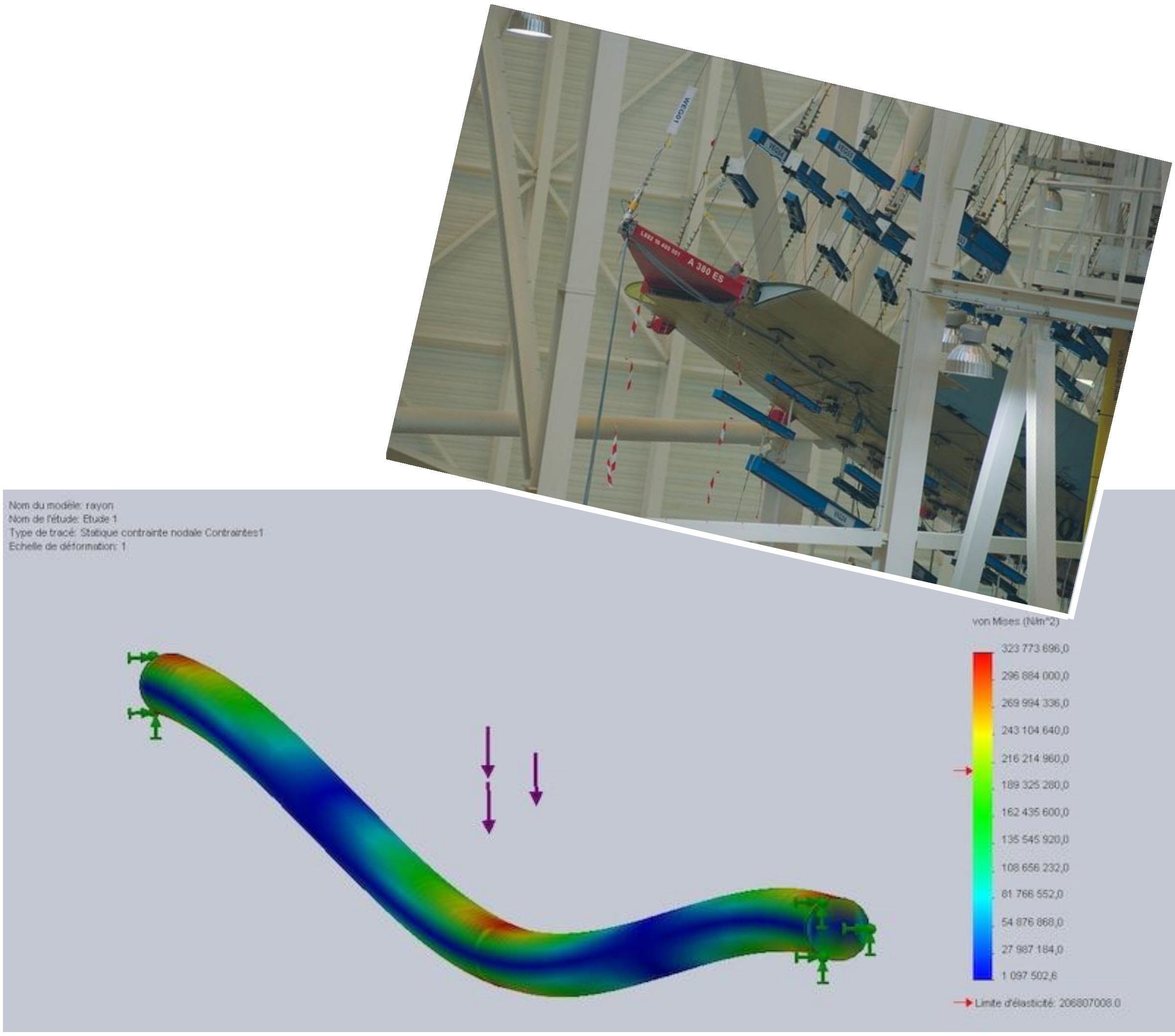
Résistance des matériaux



Objectif :

Identifier les sollicitations subies par un solide.

Sommaire

1- But de la résistance des matériaux

La statique a permis de déterminer les efforts qui sollicitent un solide, celui-ci même si ce n'est pas forcement visible se déforme. Nous entrons donc dans le domaine de la résistance des matériaux.

La résistance des matériaux est donc l'étude de la déformation des matériaux. (arbres de transmission d'un moteur, bâtiments, ponts, . .). Cela permet donc de :
- Déterminer l'amplitude des déformations des solides.(acceptable ou pas)
- Choisir le matériau le plus approprié pour subir ces déformations.
- Vérifier la résistance de ce matériau par rapport à ses capacités propres. (Dépassement de la limite à la résistance élastique du matériau)
- Vérifier la résistance à la rupture (Rupture après un certain nombre de cycles de déformation ou un effort trop important)
- Optimiser la forme d'un solide .
- Déterminer les dimensions du solide capable de résister dans de bonnes conditions aux sollicitations qu'il subit .

2- Généralités

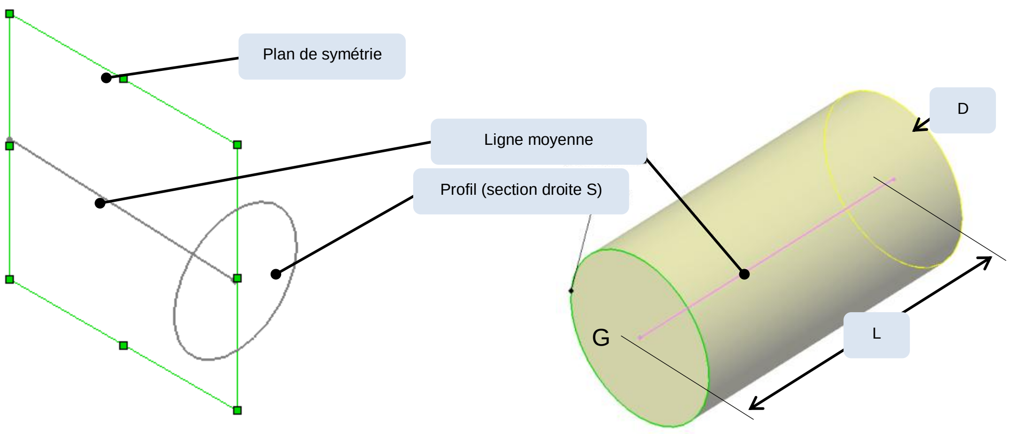
2.1-Notion de poutre

Les notions abordées dans ce cours ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre ; c'est à dire un solide pour lequel :

