Université Paris Descartes / UFR de Mathématiques et Informatique

M1 informatique : Bases du Traitement du Signal
Examen de 2e session - Durée : 2 h

15 juin 2007

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Les réponses au QCM doivent être portées directement sur le premier feuillet, qui est à rendre avec votre copie. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre qui vous conviendra, mais ne dispersez pas les réponses d'un même exercice dans la copie..

1 Questions de cours

1.1 QCM (3 points)

Le barême est de 1 point si votre réponse est entièrement correcte, 0 sinon. Pour les questions 1 et 2, cochez toutes les affirmations justes.

1) Soit $x(t)$ un signal continu périodique.

☐ **Sa transformée de Fourier est un spectre de raies.**
☐ **Sa densité spectrale de puissance contient la même information que $x(t)$.**
☐ **Sa transformée de Fourier contient la même information que $x(t)$.**
☐ **Son spectre d'amplitude contient la même information que $x(t)$.**

2) Un signal aléatoire continu, stationnaire, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (DSP) nulle en dehors de l'intervalle $[-B; B]$ est filtré par un filtre passe-haut de fréquence de coupure $\nu_c < B$.

☐ **Le signal de sortie est aussi stationnaire.**
☐ **On ne peut pas prévoir la moyenne du signal de sortie.**
☐ **Le signal de sortie a des variations temporelles plus rapides que le signal d'entrée.**

3) la figure 1 représente trois signaux temporels numérotés 1 à 3 (ligne du haut) et trois densités spectrales de puissance a, b et c (ligne du bas). Indiquez pour chaque signal temporel la lettre du spectre correspondant :

1 : ... **2 : ...** **3 : ...**

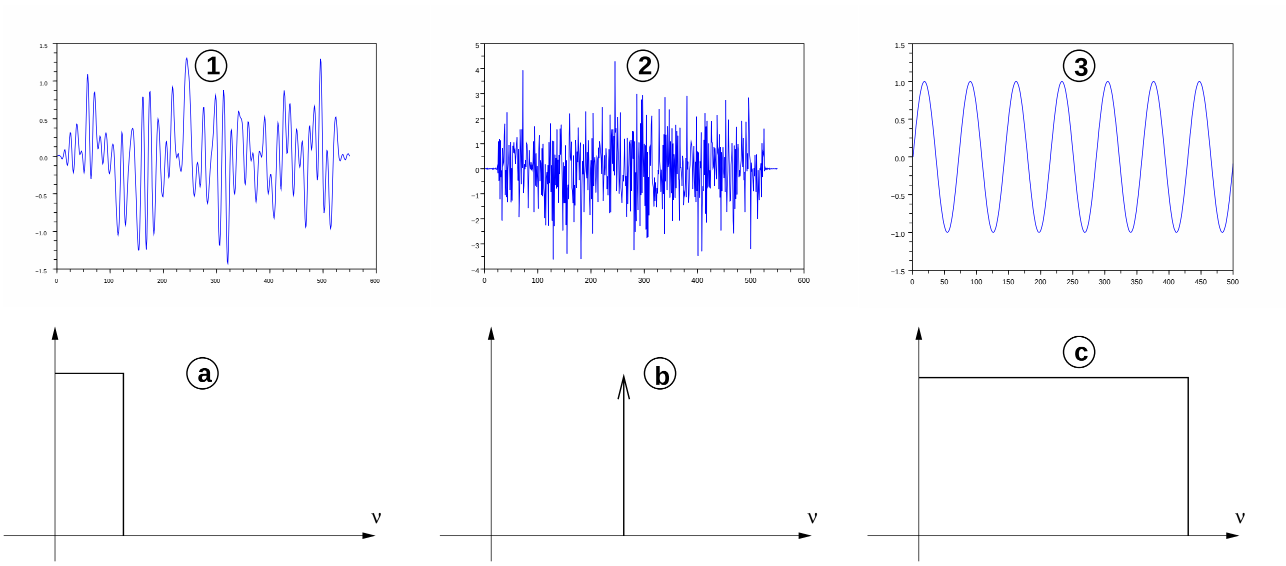

FIG. 1 –

1.2 Questions ouvertes (6 points)

NB : Ces questions appellent des réponses assez courtes.

1) Qu'est-ce qu'un système causal ? Donner un exemple de système non causal (en expliquant pourquoi).

2) Quelles doivent être les caractéristiques d'un filtre anti-repliement ?

3) Pourquoi un filtre récursif est-il toujours stable ?

