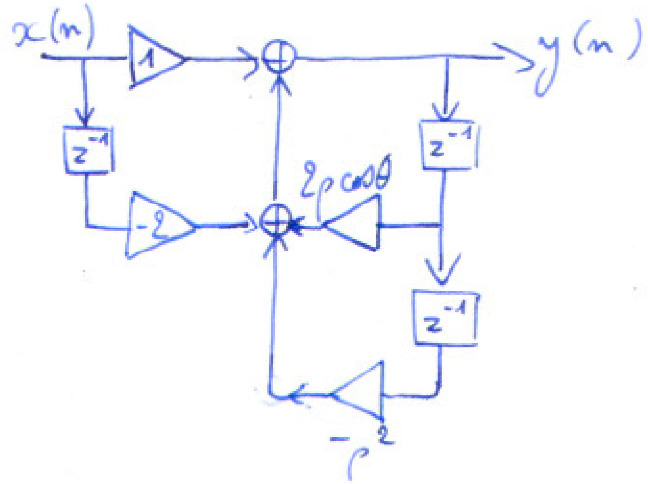
Correction exam janvier 2008

① Questions de cours : voir cours

(2.1) 1)



Filtre récursif, donc à réponse impulsionnelle infinie

2) Transformée en Z de l'équation aux différences :

$$Y(z) = X(z) - 2\,TZ[x(n-1)] + 2\rho\cos\theta\,TZ[y(n-1)] - \rho^2\,TZ[y(n-2)]$$

(linéarité de la TZ)

$$Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) + 2\rho\cos\theta\, z^{-1}Y(z) - \rho^2 z^{-2}Y(z)$$

(application théorème du retard)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 2\rho\cos\theta\, z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

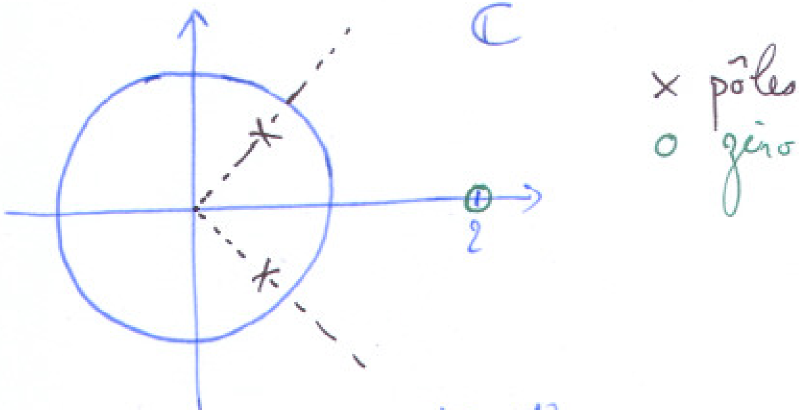
3) 1 zéro : $z = 2$

Pôles : discriminant du dénominateur

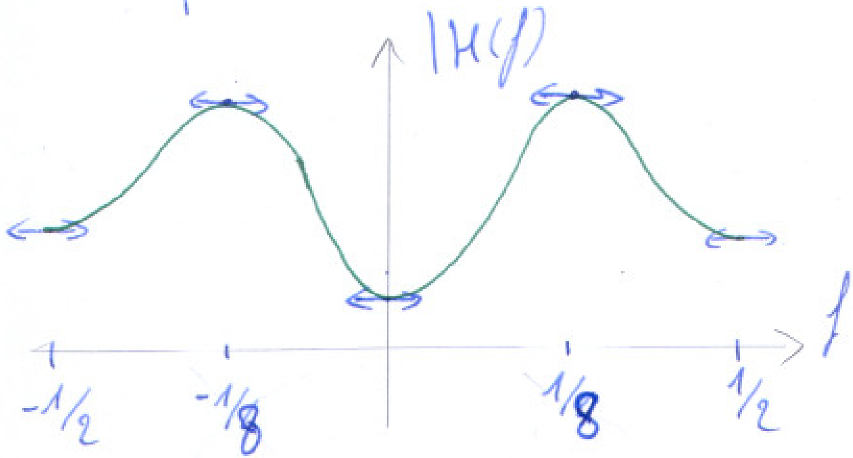
$$\Delta = 4\rho^2\cos^2\theta - 4\rho^2 = -4\rho^2\sin^2\theta$$

$$\text{pôles} = \frac{2\rho\cos\theta \pm j2\rho\sin\theta}{2} = \rho e^{\pm j\theta}$$

Le filtre est stable ssi $\rho < 1$



4)



2.2 1) $Y(f) = \text{TFTD}[y[n]]$

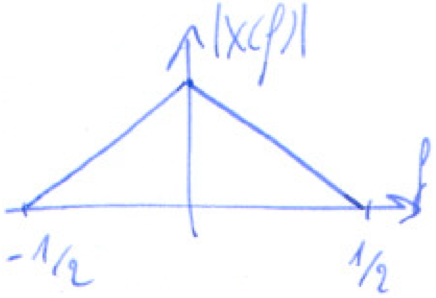
$$= \sum_n y[n] e^{-j2\pi nf}$$

$$= \sum_k y[2k] e^{-j4\pi kf}$$

car $y[n]=0$ pour n impair

$$= \sum_k x[k] e^{-j2\pi k 2f}$$

$$= X(2f)$$



Il faut ensuite appliquer un filtre passe-bas de fréquence de coupure 1/4 à y

Le spectre paraît plus contracté, mais les fréquences normalisées n'ont plus le même sens : après sur-échantillonnage, $f = 1$ correspond à $\nu = 2\nu_e$!

On a donc bien, après le filtrage passe-bas, le spectre original, entre $-\frac{\nu_e}{2}$ et $+\frac{\nu_e}{2}$

2) Si n pair,

$$w[n] = y[n] = y[n] + \frac{1}{2}\underbrace{y[n-1]}_{0} + \frac{1}{2}\underbrace{y[n+1]}_{0}$$

Si n impair,

$$w(n) = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n+1]$$

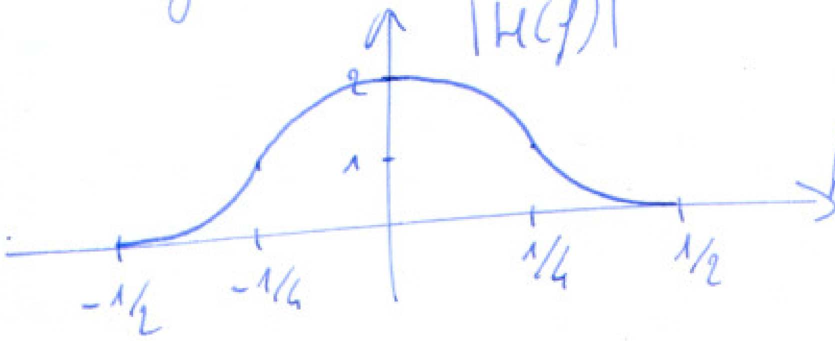
$$= \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n+1] + \underbrace{y[n]}_{0}$$

On a donc bien : $w(n) = h(n) * y(n)$

$$H(z) = TZ[h(n)] = \frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$H(f) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}$$

$$= \underbrace{1 + \cos(2\pi f)}_{\text{toujours } \in \mathbb{R}^+} = |H(f)|$$



L'interpolation linéaire revient donc, comme précédemment, à effectuer un filtrage passe-bas, de fréquence de coupure $\simeq 1/4$, sur y.

Celui-ci n'est cependant pas aussi proche du filtrage idéal qu'il peut l'être dans la solution précédente.