Correction de l'examen du 13 janvier 2009

① Questions de cours : voir cours

2.1 Étude de filtres numériques.

a) • $Z1 \to F4$ car d'après le diagramme Z1, la réponse fréquentielle n'a qu'un maximum, à $f=0$ (pôle réel positif)
Filtre stable car le $|pôle| < 1$

• $Z2 \to F2$ car pas de pôles et 3 zéros correspondant aux fréquences $\pm\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$, placés <u>sur</u> le cercle unité, ce qui implique que la réponse fréquentielle vaut 0 en ces fréquences

stables car pôles = 0

• $Z4 \to F3$: mêmes fréquences pour les zéros, mais ces derniers ne sont pas sur le cercle unité, donc la réponse fréquentielle ne s'annule pas.

• $Z3 \to F1$ car 2 pôles correspondant aux fréquences $\pm\frac{1}{8}$
Stable car $|pôles| < 1$

b) zéros $= \{ j \,;\, -j \,;\, -1 \}$
pôles $= 0$

$$\rightarrow H(z) = \frac{(z-j)(z+j)(z+1)}{z^3}$$

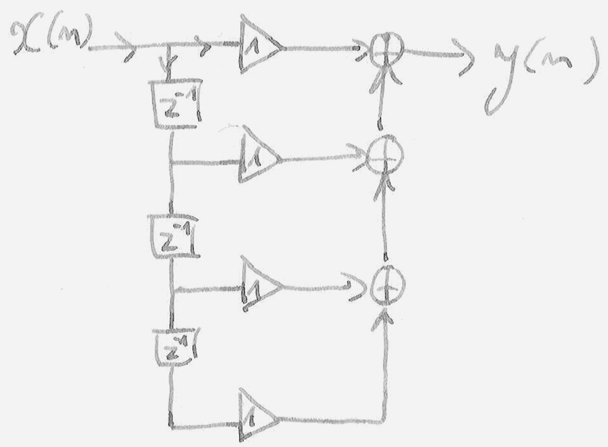
$$H(z) = \frac{(z^2+1)(z+1)}{z^3} = \frac{z^3+z^2+z+1}{z^3}$$

Donc $\underline{H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}$

c) Filtre non récursif donc RIF

d) Equation aux différences :

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$



2.2 Sous-échantillonnage et interpolation

a) $\frac{1}{2}\left(X\left(\frac{f}{2}\right) + X\left(\frac{f}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$

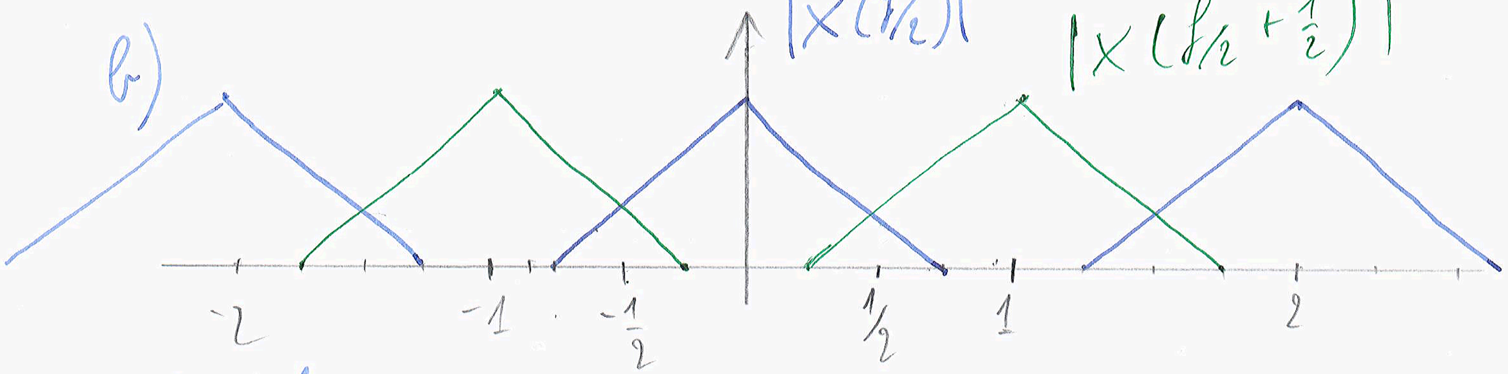
$$= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-j\pi n f} + x(n) e^{-j\pi n f} \underbrace{e^{+jn\pi}}_{\substack{1 \text{ si } n \text{ pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ impair}}}$$

