur D.
→ Quelle est la longueur $D = d_\infty$ à donner au système dans ce cas ?
Indication : deux lentilles minces (de vergences V_1 et V_2) se comportent, si elles sont accolées, comme une lentille unique de vergence égale à la somme des deux vergences.

4. Latitude de mise au point

4.a) Dans le cas précédent ($D = 12\ cm$), indiquer la profondeur de mise au point du système, c'est-à-dire le domaine des positions de l'objet AB susceptibles de donner une image nette sur l'écran lorsqu'on donne à d une valeur adaptée.
4.b) Avec $D = 12\ cm$ et $d = \overline{O_2A'} = +6\ cm$, faire une construction soignée à l'échelle 1 permettant de déterminer la position de A à partir de A'.
Retrouver le résultat par le calcul (donner les valeurs de $\overline{O_2A_1}$ et de $\overline{O_1A}$).

Solution DL n°2 : Latitude de mise au point

1. Questions préliminaires (cours) :

Pour qu'une lentille divergente donne une image *réelle* d'un objet, il faut que cet objet se trouve **entre le foyer objet (F_2) et le centre optique (O_2).** Dans ce cas, l'image réelle se trouve-t-elle **après** l'objet.
$\rightarrow$ L'objet est donc un objet **virtuel** pour la lentille divergente.

2. Mise au point à l'infini

2.a) $AB \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'B'$.
L'image $A'B'$ doit être *réelle* puisqu'elle est recueillie sur une écran.
Il faut donc, d'après la question **I.0)** que les points O_2, A_1 et A' soient dans cet ordre sur l'axe.
De plus, si A est à l'infini, alors $A_1 = F_1'$. On a donc : $\overline{O_1A_1} = f_1' \leq D$, soit : $\boxed{D - f_1' \geq 0}$.

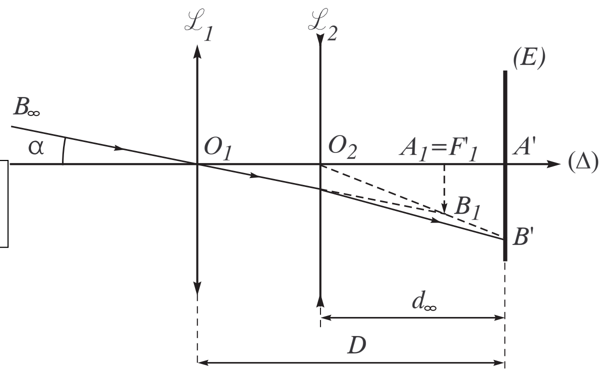
2.b) La relation de Descartes pour $\mathcal{L}_2$ s'écrit ($A_1 = F_1'$) : $\dfrac{1}{\overline{O_2A'}} - \dfrac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \dfrac{1}{f_2'}$,
avec, dans ce cas : $\overline{O_2A'} \equiv d_\infty$, et $\overline{O_2F_1'} = f_1' - D + d_\infty$,
soit : $d_\infty^2 + (f_1' - D)\, d_\infty - f_2'\,(f_1' - D) = 0$
Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = (f_1' - D)^2 + 4f_2'\,(f_1' - D) = (D - f_1')\,(D - f_1' - 4f_2')$$

et $\Delta > 0$ car $D - f_1' \geq 0$ et $f_2' < 0$.

Il y a donc deux solutions dont une seule est positive, la seule acceptable :

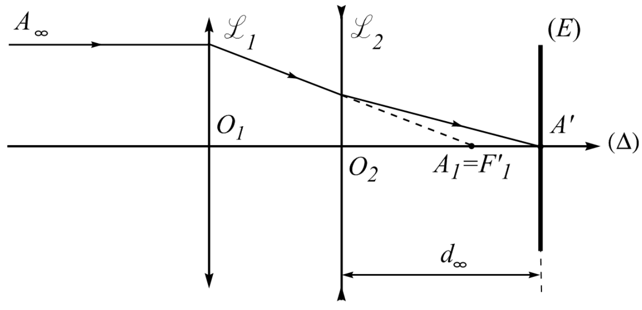
$$\boxed{d_\infty = \frac{1}{2}\left[D - f_1' + \sqrt{(D - f_1')\,(D - f_1' - 4f_2')}\right]}$$



2.c) Si $D = 5\ cm$, alors $\boxed{d_\infty = 3\ cm}$.
L'image A_1B_1 est dans le plan focal image de $\mathcal{L}_1$.
Comme un rayon passant par O_2 n'est pas dévié, on a O_2, B_1 et B' alignés.