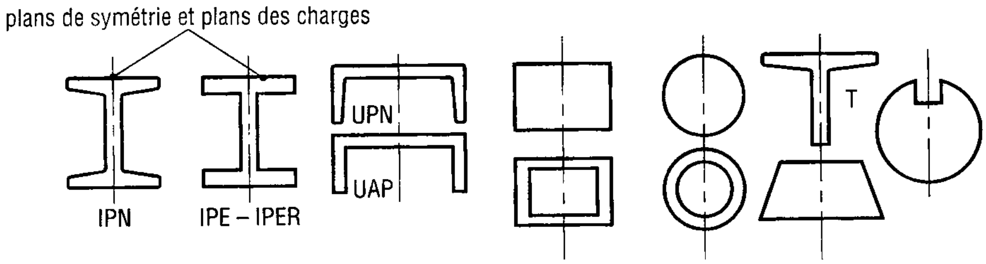
- il existe une ligne moyenne, continue, passant par les barycentres des sections du solide
- la longueur L est au moins 4 à 5 fois supérieure au diamètre D
- il n'y a pas de brusque variation de section (trous, épaulements)
- le solide admet un seul et même plan de symétrie pour les charges et la géométrie.

En résumé :

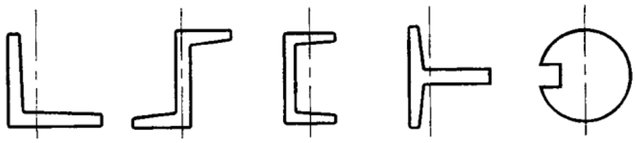
on appelle *poutre* un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane appelée *ligne moyenne*.



Exemples de poutres :



Exemples de poutres ne satisfaisant pas l'hypothèse de symétrie :

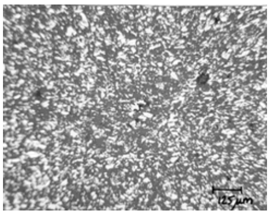
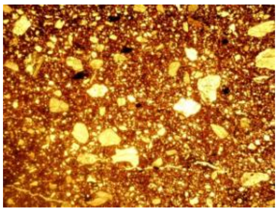


2.2-Hypothèses fondamentales

Les hypothèses de la résistance des matériaux, dans ce cours, sont les suivantes :

- Les matériaux sont ***homogènes*** et ***isotropes*** **(**Qui a les mêmes propriétés physiques dans toutes les directions)

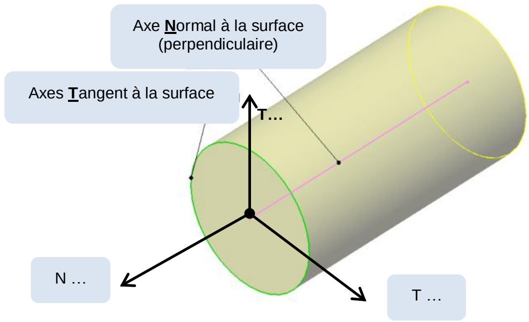
- Homogène - - Non Homogène -

- Il n'y a pas de ***gauchissement*** des sections droites : les sections droites planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation ;
- Toutes les forces extérieures exercées sur la poutre sont contenus dans un plan de symétrie ;
- On suppose que les déformations restent faibles par rapport aux dimensions de la poutre.

3- Les sollicitations simples

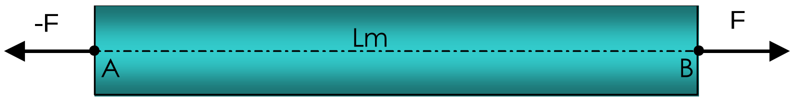
3.1-Repère local et notation



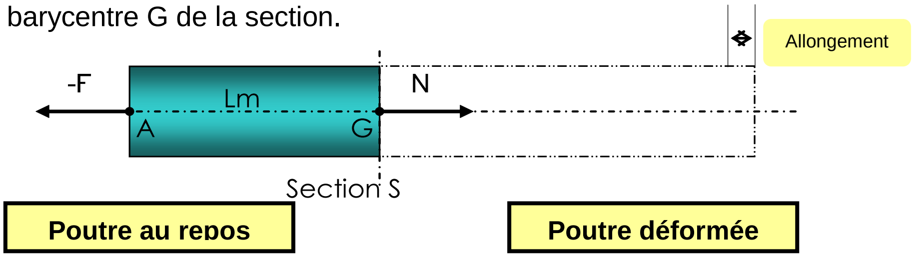
Une désignation particulière des axes s'associe à la notation que nous connaissons jusqu'à maintenant. Aux traditionnels x,y et z s'ajoute la notation N et T qui indique si l'effort est perpendiculaire ou tangent à la surface qui sera étudiée.