4) Un signal aléatoire $x(t)$ a deux réalisations possibles, équiprobables, notées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, représentées sur la figure 2. Ce signal est-il stationnaire ? Est-il ergodique ? (justifier vos réponses)

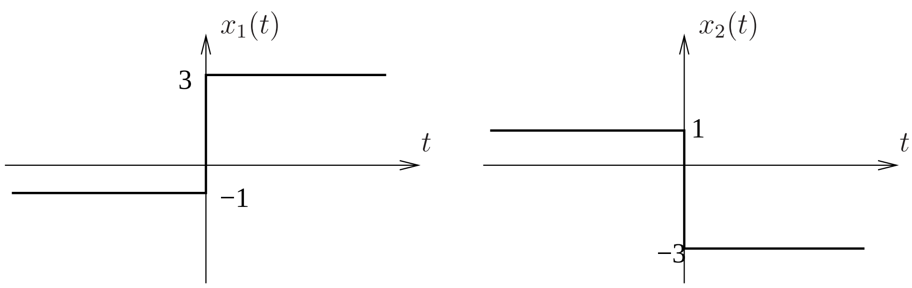

FIG. 2 – Les deux réalisations du signal aléatoire $x(t)$.

2 Exercices

2.1 Multiplexage de données numériques (6 points)

On cherche à transmettre simultanément deux signaux échantillonnés à la fréquence ν_e, $x(n)$ et $y(n)$. Les spectres des signaux analogiques originaux, respectivement $X(\nu)$ et $Y(\nu)$, sont tels que

$$X(\nu) = Y(\nu) = 0 \quad \forall \nu \text{ tel que } |\nu| > \nu_e/4$$

comme le montre la figure 3

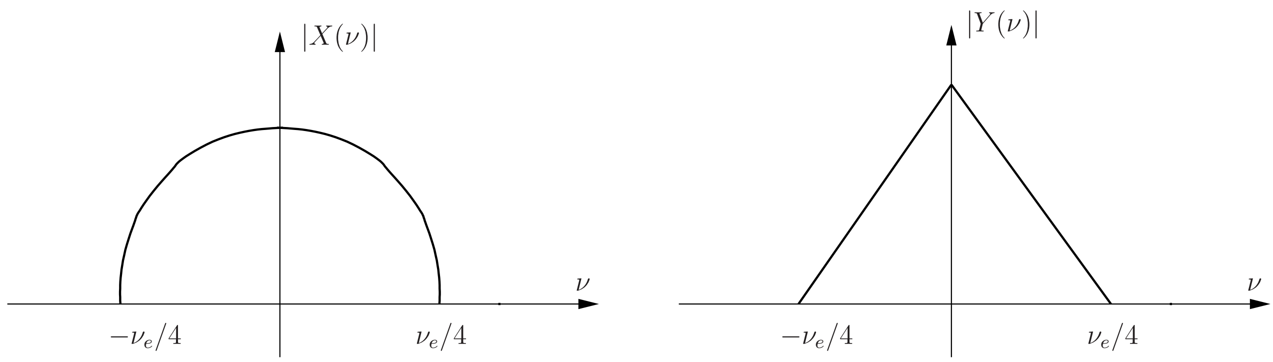

FIG. 3 – Spectres d'amplitude des signaux analogiques originaux.

1) Dessiner les spectres d'amplitude de $x(n)$ et $y(n)$ (respectivement $|X_e(f)$ et $|Y_e(f)|$) pour les fréquences normalisées $f \in \left[-\frac{5}{4}; \frac{5}{4}\right]$

2) On pose $z(n) = (-1)^n y(n)$ et on transmet $w(n) = x(n) + z(n)$. Montrer que

$$Z_e(f) = Y_e(f + 1/2)$$

avec $Z_e(f)$ et $Y_e(f)$ les spectres respectifs de $z(n)$ et $y(n)$ en fréquence normalisée.

3) Dessiner sur la même figure $|X_e(f)|$ et $|Z_e(f)|$. Comment peut-on récupérer $x(n)$ lorsqu'on reçoit $w(n)$?

4) Comment récupérer $y(n)$ lorsqu'on reçoit $w(n)$?

