

Chapitre 2

Analyse des signaux non périodiques

2.1 Transformation de Fourier

2.1.1 Passage de la série à la transformation de Fourier

Le passage d'un signal périodique à un signal apériodique peut se faire en considérant que la période T devient de plus en plus grande pour finalement tendre vers l'infini. On constate alors que les raies spectrales, distantes de $f_0 = \frac{1}{T}$, se rapprochent pour peu à peu se transformer en spectre continu. Mais en même temps, l'amplitude de celui-ci diminue pour tendre zéro.

Pour voir plus précisément comment les choses se passent, considérons une suite d'impulsions rectangulaires dont la période augmente alors que la largeur reste constante (figure 2.1).

Nous savons qu'un signal périodique $x(t)$ est décrit par :

$$x(t) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t}$$

$$X(j \cdot k) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt$$

Pour éviter le problème de l'annulation de $X(j \cdot k)$ lorsque $T \rightarrow \infty$, on considère la fonction

$$T \cdot X(j \cdot k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt$$

et les correspondances suivantes :

$$T \rightarrow \infty \quad f_0 \rightarrow df \quad k \cdot f_0 \rightarrow f \quad T \cdot X(j \cdot k) \rightarrow X(j \cdot f)$$

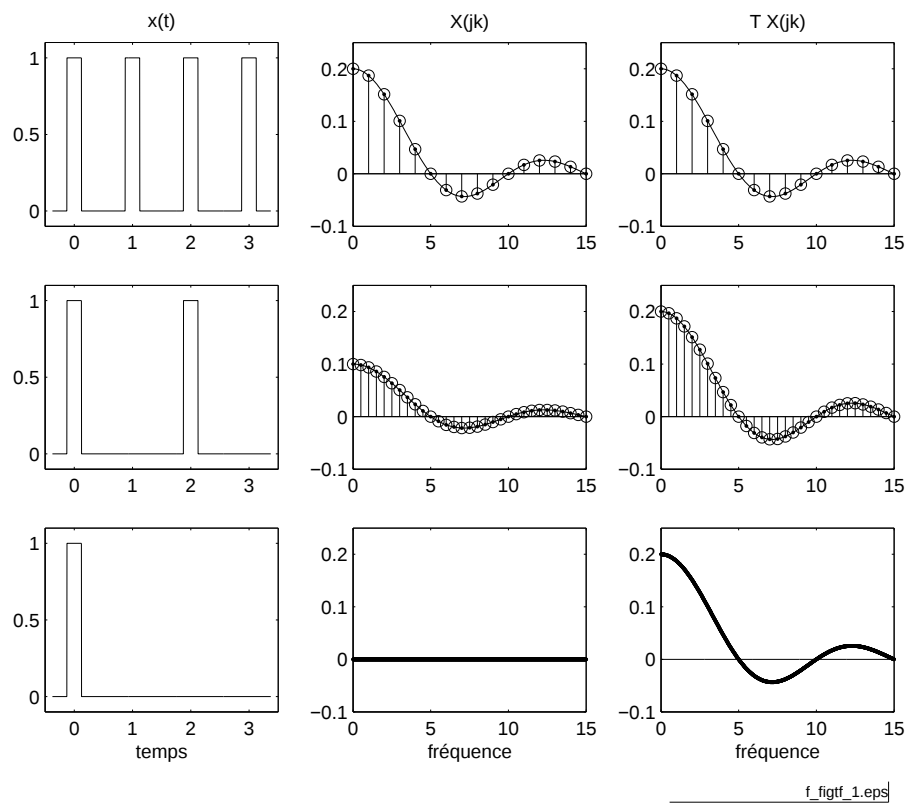


FIG. 2.1 – Passage de la série de Fourier à la densité spectrale ([fichier source](#)).

A partir de celles-ci, on voit que la série de Fourier discrète devient une fonction continue. Cette fonction $X(j \cdot f)$ est une **densité spectrale d'amplitude** qui, par définition, est la transformée de Fourier du signal aperiodique $x(t)$:

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

La transformée inverse s'obtient en considérant la fonction périodique pour laquelle la période T tend vers l'infini ; on a alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} X(j \cdot k) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \cdot (T \cdot X(j \cdot k)) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{+\infty} (T \cdot X(j \cdot k)) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot f_0 \end{aligned}$$

Lorsque l'on passe à la limite

$$T \rightarrow \infty \quad T \cdot X(j \cdot k) \rightarrow X(j \cdot f) \quad f_0 \rightarrow df \quad k \cdot f_0 \rightarrow f$$

on obtient la définition de la transformation inverse de Fourier :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot df$$

Il est important de noter que les unités de $X(j \cdot f)$ ne sont pas les mêmes que celles du signal original $x(t)$. Dans le cas où $x(t)$ est une tension électrique, sa transformée $X(j \cdot f)$ s'exprime en $\left[\frac{V}{Hz}\right]$.

2.1.2 TF directe et inverse

Les deux relations que nous venons de démontrer constituent les transformations de Fourier directe et inverse. On constate que les descriptions temporelle et spectrale sont parfaitement symétriques :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot df \\ X(j \cdot f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \end{aligned} \tag{2.1}$$

En notation abrégée, on décrira ces deux transformations par les opérateurs $TF\{\}$ et $TFI\{\}$. La correspondance réciproque s'écrit alors :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j \cdot f)\} = TFI\{X(j \cdot f)\} \longleftrightarrow TF\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} = X(j \cdot f)$$

Si la fonction $x(t)$ ne possède pas de symétries particulières, sa densité spectrale d'amplitude $X(j \cdot f)$ est une fonction complexe :

$$x(t) \longleftrightarrow X(j \cdot f) = X_r(f) + j \cdot X_i(f) \quad (2.2)$$

Les densités spectrales du module et de la phase valent alors :

$$|X(j \cdot f)| = X(f) = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \quad (2.3)$$

$$\angle X(j \cdot f) = \alpha(f) = \arctan \left(\frac{X_i(f)}{X_r(f)} \right) \quad (2.4)$$

2.1.3 Énergie d'un signal non permanent

Dans le cas des signaux non permanents, on prendra garde à parler de leur énergie et non pas de leur puissance, car celle-ci est nulle si l'on considère une durée infiniment longue.