3.2-Traction

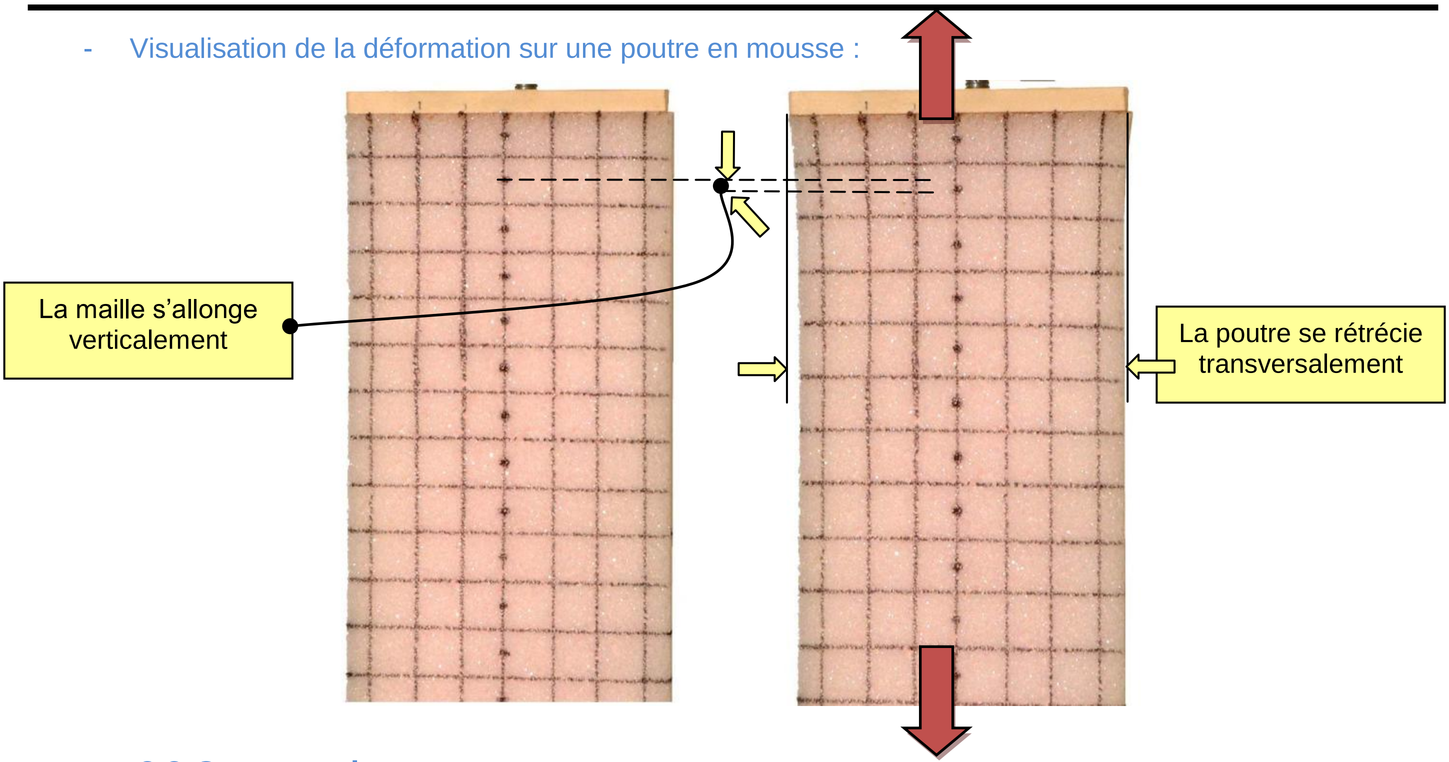
Une poutre est sollicitée en **traction** lorsque les actions aux extrémités se réduisent à **deux forces égales** et **opposées, portées par la ligne moyenne Lm et qui ont pour vocation à allonger cette poutre.**



L'effort F est appelé ***effort normal***, il est noté **N**. Quelle que soit la section considérée de la poutre, l'effort **N** s'exerce toujours au barycentre G de la section.

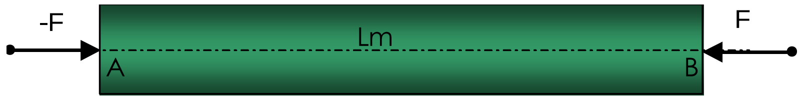


- Visualisation de la déformation sur une poutre en mousse :

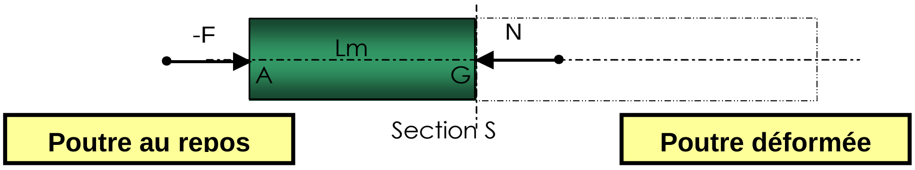


3.3-Compression

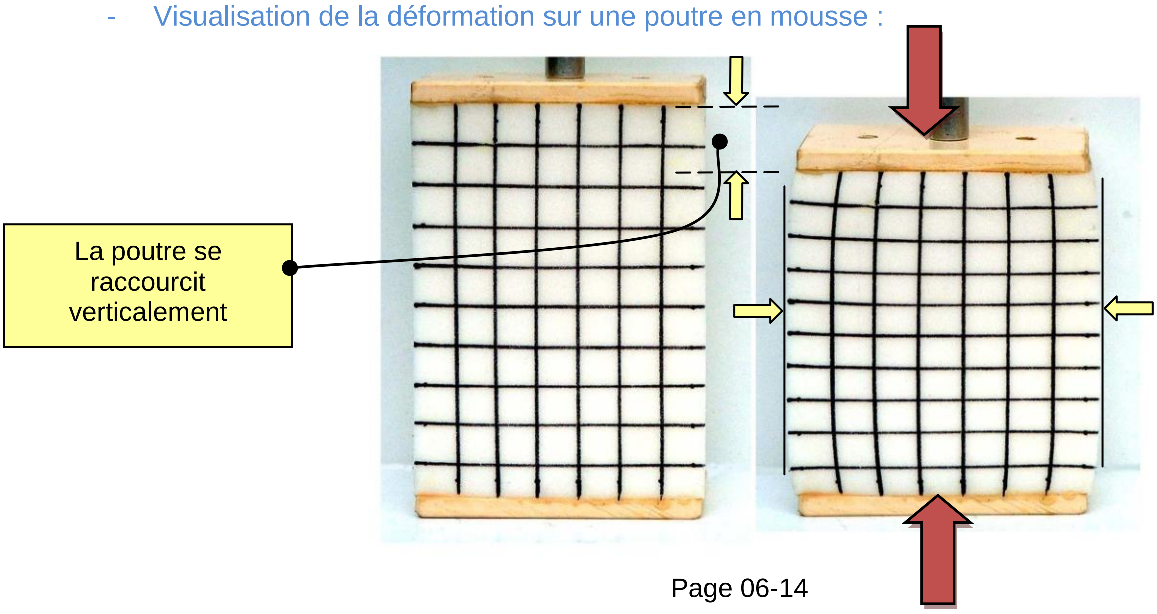
Une poutre est sollicitée à la **compression** lorsque les actions aux extrémités se réduisent à deux forces égales et opposées, portées par la ligne moyenne Lm **et qui ont pour vocation à raccourcir cette poutre.**



L'effort F est appelé *effort normal*, il est noté N. Quelle que soit la section considérée de la poutre, l'effort N s'exerce toujours au barycentre G de la section.

