Traitement du signal

Médian Automne 2004

Une attention particulière devra etre portée sur la justification des calculs. Un résultat exact non justifié sera considéré comme partiellement faux. Bareme provisoire (4,4,7,5).

1. **Systèmes**

   Soit un système S de réponse impulsionnelle $h(t)$ formé par deux systèmes en cascade dont les réponses impulsionnelles sont $h_1(t) = e^{-t}\Gamma(t)$ et $h_2(t) = e^{-2t}\Gamma(t)$

   (a) Donner l'expression de la réponse impulsionnelle $h(t)$

   (b) Démontrer que le système S est stable

   (c) si $x(t)$ est un signal porte de largeur T, donner l'expression de la sortie $y(t)$

2. **Filtrage**

   Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-|t|}$

   (a) Calculer la réponse fréquentielle de ce filtre

   (b) si $x(t)$ est le signal d'entrée de ce filtre et $y(t)$ le signal de sortie. Donner la relation entre les dénsités spectrales de $x(t)$ et $y(t)$

   (c) Si $x(t)$ est un signal périodique de période T, démontrer que $y(t)$ est de la forme

   $$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h_n e^{i2\pi nt/T}$$

   et donner l'expression de h_n.

3. **Systemes et Filtres**

   (a) soit $m(t)$ un peigne de Dirac de période T_e. En décomposant $m(t)$ en série de Fourier, montrer que la transformée de Fourier de $M(t)$ au sens des distribution s'écrit :

   $$M(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - n/T_e)$$

   (b) soit $x(t)$ un signal dont la transformée de Fourier est à support bornée telle que $F_{max} \leq \frac{2}{T_e}$. On définit $x_e(t) = m(t) \cdot x(t)$. Montrer que

   $$x_e(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

(c) Donner l'expression de $X_e(f)$ la transformée de Fourier de $x_e(t)$ et réaliser un schema représentant $X_e(f)$ en fonction de $X(f)$

(d) En utilisant un filtrage passe-bas idéal, montrer que

$$x(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \mathrm{sinc}(\frac{\pi}{T_e}(t - nT_e))$$

4. **Distributions et Fourier**

Soit $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

(a) Donner l'expression de la fonction généralisée D_x associée à $x(t)$

(b) Donner l'expression de la dérivée de D_x

(c) Calculer la transformée de Fourier au sens des distributions de D_x. (Donner la démonstration)