De manière similaire à ce que l'on a vu pour les signaux périodiques, on peut calculer l'énergie d'un signal apériodique aussi bien dans le domaine temporel que dans domaine fréquentiel :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt \quad [\text{V}^2 \cdot \text{s}] \quad (2.5)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot f)|^2 \cdot df \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.6)$$

L'expression de l'énergie d'un signal $x(t)$ dans le domaine des fréquences entraîne la définition de la **densité spectrale d'énergie** $S_x(f)$:

$$S_x(f) = |X(j \cdot f)|^2 = X(j \cdot f) \cdot X^*(j \cdot f) \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}^2} \right] \quad (2.7)$$

On notera que ses unités s'expriment en $\left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}^2} \right]$ lorsque le signal est une tension.

a) linéarité	$a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$	$a \cdot X(j \cdot f) + b \cdot Y(j \cdot f)$
b) décalage	$x(t + t_d)$	$X(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$
c) amortissement	$x(t) \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$	$X(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f + a)$
d) modulation	$x(t) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}$	$X(j \cdot (f - f_0))$
e) dérivation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot X(j \cdot f)$
f) intégration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau$	$\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(j \cdot f) + \frac{1}{2} \cdot X(0) \cdot \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$
g) convolution	$h(t) * x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(j \cdot f) \cdot X(j \cdot f)$ $H(j \cdot f) * X(j \cdot f)$
h) énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) ^2 \cdot df$
j) valeurs à l'origine	$x(t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot df$	$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$
k) rotation Oy	$y(t) = x(-t)$	$Y(j \cdot f) = X(-j \cdot f) = X^*(j \cdot f)$
l) fonction paire	$x(-t) = x(t)$	$X(j \cdot f) \in \Re$
m) fonction impaire	$x(-t) = -x(t)$	$X(j \cdot f) \in \Im$
n) symétrie	$X(t)$ $X(-t)$	$x(-j \cdot f)$ $x(j \cdot f)$

TAB. 2.1 – Quelques propriétés de la transformation de Fourier. Convention de notation : $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j \cdot f)$ ou encore $x(t) \longleftrightarrow X(j \cdot f)$.

2.1.4 Propriétés de la transformation de Fourier

Parmi le grand nombre de propriétés associées à la transformation de Fourier, on retiendra particulièrement celles qui ont le plus d'intérêt en traitement du signal. Elles sont présentées dans le tableau 2.1.

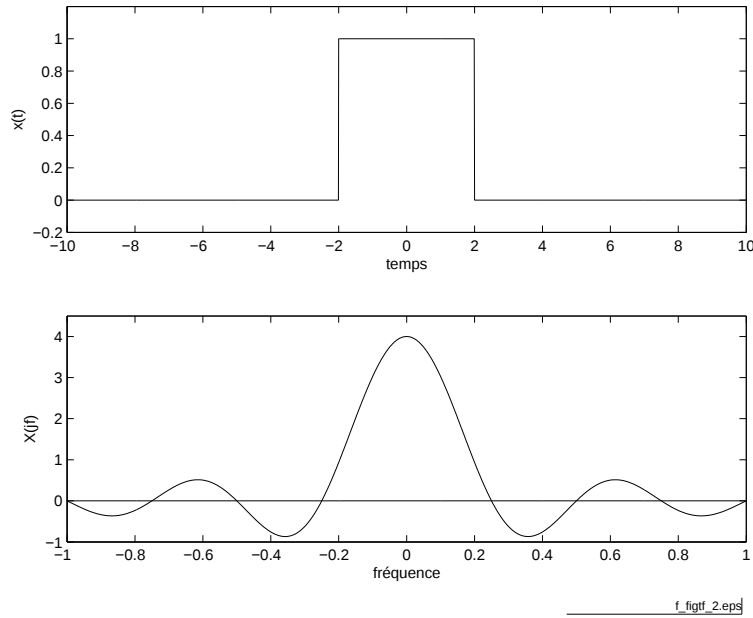


FIG. 2.2 – Impulsion rectangulaire et sa densité spectrale d’amplitude ([fichier source](#)).

2.2 Exemples de spectres continus

Pour illustrer l’utilisation de la transformée de Fourier, calculons les densités spectrales de trois signaux particuliers.

2.2.1 Spectre d’une impulsion rectangulaire

Considérons une impulsion $x(t)$ de largeur Δt et d’amplitude A centrée en $t = 0$ (figure 2.2.1). Par définition de la transformation de Fourier, on a :

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

En tenant compte de la définition de l’impulsion rectangulaire centrée :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{\Delta t}{2} \\ A & \text{si } |t| \leq \frac{\Delta t}{2} \end{cases} \quad (2.8)$$

il vient :

$$\begin{aligned}
 X(j \cdot f) &= \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} A \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\
 &= \frac{A}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \Big|_{-\frac{\Delta t}{2}}^{+\frac{\Delta t}{2}} \\
 &= \frac{A}{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot \left[e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} - e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{\Delta t}{2}} \right] \\
 &= \frac{A}{\pi \cdot f} \cdot \frac{e^{+j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t} - e^{-j \cdot \pi \cdot f \cdot \Delta t}}{2 \cdot j}
 \end{aligned}$$

Utilisant la formule d'Euler

$$\sin(u) = \frac{e^{+j \cdot u} - e^{-j \cdot u}}{2 \cdot j}$$

on obtient finalement :

$$X(j \cdot f) = A \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} = A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t) \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la densité spectrale d'amplitude d'une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$ [s] est bien décrite par un sinus cardinal.

On remarquera (figure 2.2.1) que le spectre passe par zéro chaque fois que le sinus cardinal s'annule, c'est-à-dire, chaque fois que la fréquence est un multiple de $\frac{1}{\Delta t}$.

Le spectre de cette impulsion illustre deux points importants concernant les signaux de durée limitée (figure 2.3) :

1. un signal de **courte durée** possède un spectre **large bande** ;
2. à un spectre **étroit** correspond un signal de **longue durée**.

2.2.2 Spectres d'un sinus amorti

Étudions, comme deuxième exemple, la transformée de Fourier d'une sinusoïde de fréquence f_p décroissant exponentiellement (enveloppe $e^{-a \cdot t}$) au cours du temps (figure 2.4). Son équation s'écrit :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Partant de la définition de la transformée de Fourier, on calcule sa densité spec-

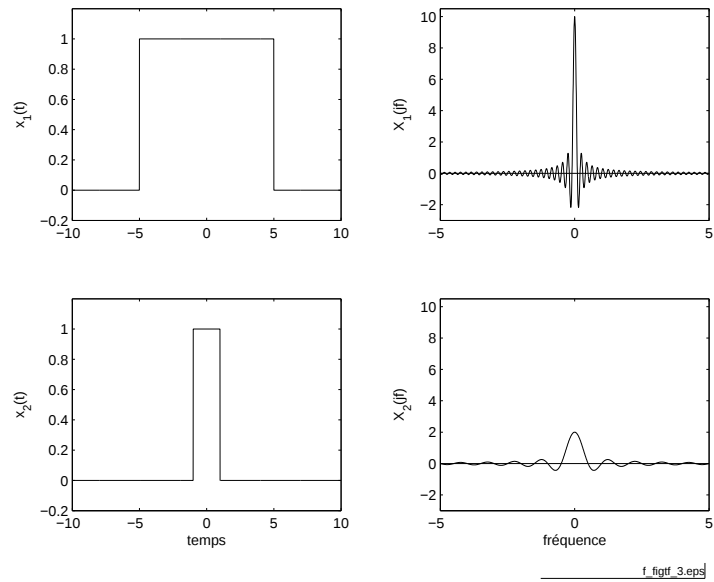


FIG. 2.3 – Le contenu spectral d’une impulsion dépend fortement de sa durée (fichier source).