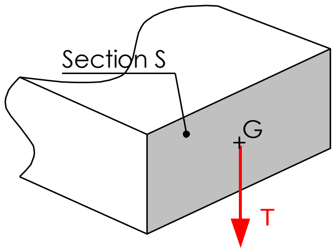


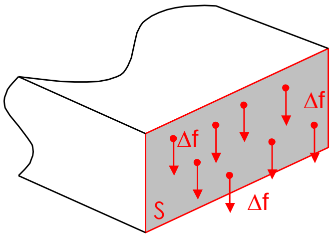
- Visualisation de la déformation sur une poutre en mousse :



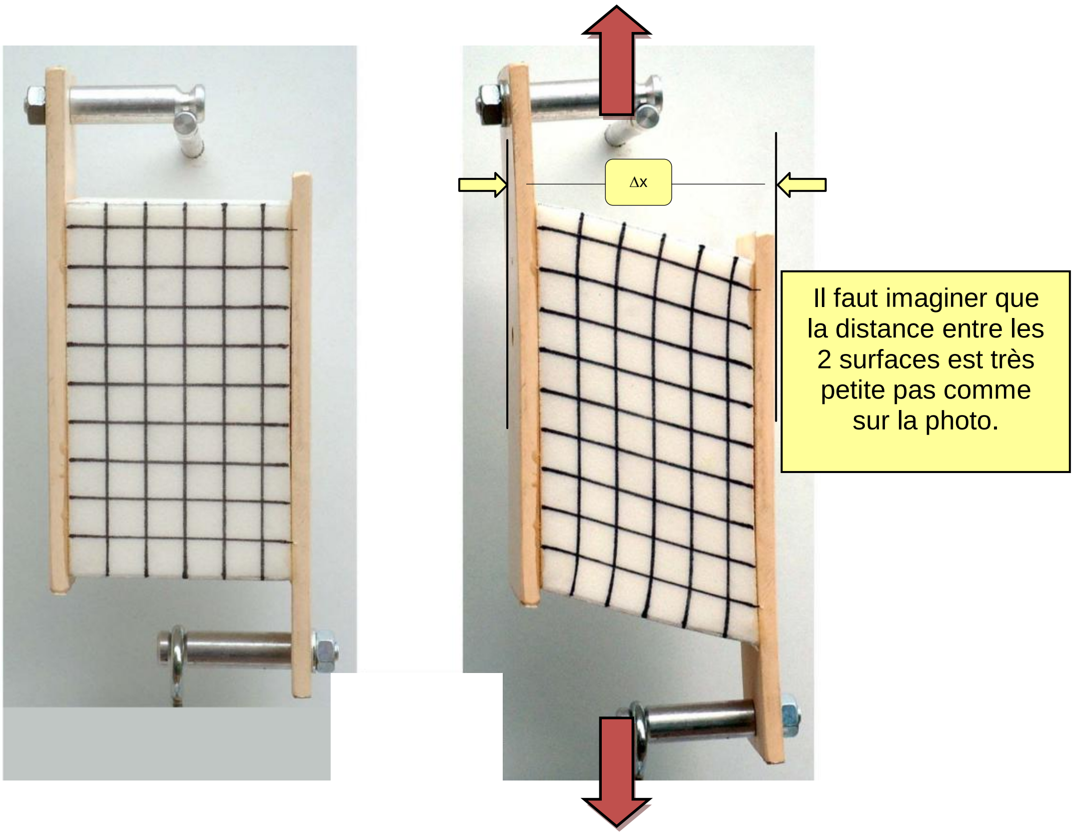
3.4-Cisaillement

Une poutre est sollicitée en cisaillement lorsque sa section S est soumise à **une résultante T** appliquée en G (barycentre de la section) et contenue dans le plan (S).
T est appelé ***effort tranchant***.



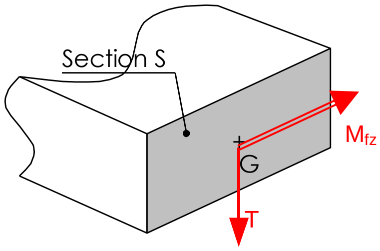


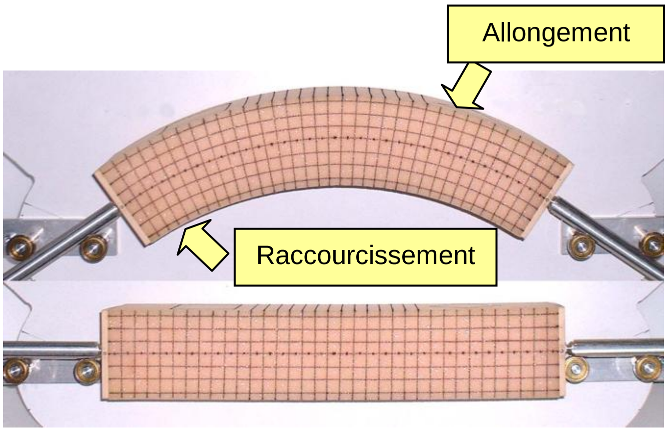
Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S).
Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite.



3.5-Flexion

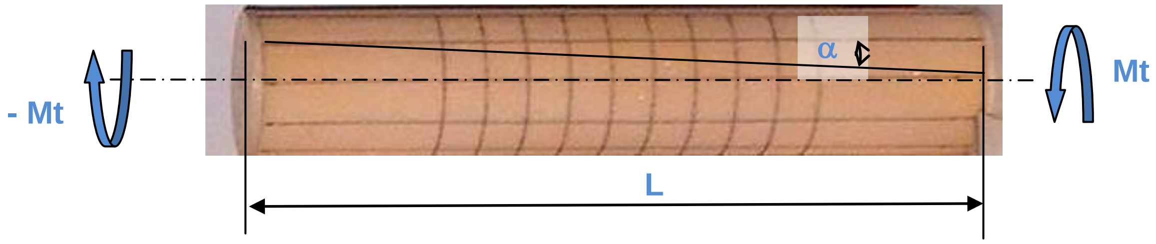
Une poutre est sollicitée en flexion lorsque sa section S est soumise à une action au barycentre composé d'une **résultante T** contenue dans le plan de symétrie et un **moment M_{fz} perpendiculaire à ce dernier**
M_z est appelé ***moment fléchissant***, ou ***moment de flexion***.





3.6-Torsion

Une poutre est sollicitée en torsion lorsque les actions aux extrémités se réduisent à **deux moments égaux** et opposées, portées par la ligne moyenne Lm.