2.2 Analyse d'un filtre numérique (6 points)

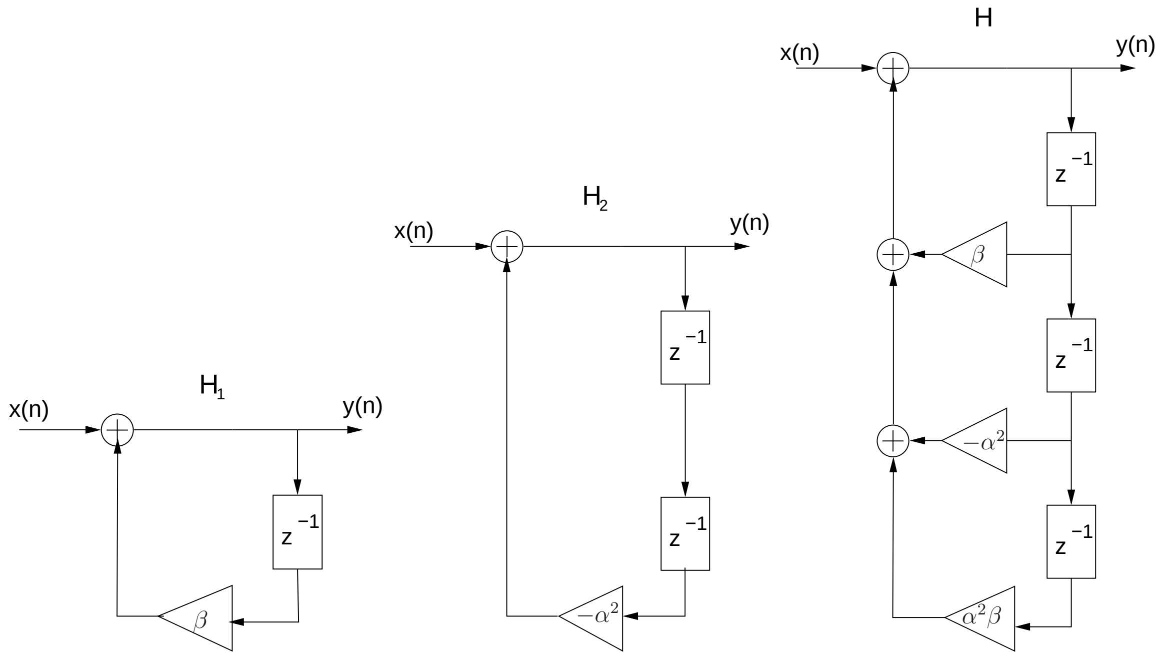

FIG. 4 –

1) Donner les équations aux différences et les fonctions de transfert des trois filtres H_1, H_2 et H représentés sur la figure 4.

2) Montrer que H est équivalent à la mise en cascade de $H1$ et $H2$.

3) Tracer le diagramme pôles-zéros de H pour $\alpha = \beta = 0.8$. Ce filtre est-il stable ?

4) Déduire du diagramme pôles-zéros l'allure du module de la réponse fréquentielle $|H(f)|$.

3 Formulaire

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2}$$
$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{TF}[x(t)] = X(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}t \\
\mathrm{TF}^{-1}[X(\nu)] = x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu t}\mathrm{d}\nu \\
\mathrm{TF}[x(t) * y(t)] &= TF[x(t)].TF[y(t)] \\
\mathrm{TF}[s(t-a)] &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu a}S(\nu) \\
\mathrm{TF}[s(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= S(\nu - \nu_0) \\
\mathrm{TF}[s^{(n)}(t)] &= (\mathrm{j}2\pi\nu)^n S(\nu) \\
\delta(t) &= \mathrm{TF}^{-1}[1] \\
\delta(\nu) &= \mathrm{TF}[1] \\
\mathrm{TF}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\nu_0 t}] &= \delta(\nu - \nu_0)
\end{aligned}$$

Pour $s(t)$ T_0-périodique, avec $T_0 = 1/\nu_0$:

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}, \quad \text{avec} \; : \quad c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\nu_0 t}\mathrm{d}t$$
$$\gamma_s(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \delta_{n\nu 0}(\nu) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Pour $s(t)$ aléatoire stationnaire :

$$\begin{aligned}
\Gamma_s(\tau) &= \mathrm{E}[s(t)s(t-\tau)] \\
\gamma_s(\nu) &= \mathrm{TF}[\Gamma_s(\tau)] \\
P = \mathrm{E}[|s(t)|^2] = \Gamma_s(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_s(\nu)\mathrm{d}\nu
\end{aligned}$$

Convolution :

$$\begin{aligned}
x * y &= y * x \\
x * \delta &= x \\
x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0)
\end{aligned}$$

Pour un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$, réponse $y(t)$ à une entrée $x(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)x(t-\theta)\mathrm{d}\theta$$

Pour $x(t)$ signal déterministe :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$$

Pour x processus aléatoire stationnaire,

$$\mathrm{E}[y] = H(0)\mathrm{E}[x]$$
$$\gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2\gamma_x(\nu)$$

Pour un signal échantillonné à la fréquence $\nu_e = 1/T_e$, $s[n]$:

$$S_e(\nu) = \mathrm{TFTD}[s[n]] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}$$
$$s[n] = \mathrm{TFTD}^{-1}[S_e(\nu)] = \frac{1}{\nu_e}\int_{-\nu_e/2}^{\nu_e/2} S_e(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n T_e \nu}\mathrm{d}\nu$$

En fréquence normalisée $f = \nu/\nu_e$,

$$S_e(f) = \mathrm{TFTD}[s[n]] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n f}$$
$$s[n] = \mathrm{TFTD}^{-1}[S_e(f)] = \int_{-1/2}^{1/2} S_e(f)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n f}\mathrm{d}f$$

Formule de Poisson :

$$S_e(\nu) = \nu_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} S(\nu - k\nu_e)$$

où $S(\nu)$ désigne le spectre du signal analogique originel.