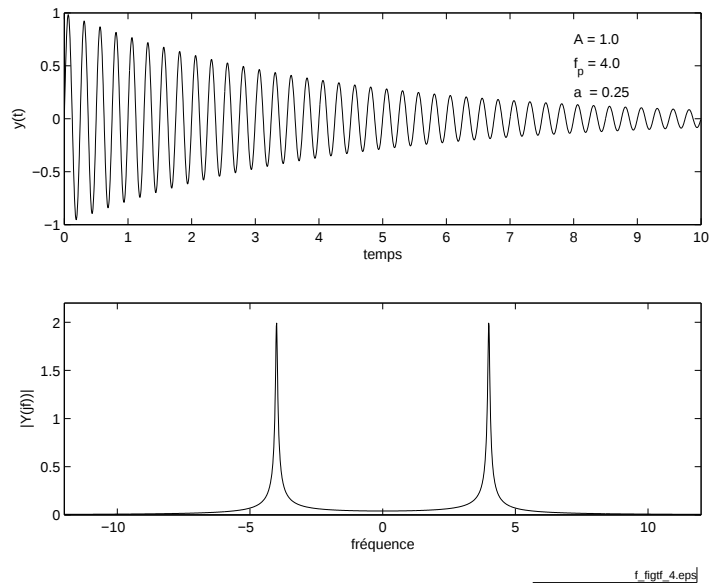


FIG. 2.4 – Sinus amorti et le module de sa densité spectrale d’amplitude (fichier source).

trale d'amplitude :

$$\begin{aligned}
 Y(j \cdot f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \\
 &= \int_0^{\infty} A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \frac{e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_p \cdot t}}{2 \cdot j} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt
 \end{aligned}$$

Cette intégrale ne contient que des exponentielles ; elle est très simple à calculer. Après réduction des deux primitives à un même dénominateur, on obtient :

$$Y(j \cdot f) = A \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_p}{(a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^2 + (2 \cdot \pi \cdot f_p)^2} \in \mathcal{C} \quad (2.11)$$

On remarquera que la densité spectrale d'amplitude $Y(j \cdot f)$ est une fonction complexe alors que dans le cas de l'impulsion centrée (§ 2.4 page précédente), $X(j \cdot f)$ était réel. Ceci est dû au fait que l'impulsion rectangulaire centrée est une fonction paire, alors que la sinusoïde décroissante $y(t)$ ne possède pas de symétrie particulière. La figure 2.4 présente le sinus amorti et le module de sa densité spectrale d'amplitude.

On peut également noter les deux valeurs particulières suivantes :

$$\begin{aligned}
 f = 0 & : Y(0) = A \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_p}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f_p)^2} \approx \frac{A}{2 \cdot \pi \cdot f_p} \quad \text{si } a \ll 2 \cdot \pi \cdot f_p \\
 f = f_p & : Y(j \cdot f_p) = \frac{A}{a} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_p}{a + j \cdot 4 \cdot \pi \cdot f_p} \approx \frac{A}{j \cdot 2 \cdot a} \quad \text{si } a \ll 2 \cdot \pi \cdot f_p
 \end{aligned}$$

où a est la pulsation caractéristique de l'exponentielle alors que $2 \cdot \pi \cdot f_p$ est celle du sinus.

2.2.3 Spectres de 2 impulsions

Considérons un signal constitué de deux impulsions d'amplitude A placées symétriquement en $\pm \frac{t_0}{2}$ (figure 2.5 page suivante). Ce signal possède un spectre qui se calcule facilement à partir de celui d'une impulsion centrée en $t = 0$ [s] et à l'aide du théorème du décalage.

Comme le signal $z(t)$ est la somme de 2 impulsions décalées de $\pm \frac{t_0}{2}$,

$$z(t) = x\left(t + \frac{t_0}{2}\right) + x\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \quad (2.12)$$

on a selon (2.9)

$$\begin{aligned}
 Z(j \cdot f) &= A \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{t_0}{2}} + A \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{t_0}{2}} \\
 &= A \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \cdot \left[e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{t_0}{2}} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{t_0}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

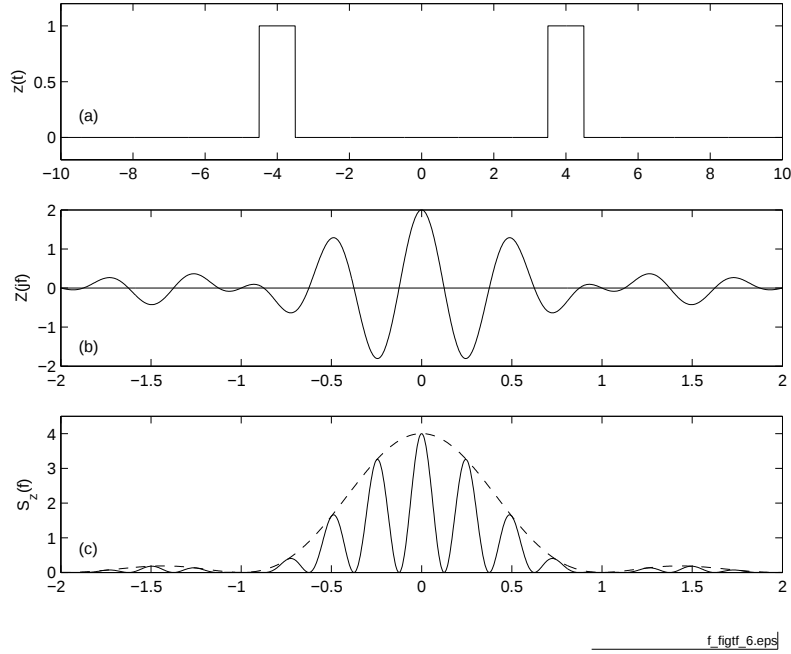


FIG. 2.5 – Deux impulsions rectangulaires symétriques (a) avec ses densités spectrales d’amplitude (b) et d’énergie (c) ([fichier source](#)).

donc :

$$Z(j \cdot f) = 2 \cdot A \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \cdot \cos(\pi \cdot f \cdot t_0) \quad (2.13)$$

De plus, par rapport à ce qui va suivre (§2.2.4), il est intéressant de considérer également la densité spectrale d’énergie :

$$S_z(f) = |Z(j \cdot f)|^2 = \left[2 \cdot A \cdot \Delta t \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \cdot \cos(\pi \cdot f \cdot t_0) \right]^2 \quad (2.14)$$

Les densités spectrales d’amplitude et d’énergie sont représentées à la figure 2.5.

2.2.4 Extension de la transformation de Fourier

Le spectre d’énergie des deux impulsions que l’on vient de calculer montre une grande similitude avec la figure de diffraction de Fraunhofer due à deux fentes étroites (figure 2.6). En réalité, il s’agit plus que d’une similitude car on montre en physique que toute figure de diffraction est la transformée de Fourier de l’objet qui en est la cause.

Les spectres spatiaux (ou les figures de diffraction) d’ouvertures circulaire et carrée sont présentés à la figure 2.7 ; on y reconnaît la fonction sinus cardinal distribuée dans l’espace des fréquences spatiales f_x et f_y .