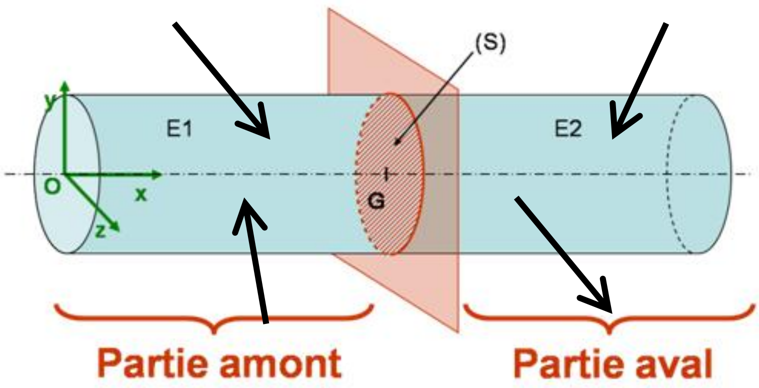


Le moment Mt est appelé ***moment de torsion*** et est noté **Mt** Soit **α l'angle de rotation** entre les deux extrémités de la poutre.

4- Efforts de cohésion

Soit une poutre (E) en équilibre sous l'action de plusieurs actions extérieures. Pour étudier ce solide **déformable**, il faut modéliser ce qui se passe au sein de la matière. Pour se faire, on réalise une **coupure fictive** de la poutre située à l'abscisse x qui la sépare en 2 tronçons E1 et E2.

Les efforts de cohésion traduisent les actions de contact de (E2) sur (E1).Ces efforts de cohésion permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures.
On note les efforts de cohésion de la façon suivante :

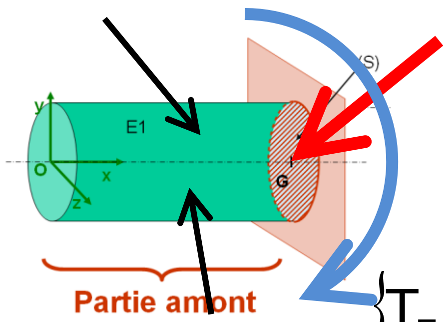


D'après le **PFS**

$$\boxed{\{T_{Ext \to E}\}_G = \{0\}_G}$$

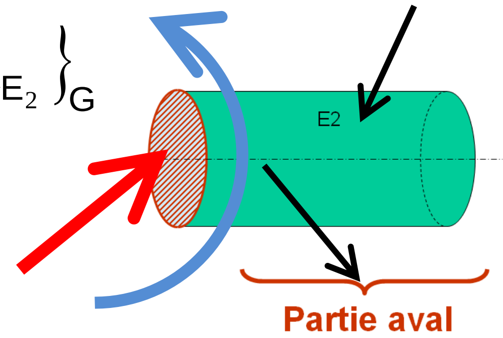
Puisque E = E1 U E2

$$\{T_{Ext \to E}\}_G = \{T_{Ext \to E_1}\}_G + \{T_{Ext \to E2}\}_G = \{0\}_G$$



$$\{T_{E_2 \to E_1}\}_G$$

$$\{T_{E_1 \to E_2}\}_G$$



Equilibre du tronçon E1 :

Avec

$$\{T_{int}\}_G = \{T_{E_2 \to E_1}\}_G$$

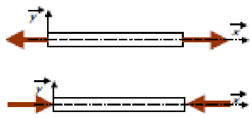
PFS :

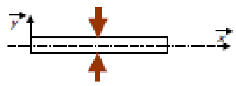
$$\{T_{Ext \to E_1}\}_G + \{T_{int}\}_G = \{0\}_G$$

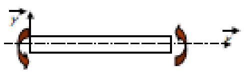
Torseur des efforts intérieurs
=
Torseur de cohésion
=
Torseur de section

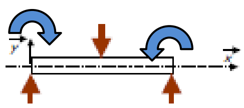
5- En résumé

Sollicitations élémentaires	Composante(s) non-nulle(s)	$\{T_{int}\}_G$
Traction / Compression	**N**	$\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$
Cisaillement pur (suivant $\vec{y}$ ou $\vec{z}$)	**T_y ou T_z**	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ **ou** $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$
Torsion	**Mt**	$\begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$
Flexion pure (autour de $\vec{y}$ ou $\vec{z}$)	**Mf_y ou Mf_z**	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mf_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ **ou** $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$
Flexion simple (autour de $\vec{y}$ ou $\vec{z}$)	**T_y et Mf_z ou T_z et Mf_y**	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G$ **ou** $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mf_y \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$







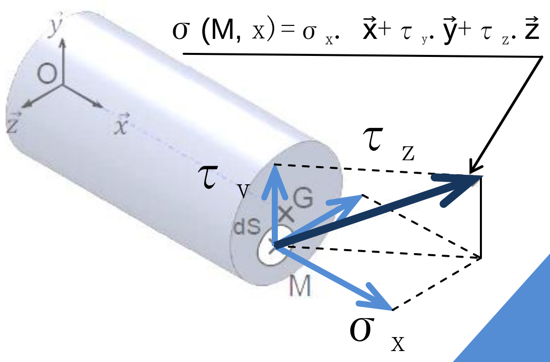


6- Notion de contraintes

Afin de comparer les sollicitations internes à la poutre à la résistance propre du matériau, on va exprimer les sollicitations indépendamment de la dimension de la section.

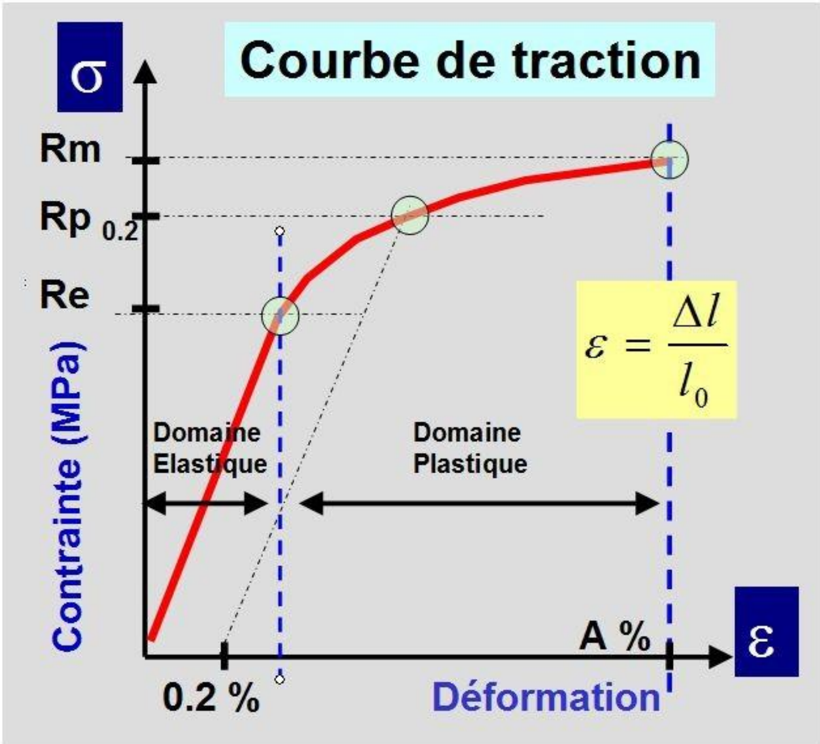
Pour un élément infinitésimal de la section droite dS autour d'un point M, un vecteur contrainte $\sigma\,(M, x)$ est caractérisé par ses composantes :

