Bases du traitement du signal
Correction du CC du 8 nov. 2007

1 Questions de cours : voir cours

2.1 Cryptage du son

a) $\mathrm{TF}[m(t)\cos(2\pi\nu_0 t)]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} m(t)\left(\frac{e^{j2\pi\nu_0 t}+e^{-j2\pi\nu_0 t}}{2}\right)e^{-j2\pi\nu t}\,dt$$

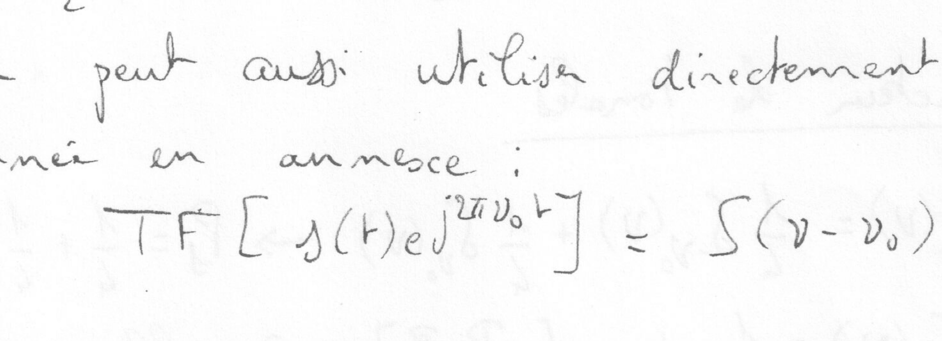
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m(t)e^{-j2\pi(\nu-\nu_0)t}\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m(t)e^{-j2\pi(\nu+\nu_0)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Pi(\nu-\nu_0) + \frac{1}{2}\Pi(\nu+\nu_0)$$

On peut aussi utiliser directement la formule donnée en annexe :

$$\mathrm{TF}[s(t)e^{j2\pi\nu_0 t}] = S(\nu-\nu_0)$$

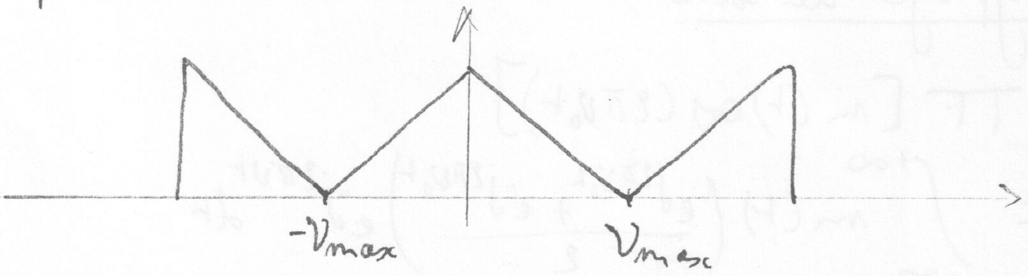
b) Spectre d'amplitude de $x(t)\cos(2\pi\nu_{max}t)$:



Si l'on filtre $x(t)\cos(2\pi\nu_{max}t)$ par un filtre passe-bas de fréquence de coupure ν_{max}, la sortie a le spectre d'amplitude souhaité.

c) Pour décrypter le son, il faut refaire ces 2 opérations sur le signal permuté $x_{perm}(t)$: multiplier par $\cos(2\pi \nu_{max} t)$ puis filtrer le résultat par un filtre passe-bas de fréquence de coupure ν_{max}.

Spectre de $x_{perm}(t) \cdot \cos(2\pi \nu_{max} t)$:



le spectre du signal en sortie du filtre est bien celui du signal original.

(2.2) Détecteur de tonales

a) $\gamma_s(\nu) = \frac{1}{4}\delta_{-\nu_0}(\nu) + \frac{1}{4}\delta_{\nu_0}(\nu) \rightarrow P_s = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\gamma_b(\nu) = \frac{1}{2}$ sur $[-B, B]$, 0 ailleurs

$\rightarrow P_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_b(\nu)\, d\nu = \int_{-B}^{B} \frac{1}{2}\, d\nu = B$

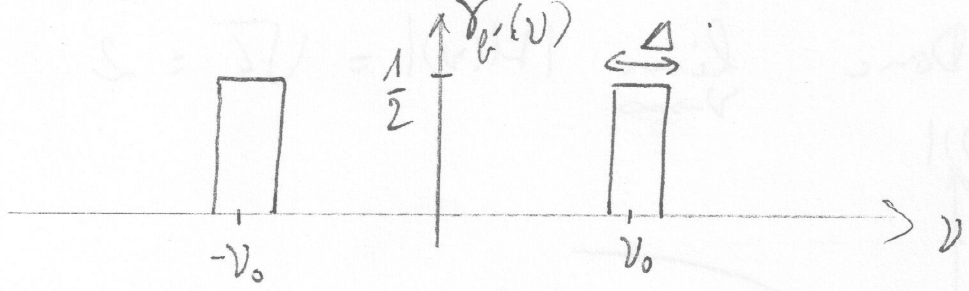
$RSB = \frac{P_s}{P_b} = \frac{1}{2B}$

b) Comme le filtrage est linéaire, la reponse du filtre est la reponse à la sinusoïde $s(t)$ + la reponse au bruit $b(t)$

Reponse à $s(t)$: toujours une sinusoïde, d'amplitude multipliée par $|H(\nu_0)|$, soit 1.

Reponse au bruit : un bruit b' de DSP :

$$\gamma_{b'}(\nu) = |H(\nu)|^2 \gamma_b(\nu)$$



→ La puissance du signal reste la même, celle du bruit diminue. Ainsi, le RSB augmente, ce qui améliore la detection

2.3 Système dynamique

a) Par application de la TF :

$$Y(\nu) + j\nu Y(\nu) = X(\nu) + j2\nu X(\nu)$$

$$H(\nu) = \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} = \frac{1 + j2\nu}{1 + j\nu}$$

$$\rightarrow |H(\nu)| = \sqrt{\frac{1 + 4\nu^2}{1 + \nu^2}}$$

b) $\dfrac{d|H(\nu)|^2}{d\nu} = \dfrac{8\nu(1+\nu^2) - 2\nu(1+4\nu^2)}{(1+\nu^2)^2}$

$= \dfrac{6\nu}{(1+\nu^2)^2} \geq 0$ pour $\nu \in \mathbb{R}^+$

Donc $|H(\nu)|^2$ croît sur $\mathbb{R}^+$

$|H(0)| = 1$

Quand $\nu \to \infty$, $1+4\nu^2 \sim 4\nu^2$ et $1+\nu^2 \sim \nu^2$

Donc $\lim\limits_{\nu\to\infty} |H(\nu)| = \sqrt{4} = 2$