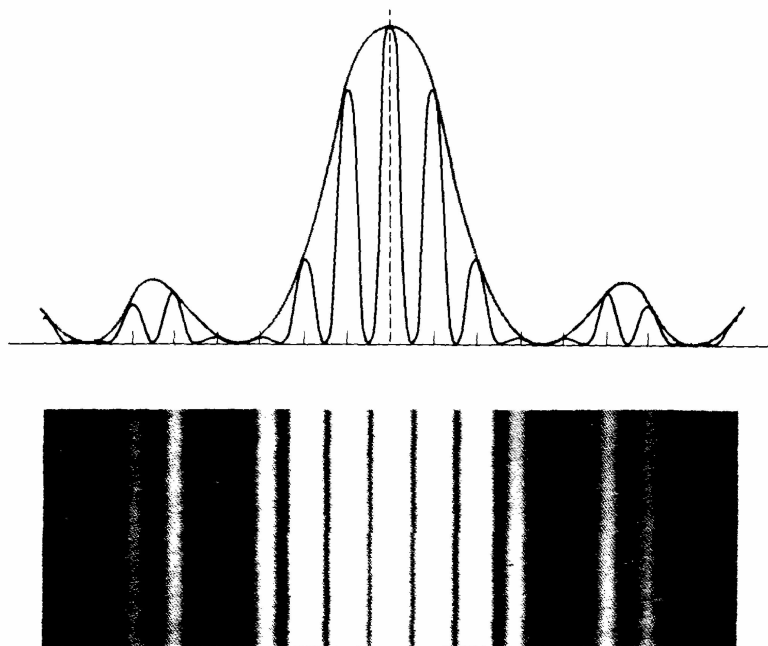


FIG. 2.6 – Figure de diffraction due à deux ouvertures étroites [MA70].

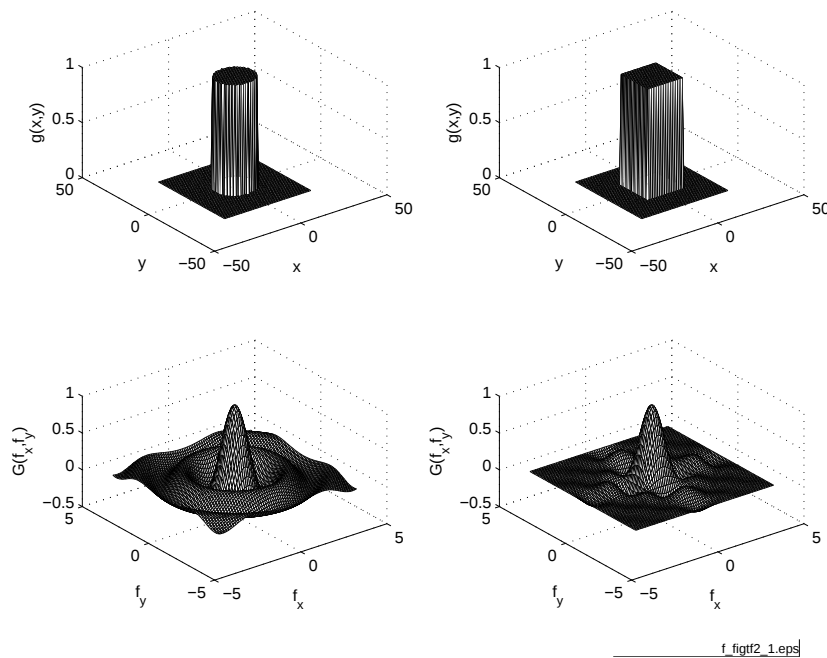


FIG. 2.7 – Exemples de transformées de Fourier spatiales ([fichier source](#)).

Une illustration des spectres spatiaux des majuscules de l'alphabet est donnée à la figure 2.8. Quelques instants d'observation montrent qu'il est possible de reconnaître les lettres de l'alphabet simplement à partir des images de diffraction, c'est-à-dire leur transformée de Fourier spatiale. Dans cette figure, seules 20 images de l'alphabet de Fraunhofer sont présentées dans l'ordre alphabétique ; les lettres manquantes peuvent être retrouvées en essayant de se représenter leur spectre.

Puisque, comme nous venons de le voir, la notion de transformation de Fourier s'applique à des fonctions bidimensionnelles, on imagine aisément que les principes de filtrage que l'on connaît bien en électronique peuvent s'étendre de la même manière à des signaux multidimensionnels.

Une illustration en est donnée à la figure 2.9. On y voit comment l'extraction de contour d'une image est obtenue par élimination des basses fréquences. Le filtre spatial est réalisé optiquement par un masque éliminant la zone centrale (c'est à dire les basses fréquences spatiales) de la figure de diffraction de l'image analysée.