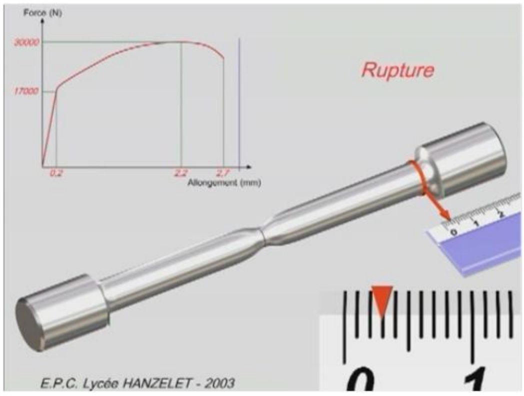
- **contrainte normale** (selon x) noté σ_x
- **contraintes tangentielles** (ou de cisaillement) noté τ_y et τ_z .



7- Traction - Compression

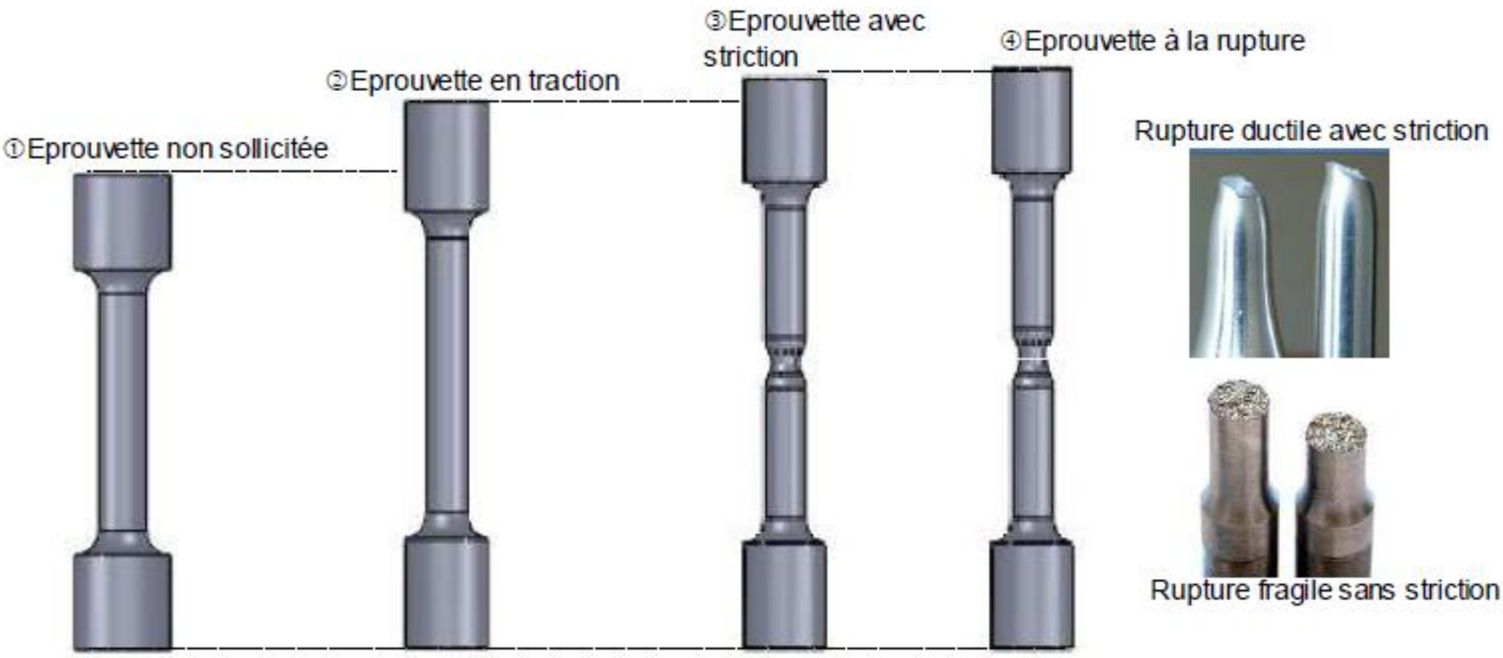
7.1-Essai





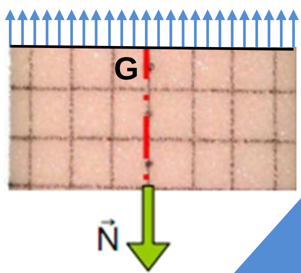
Source : http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=cADYlfHjCrU

Vidéo



7.2 Expression de la contrainte normale σ (sigma)

Dans une coupure de section droite S, chaque élément de surface Δs supporte un effort de traction Δn parallèle à la ligne moyenne.



Dans le cas général de la traction, sauf phénomènes particuliers de concentration de contraintes, on admet qu'il y a une répartition uniforme des contraintes dans la section droite, d'où la relation :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

σ : contrainte normale en N/mm² ou MPa
N : effort normal en N
S : surface section droite en mm²

7.3 Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité la contrainte normale σ_{maxi} doit rester inférieure à **la résistance élastique** du matériau **Re** soit :

$$\sigma maxi = N/S < Re$$

Pour plus de sûreté, on adopte très souvent un coefficient de sécurité C_s (ou s) et on définit alors la résistance pratique à l'extension notée **Rpe** avec **Rpe = Re/s = Re/C_s**

$$\sigma maxi = \frac{N}{S} \leq Rpe \quad \text{ou} \quad \sigma maxi \leq Re/C_s$$

7.4 Déformation et allongement relatif

Les essais de traction montrent que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales **dans le domaine élastique**. Cette propriété peut se traduire par la notion d'allongement relatif ε (epsilon) :

$$\varepsilon = (L-L_0)/L_0 = \Delta L/L_0 \text{ (sans unité)}$$

ΔL : allongement de l'éprouvette en mm
L_0 : longueur initiale de l'éprouvette en mm