$$= \sum_{n \text{ pair}} x(n) e^{-j\pi n f}$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{x(2m)}_{y(m)} e^{-j\pi(2m)f}$$

$$= Y(f)$$

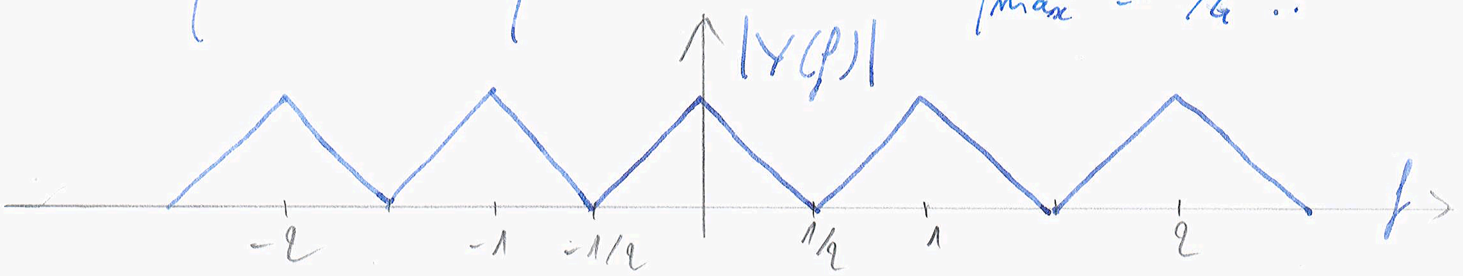
b)



L'information portée par le signal est contenue dans le spectre restreint à $[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$

Si $f_{max} \leq \frac{1}{4}$, $Y(f) = \frac{1}{2} X(f/2)$ sur cet intervalle

Donc si $f_{max} \leq \frac{1}{4}$, $y(n)$ porte la même information que $x(n)$. Si $f_{max} = 1/4$:

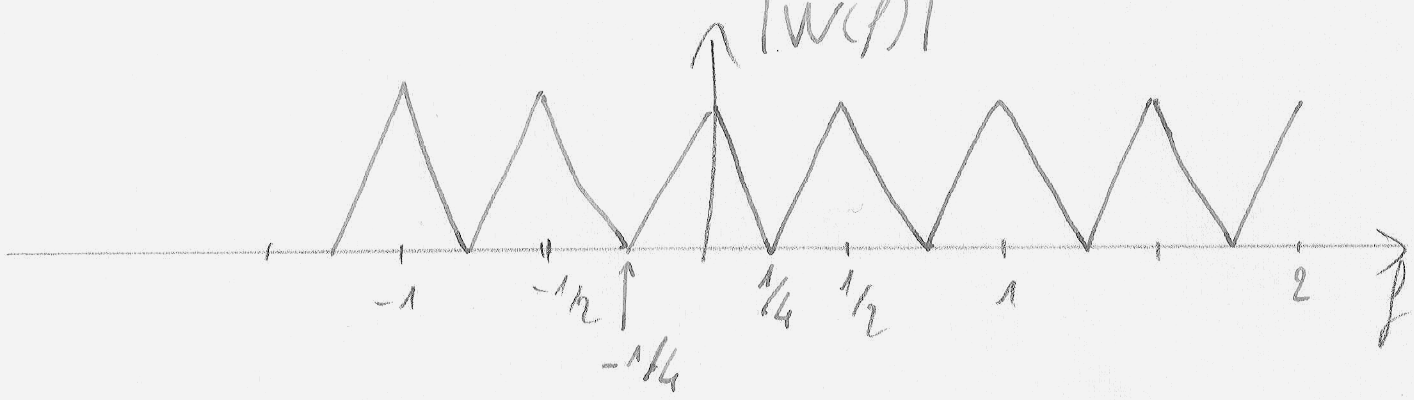


c) $W(f) = \sum_{n} w(n)\, e^{-j2\pi n f}$

$= \sum_{n \text{ pair}} y(n/2)\, e^{-j2\pi n f}$ $\quad \big\} \; n = 2m$

$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} y(m)\, e^{-j2\pi (2m) f}$

$= Y(2f)$



Pour retrouver x, il suffit d'appliquer un filtre passe-bas de fréquence de coupure $1/4$