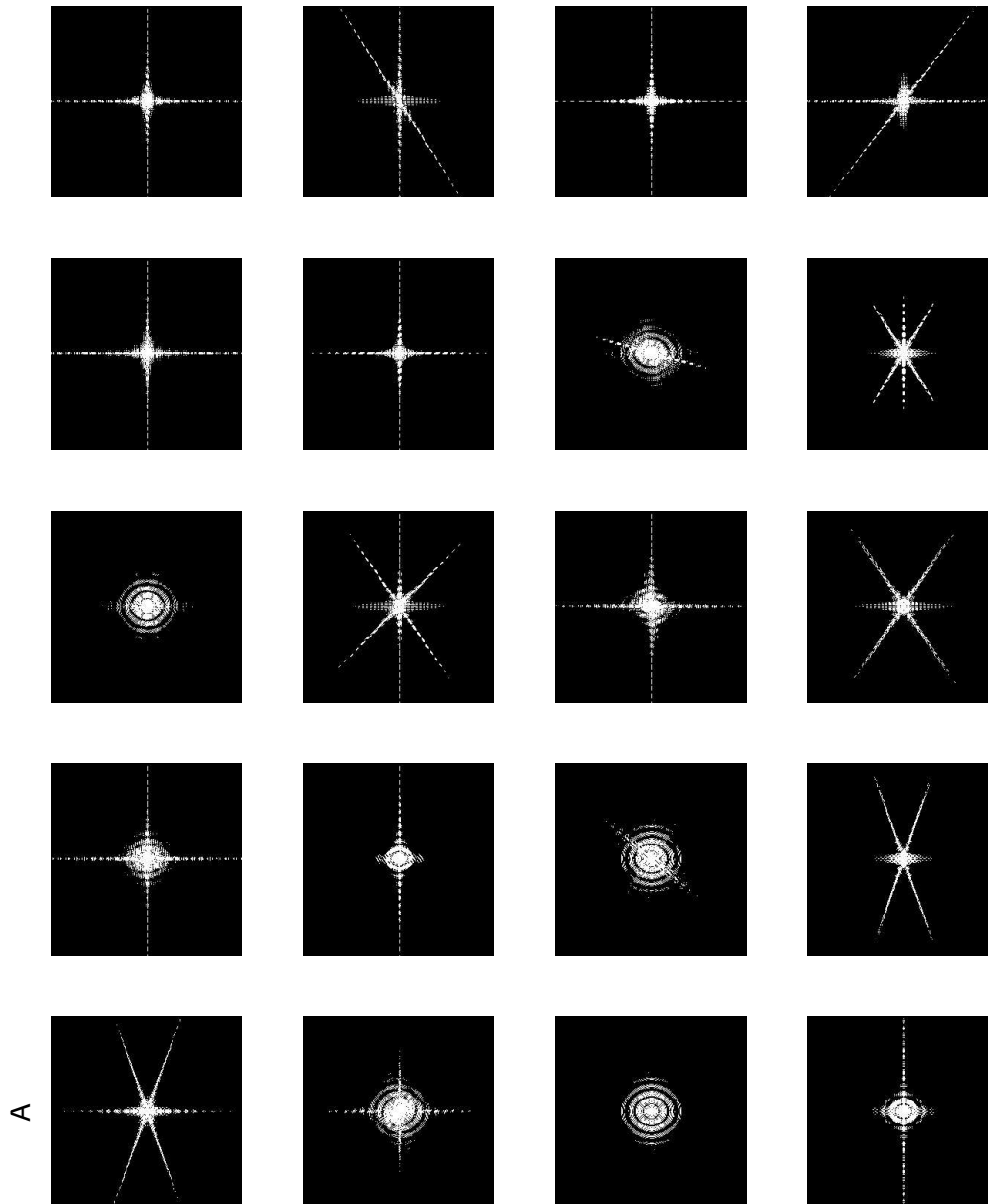
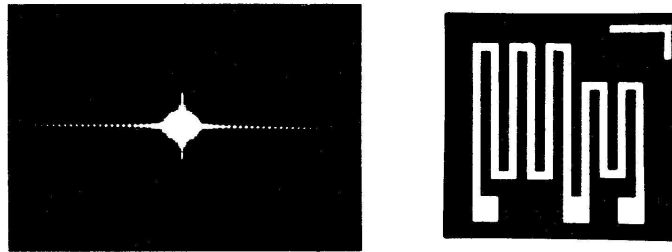
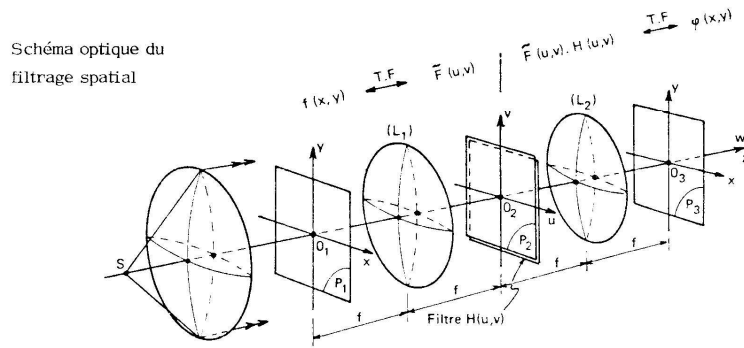
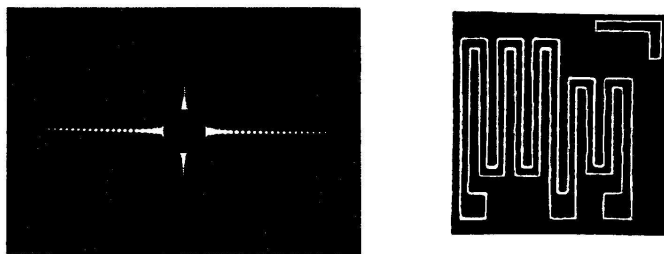


FIG. 2.8 – Alphabet de Fraunhofer.



Transformée optique d'un masque de diffusion pour circuit intégré réalisé au laboratoire de microtechnique



Filtrage des basses fréquences
Seul le contour de l'image initiale apparaît

FIG. 2.9 – Filtrage passe-haut d'un masque de diffusion [Bulletin de l'EICN].

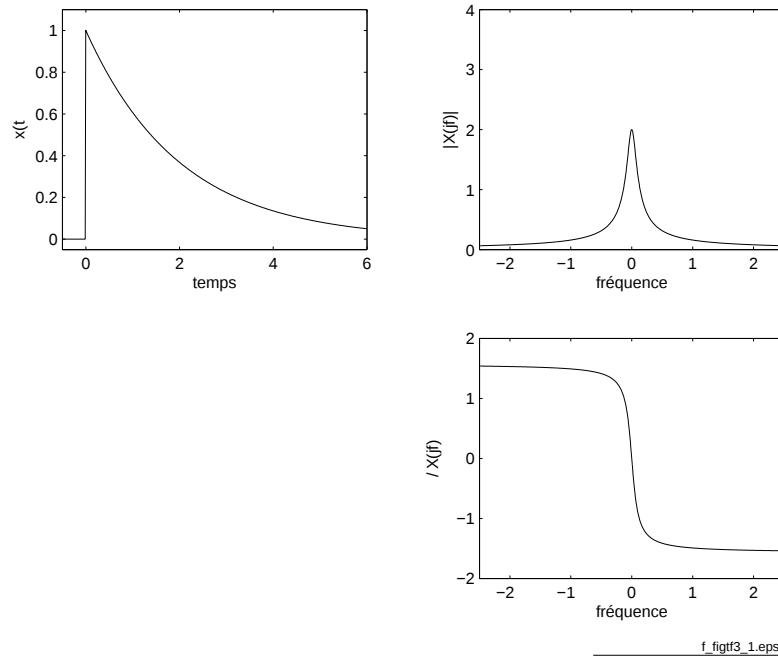


FIG. 2.10 – Exponentielle décroissante et ses spectres (module et phase) ([fichier source](#)).

2.3 Calcul de quelques transformées

Afin de mieux saisir les implications de la TF, calculons les transformées de quelques signaux importants en traitement du signal.

2.3.1 Exponentielle décroissante

Dans ce cas, $x(t)$ vaut :

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-a \cdot t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

L'application de la définition de la TF conduit à :

$$X(j \cdot f) = \int_0^{+\infty} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

d'où :

$$X(j \cdot f) = \frac{1}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad (2.16)$$

Pour illustrer le théorème de l'énergie, calculons l'énergie de ce signal :

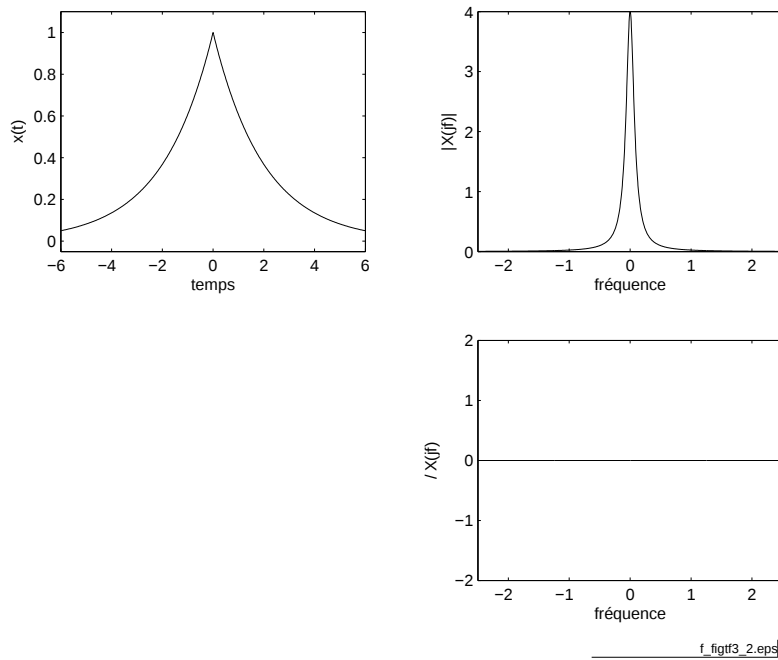


FIG. 2.11 – Exponentielle symétrique et ses spectres (module et phase) ([fichier source](#)).

dans le domaine temporel

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt = \int_0^{+\infty} e^{-2 \cdot a \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot a}$$

dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot f)|^2 \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2 \cdot a} \end{aligned}$$

On retrouve bien entendu le même résultat dans les deux cas.