Remarque:
Lors d'un essai de traction, on constate que pendant l'allongement il y a une diminution des dimensions des sections droites. Le coefficient de poisson ν (nu) caractérise cette déformation transversale.

$$\nu.\varepsilon = (R-R_0) / R_0 = \Delta R / R_0$$

7.5 Relation entre la contrainte et l'allongement (loi de HOOKE)

Dans le domaine élastique, la contrainte normale est proportionnelle à l'allongement relatif ε et ce traduit par la loi de HOOKE :

$$\sigma = E.\varepsilon$$

$\frac{N}{S} = E.\frac{\Delta L}{L}$, ce qui nous donne, **l'allongement**

$$\Delta L = \frac{N.L}{E.S}$$

E : **module de Young** ou **module d'élasticité longitudinal** en MPa (N/mm²)
L ou L_0 : longueur initiale de la poutre.
N : effort normal en Newton.
S : section droite de la poutre en mm²
ΔL : allongement de la poutre en mm.

7.6 Influence des variations de la section : concentration des contraintes

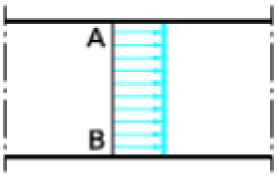
Dans la majorité des cas, les pièces étudiées ne sont pas des poutres parfaites et présentent de brusques variations de section.

Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus uniforme. La contrainte σ_{maxi} engendrée est supérieure à la contrainte uniforme ; on dit qu'il y a **concentration de contrainte.**

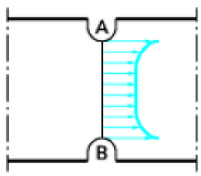
Les abaques ci-dessous permettent de déterminer en fonction du cas, un coefficient **Kt** tel que :

$$\boxed{\sigma \max i = kt \times \sigma}$$ ce qui nous donne $$\boxed{\sigma \max i = kt \times \frac{N}{S}}$$

La condition de résistance s'écrit alors : **σ_{maxi} = Kt x N/S < Rpe**

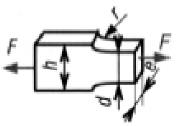
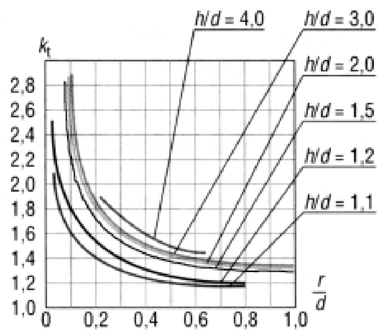
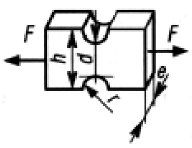
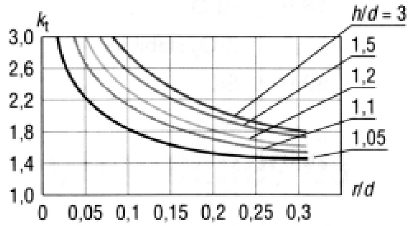
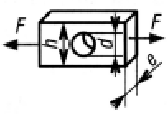
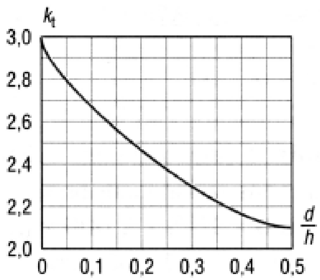


Contrainte uniforme



Contrainte non uniforme

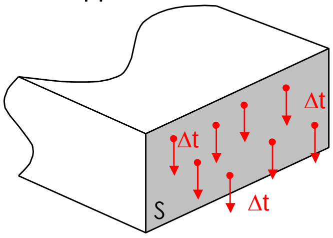
Comment déterminer Kt ?

Type de variation de section	***Abaque***
Diminution de la section avec conge de raccordement 	
Encoches symétriques avec congé de raccordement 	
Perçage sur la ligne moyenne 	

8- Cisaillement

8.1- Expression de la contrainte

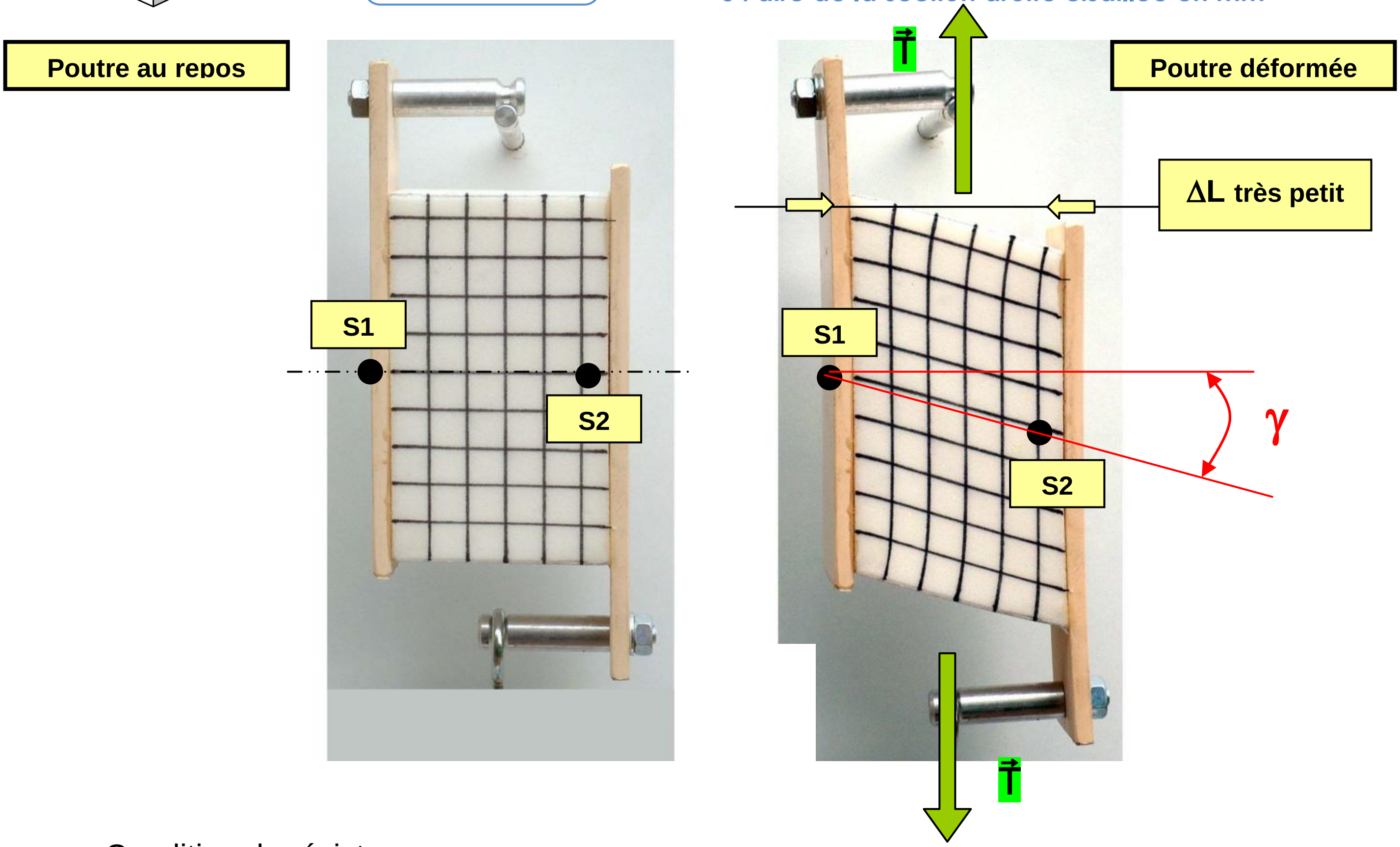
T est appelé ***effort tranchant***.