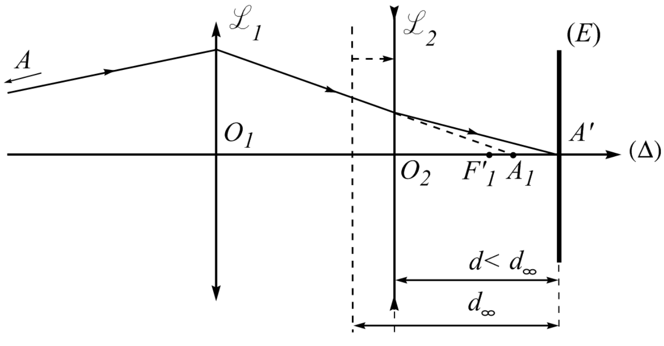
2.d) D'après le schéma, dans les conditions de Gauss :
$\overline{A_1B_1} = -\alpha f_1'$ et $\overline{A'B'} = -\dfrac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2F_1'}}\,\overline{A_1B_1}$.

D'où : $\boxed{\overline{A'B'} = -\alpha\,\dfrac{d_\infty f_1'}{f_1' + d_\infty - D}}$



3. Modification du système

3.a) Dans cette question, l'objet AB est à une distance finie de $\mathcal{L}_1$. Pour que $\mathcal{L}_1$ fasse de l'objet réel AB une image A_1B_1 réelle, il faut que l'objet soit *avant* le foyer objet F_1 ; et dans ce cas, l'image A_1B_1 est *après* le foyer image F_1'.
Cette image A_1B_1 est objet virtuel pour $\mathcal{L}_2$ qui, dans le cas précédent, conjuguait $A_1 = F_1'$ avec A'.



Maintenant que A_1 est *après* F'_1, il faut rapprocher $\mathcal{L}_2$ de A_1 (donc de l'écran) pour à nouveau conjuguer A_1 avec un point image A' sur l'écran immobile.
Il faut donc diminuer la distance d : $d < d_\infty$.

3.b) Si $d_\infty = D$, cela signifie que les deux lentilles sont accolées pour conjuguer un point à l'infini A_∞ avec un point A' sur l'écran. Deux lentilles minces accolées étant équivalentes à une seule lentille mince, l'écran matérialise alors le plan focal image de cette lentille équivalente.

Donc : $d_\infty = D = f'_{eq} = \dfrac{1}{V_{eq}} = \dfrac{1}{V_1 + V_2}$ avec $V_1 = \dfrac{1}{f'_1}$ et $V_2 = \dfrac{1}{f'_2}$

soit : $\boxed{d_\infty = D = \dfrac{f'_1 f'2}{f'_1 + f'_2} = 12\ cm}$

4. Latitude de mise au point

4.a) Profondeur de mise au point du système : elle est associée aux positions limites de la lentille $\mathcal{L}_2$:

- le cas limite $d = D$ correspond à la question précédente : l'objet A est à linfini.
- dans le cas limite où $d = 0$, A_1B_1 est confondu avec $A'B'$ car $O_2 = A_1 = A'$.

La formule de conjugaison de $\mathcal{L}_1$: $\dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} - \dfrac{1}{\overline{O_1A}} = \dfrac{1}{f'_1}$ conduit à

$$\overline{O_1A} = f'_2 = -6\ cm \quad (\text{car } \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{D} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2})$$

Cl : la plage de mise au point est donc de l'infini à 6 cm *en avant* de $\mathcal{L}_1$.

4.b)

- Avec $D = 12\ cm$ et $d = \overline{O_2A'} = +6\ cm$, on a :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2A_1} = 3\ cm}.$$

- On en déduit que $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} = D - d + \overline{O_2A_1} = 9\ cm$.

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \boxed{\overline{O_1A} = -7,2\ cm}.$$