2.3.2 Exponentielle décroissante symétrique

Ce signal est décrit par :

$$x(t) = e^{-a \cdot |t|} \quad -\infty < t < +\infty \quad (2.17)$$

On a alors :

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^0 e^{+a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt + \int_0^{\infty} e^{-a \cdot t} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

d'où :

$$X(j \cdot f) = \frac{1 - 0}{a - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{0 - 1}{-(a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)} = \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \quad (2.18)$$

On remarquera que $x(t)$ étant pair, sa transformée est réelle.

2.3.3 Signal unité

Le signal constant unité vaut simplement 1 quelque soit $t \in (-\infty, +\infty)$. Au sens des limites, il peut être décrit à partir de l'exponentielle symétrique :

$$x(t) = 1 = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a \cdot |t|} \quad -\infty < t < +\infty \quad (2.19)$$

Ce passage par la limite est nécessaire car le signal constant n'est pas intégrable en valeur absolue et sa transformée de Fourier ne peut donc pas être calculée à partir de sa définition. Par contre, partant de l'exponentielle symétrique, on a :

$$X(j \cdot f) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq 0 \\ \infty & \text{si } f = 0 \end{cases}$$

Ce résultat coïncide avec la définition d'une impulsion de Dirac. La TF d'un signal unité est donc une impulsion de Dirac située en $f = 0$ [Hz] :

$$X(j \cdot f) = \delta(f) \quad (2.20)$$

2.3.4 Saut unité

Le calcul de la TF d'un saut unité $\epsilon(t)$ (figure 2.12) nécessite également quelques précautions, car ce signal n'est pas intégrable en valeur absolue. Mais, constatant que l'on a :

$$1 = \epsilon(t) + \epsilon(-t)$$

et désignant la TF de $\epsilon(t)$ par $E(j \cdot f)$, il vient :

$$TF\{1\} = \delta(f) = E(j \cdot f) + E^*(j \cdot f) = 2 \cdot E_r(j \cdot f)$$

De ce résultat, on en déduit que la partie réelle $E_r(j \cdot f)$ vaut $\frac{\delta(f)}{2}$.

Il reste encore à trouver la partie imaginaire de $E(j \cdot f)$. Pour ce faire, on peut remarquer que le saut unité peut également s'écrire sous la forme :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a \cdot t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

dont la transformée (équation 2.16) est purement imaginaire et vaut $\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$. On obtient donc finalement :

$$E(j \cdot f) = E_r(j \cdot f) + j \cdot E_i(j \cdot f) = \frac{1}{2} \cdot \delta(f) + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad (2.22)$$

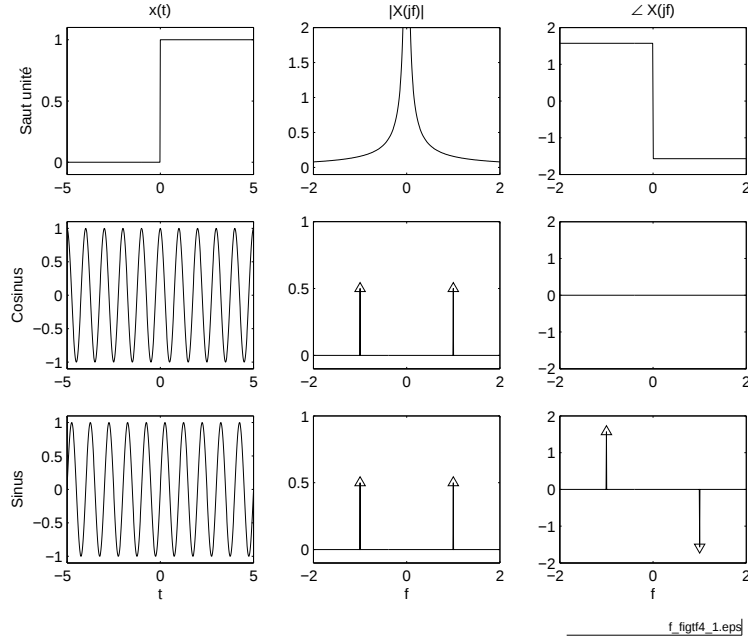


FIG. 2.12 – Signaux et densités spectrales d'un saut unité, d'un cosinus et d'un sinus ([fichier source](#)).

2.3.5 Phaseur

Pour calculer sa TF, considérons le fait qu'un phaseur de fréquence f_0 peut s'écrire comme suit :

$$x(t) = e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a \cdot |t|} \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} \quad (2.23)$$

Utilisant la TF de l'exponentielle symétrique (équation 2.18) et la propriété de modulation (Tab.2.1), on a :

$$X(j \cdot f) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2 \cdot a}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot (f - f_0))^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } f \neq f_0 \\ \infty & \text{si } f = f_0 \end{cases}$$

La TF d'un phaseur de fréquence f_0 est donc une impulsion de Dirac située en $f = f_0$:

$$X(j \cdot f) = \delta(f - f_0) \quad (2.24)$$

2.3.6 Signal sinusoïdal

Comme un signal sinusoïdal est constitué de 2 phaseurs conjugués complexes (formule d'Euler), sa TF comportera 2 impulsions de Dirac située en $\pm f_0$. Plus

précisément, on aura :

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot [e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}] \longleftrightarrow X(j \cdot f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \quad (2.25)$$

$$x(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot [e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} - e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}] \longleftrightarrow X(j \cdot f) = \frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2 \cdot j} \quad (2.26)$$

La première TF est réelle, car la cosinusoïde est paire, alors que la deuxième TF est imaginaire car la sinusoïde est impaire. On notera que les modules des densités spectrales sont les mêmes et que seuls diffèrent leurs arguments (figure 2.12 page précédente).