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S).
Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite.

$$\tau = T / S$$

τ :(Thau) contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm²
T : effort tranchant en Newton
S : aire de la section droite cisaillée en mm²



- <u>Condition de résistance</u>

Soient :
- ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa)
- ☞ Cs ou s : un coefficient de sécurité
- ☞ R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = R_{eg}/s$

Alors, la condition de résistance s'écrit :

$$\tau_{maxi} \leq R_{pg} \quad \text{ou} \quad \tau_{maxi} \leq R_{eg} / C_s$$

<u>- Déformation</u>

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ.

$$\tau = G.\gamma$$

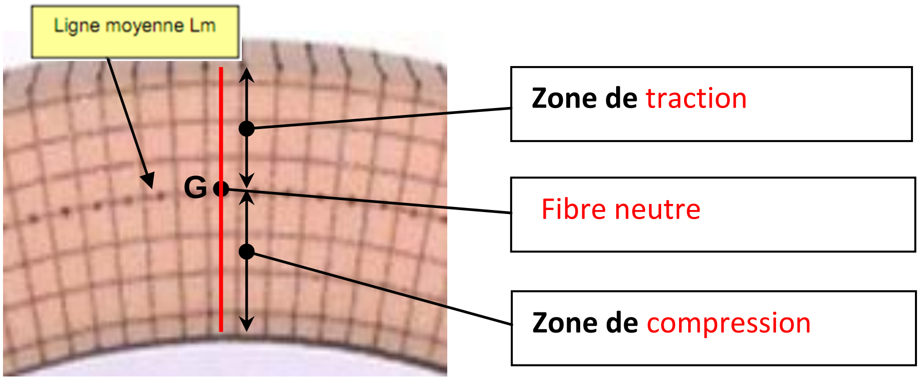
τ : contrainte tangentielle en N/mm²
G : module d'élasticité transversal en Mpa
γ : angle de glissement en radians

9- Flexion

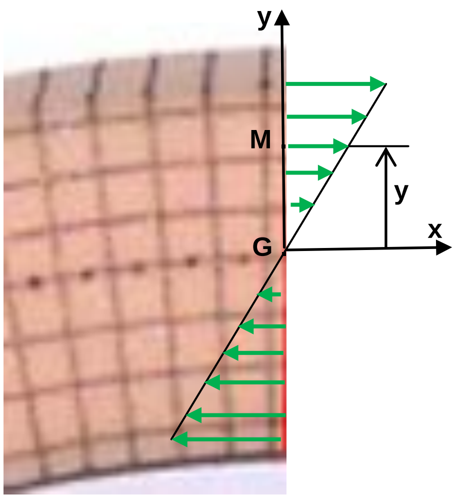
9.1-Essai

Observation de la déformation

Dans la partie supérieure les fibres s'allongent, dans la partie inférieure les fibres s'étirent et au niveau de la ligne moyenne nous n'avons pas d'allongement. On observe aussi que les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne.



9.2 Expression des contraintes normales σ (sigma)



Pour toute poutre sollicitée en flexion la contrainte normale σ en un point M d'une section droite (S) est proportionnelle à la distance **y** entre ce point et le plan moyen passant par G.

$$\boxed{\sigma = \frac{M_{f_z}}{I_{G_z}} . y}$$

Remarque : *le long d'une poutre de section constante* ***σ sera maxi avec Y maxi et M_{fz} maxi.***

σ = contrainte normale (N/mm^2)
M_{fz} = moment fléchissant au pt G (N.mm)
Y = cote du point M ; y = GM (mm)
I_{Gz} = Moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe Gz (mm^4)

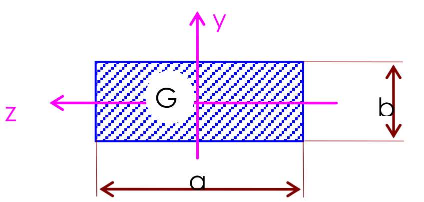
4.3 Condition de résistance

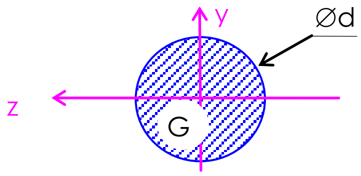
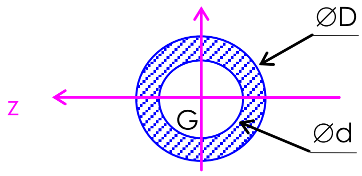
La contrainte normale σ_{maxi} doit rester inférieure à **la résistance pratique à l'extension.**

$$\boxed{\sigma_{maxi} \leq Rpe}$$

9.4 Moments quadratiques usuels

L'unité pour le moment quadratique est le mm^4.

Sections droites	I_{Gz}	I_{Gy}
	$\frac{a.b^3}{12}$	$\frac{b.a^3}{12}$

	$\frac{\pi.d^4}{64}$	$\frac{\pi.d^4}{64}$
	$\frac{\pi.}{64}\left(D^4-d^4\right)$	$\frac{\pi.}{64}\left(D^4-d^4\right)$