2.3.7 Impulsion sinusoïdale

Parmi les propriétés des transformations de Laplace et Fourier, nous avons vu qu'à un produit de convolution dans le domaine temporel correspond un produit simple dans le domaine complexe :

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega) \cdot X(j \cdot \omega) \quad (2.27)$$

L'inverse de cette proposition est également vraie et elle est très pratique pour calculer le spectre de signaux modulés en amplitude. Elle s'exprime comme suit. A un produit simple dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine complexe :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(j \cdot \omega) = M(j \cdot \omega) * X(j \cdot \omega) \quad (2.28)$$

Considérons comme exemple une impulsion sinusoïdale de durée Δt

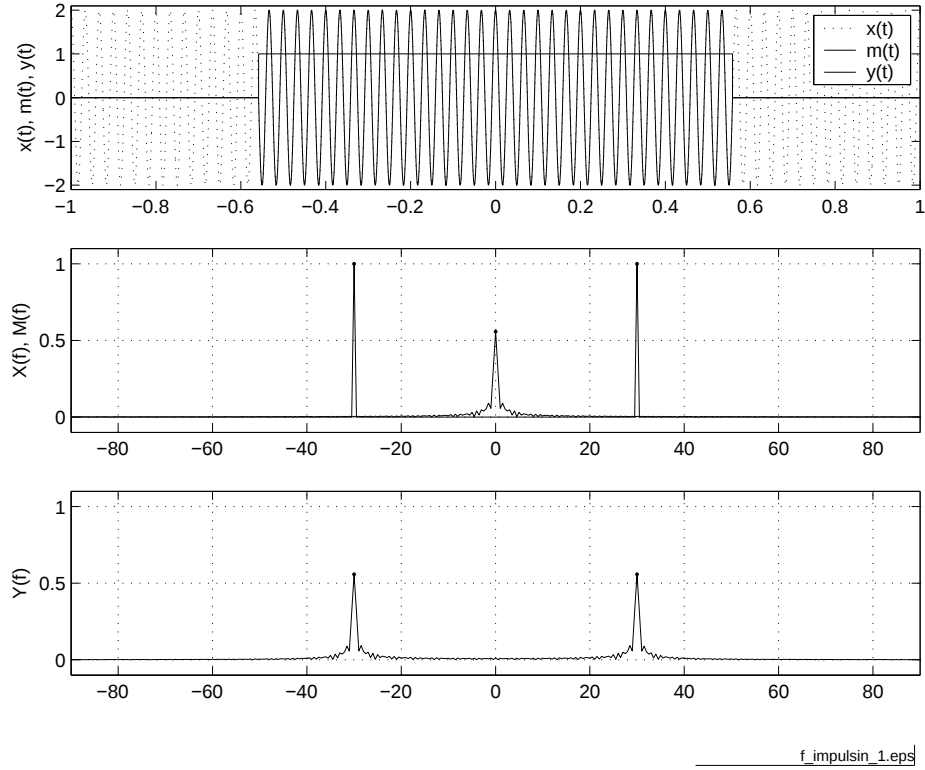
$$y(t) = \begin{cases} \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Voyant que ce signal est équivalent à la multiplication d'un sinusoïde permanente par une impulsion de largeur Δt , on a :

$$y(t) = m(t) \cdot x(t) = m(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad \text{avec} \quad m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{\Delta t}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq \frac{\Delta t}{2} \end{cases}$$

Sachant que les spectres des signaux $x(t)$ et $m(t)$ valent respectivement

$$X(j \cdot f) = \frac{1}{2} \cdot (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

FIG. 2.13 – Impulsion sinusoïdale et son spectre ([fichier source](#)).

$$M(j \cdot f) = A \cdot \Delta t \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot \Delta t)$$

et que la convolution entre une fonction et une impulsion de Dirac reproduit la fonction à l'endroit où se situe l'impulsion, on voit que le spectre de l'impulsion sinusoïdale vaut

$$Y(j \cdot f) = M(j \cdot f) * X(j \cdot f) = \frac{A \cdot \Delta t}{2} \cdot (\text{sinc}(\pi \cdot (f + f_0) \cdot \Delta t) + \text{sinc}(\pi \cdot (f - f_0) \cdot \Delta t))$$

On constate ainsi que le spectre d'une impulsion sinusoïdale de durée Δt est constitué de deux sinus cardinaux situés en $+f_0$ et $-f_0$ (figure 2.13).

2.4 Quelques conclusions

2.4.1 TF des signaux périodiques

Du paragraphe précédent, on retiendra que la transformation de Fourier s'applique également à des signaux périodiques, c'est-à-dire à des signaux de puis-

sance moyenne finie. Dans ce cas, les raies spectrales de la série de Fourier sont remplacées par des impulsions de Dirac.

2.4.2 Relations avec la transformation de Laplace

Les définitions des transformées de Fourier et Laplace montrent une forte similitude. On a en effet :

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt$$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad \text{avec} \quad s \in \mathbf{C} \quad s = \sigma + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$

Si l'on a défini des transformations si proches, mais malgré tout distinctes, c'est que tous les signaux ne sont pas transformables de Fourier et/ou de Laplace. En effet, l'existence de ces transformations entraînent les restrictions suivantes :

- pour la transformation de Fourier, il faut que le signal soit intégrable en valeur absolue et que le nombre de ses discontinuités soit fini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot dt < \infty$$

- pour la transformation de Laplace, il faut que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) \cdot e^{-s \cdot t}| \cdot dt < \infty$$

autrement dit, il faut que le signal $x(t)$ pondéré par une exponentielle amortie soit intégrable en valeur absolue.

Des deux points ci-dessus, il découle que tous les signaux à énergie finie, permanents ou non, possèdent une transformée de Fourier mais pas nécessairement une transformée de Laplace. Ainsi en est-il de l'exponentielle symétrique et, au sens des limites, des signaux périodiques à puissance finie.

Par contre, des signaux démarrant en $t = 0$ [s] tels qu'une rampe $x(t) = a \cdot t \cdot \epsilon(t)$, une parabole $x(t) = a \cdot t^2 \cdot \epsilon(t)$, ne sont pas transformables de Fourier, alors qu'ils possèdent une transformée de Laplace.

Il existe d'autre part des signaux qui possèdent les deux transformées ; par exemple, les signaux amortis démarrant en $t = 0$ [s]. Et d'autres qui n'en possèdent pas du tout ; par exemple $x(t) = a \cdot t$ pour $-\infty < t < +\infty$.

2.4.3 Table de quelques transformées de Fourier

On trouvera en fin de chapitre (§ 2.A page 121) une table illustrée des transformées de Fourier tirée de l'ouvrage de F. de Coulon [dC84].

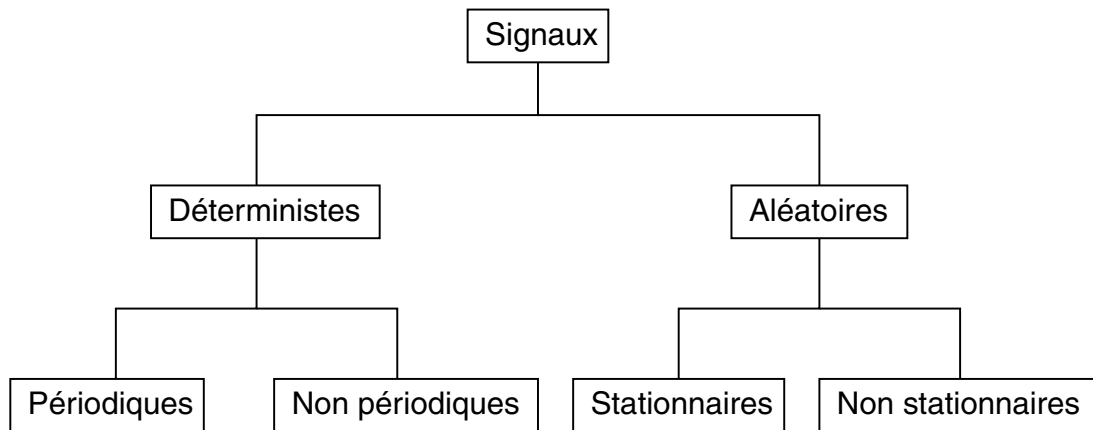


FIG. 2.14 – Classification phénoménologique des signaux.

2.5 Classification des signaux

Sans entrer dans les détails de la classification des signaux, il faut mentionner que plusieurs approches sont possibles. Parmi celles-ci, on en citera deux :

- la classification phénoménologique qui met l’accent sur le comportement temporel du signal ;
- la classification énergétique où l’on classe les signaux suivant qu’ils sont à énergie finie ou à puissance finie.

2.5.1 Classification phénoménologique

Dans cette classification, on répartit généralement les signaux en deux classes principales et quatre sous-classes illustrées par la figure 2.14.

Dans les deux classes principales, on trouve :

- les signaux déterministes dont l’évolution temporelle parfaitement définie peut être prédite par un modèle mathématique approprié ;
- les signaux aléatoires qui ont un comportement temporel imprévisible et dont la description ne peut se faire qu’au travers d’observations statistiques.

Parmi les signaux déterministes, on distingue :

- les signaux périodiques qui se répètent régulièrement. On peut noter que les signaux pseudo-aléatoires sont des signaux périodiques avec, à l’intérieur de la période, un comportement aléatoire ;
- les signaux quasi-périodiques qui résultent d’une somme de sinusôides dont le rapport des périodes n’est pas rationnel ;
- les signaux non-périodiques sont essentiellement représentés par des signaux transitoires dont l’existence est éphémère.

Parmi les signaux aléatoires, on distingue :

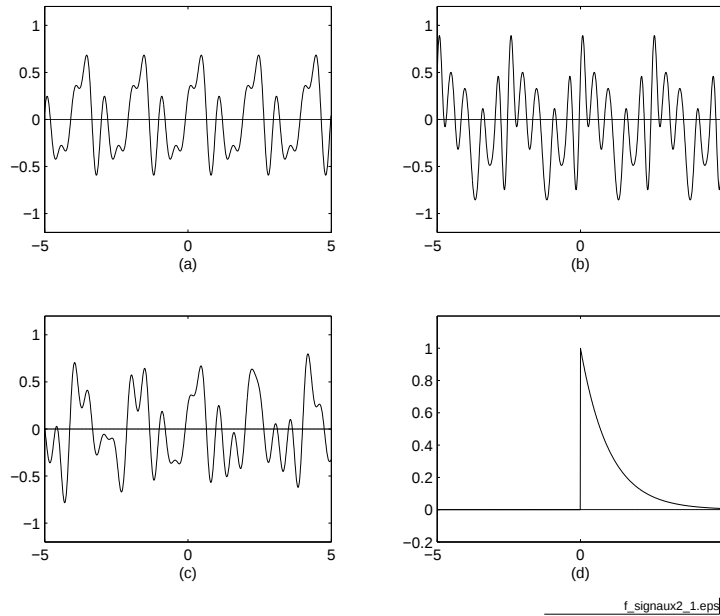


FIG. 2.15 – Exemples de signaux déterministes : (a) périodique, (b) pseudo-aléatoire, (c) quasi-périodique, (d) non-permanent ([fichier source](#)).

- les signaux stationnaires dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps (p.ex : le bruit électronique) ;
- les signaux non-stationnaires dont le comportement statistique évolue au cours du temps (p.ex. : la parole).

2.5.2 Classification énergétique

L'énergie W_x d'un signal $x(t)$ est définie comme suit :

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt \quad (2.29)$$

On dira que ce signal est à *énergie finie* si $W_x < \infty$. Dans cette catégorie, on rencontre tous les signaux temporellement éphémères qu'ils soient déterministes ou aléatoires.

La puissance moyenne P_x d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt = X_{\text{eff}}^2 \quad (2.30)$$

On notera que cette définition coïncide avec celle du **carré de la valeur efficace du signal** $x(t)$. On dira que celui-ci est à *puissance finie* si $P_x < \infty$. Cette

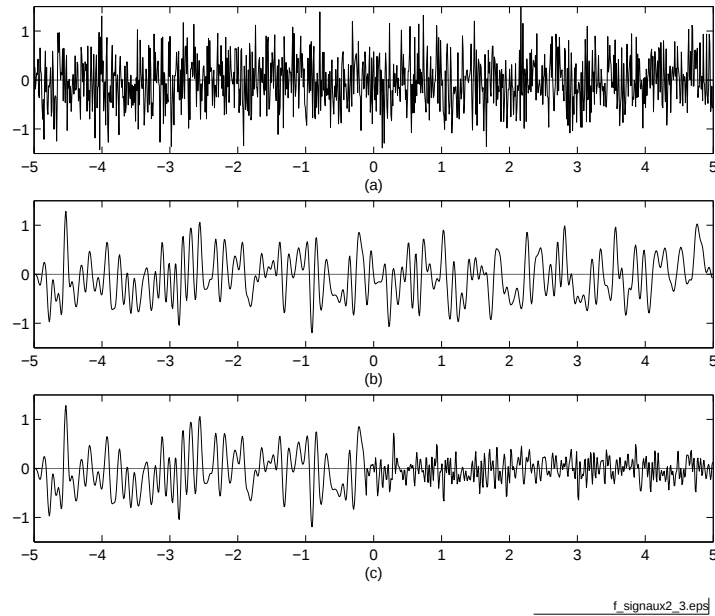


FIG. 2.16 – Trois exemples de signaux aléatoires : (a) bruit blanc, (b) bruit large bande, (c) bruit non-stationnaire ([fichier source](#)).

catégorie englobe les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux aléatoires permanents. Dans le cas où le signal est périodique, la durée d'intégration T est prise égale à une période du signal.

Certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces catégories ; c'est le cas, par exemple, de l'exponentielle :

$$x(t) = e^{-a \cdot t} \quad -\infty < t < \infty$$

2.6 Comparaison des signaux

Une opération mathématique qui, de par sa forme, est très proche de la convolution est la fonction de corrélation de deux signaux. Cependant, contrairement à la convolution, le but de la corrélation est de mesurer le degré de ressemblance de ces signaux et d'extraire des informations qui, dans une large mesure, dépendent de l'application considérée.

La corrélation est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la détection de signaux noyés dans du bruit, la mesure de temps de transmission, le GPS (Global Positioning System), etc.

Dans chaque cas, on dispose de deux fonctions : le signal de référence $x(t)$ et le signal reçu $y(t)$. Il faut alors trouver une opération mathématique permettant

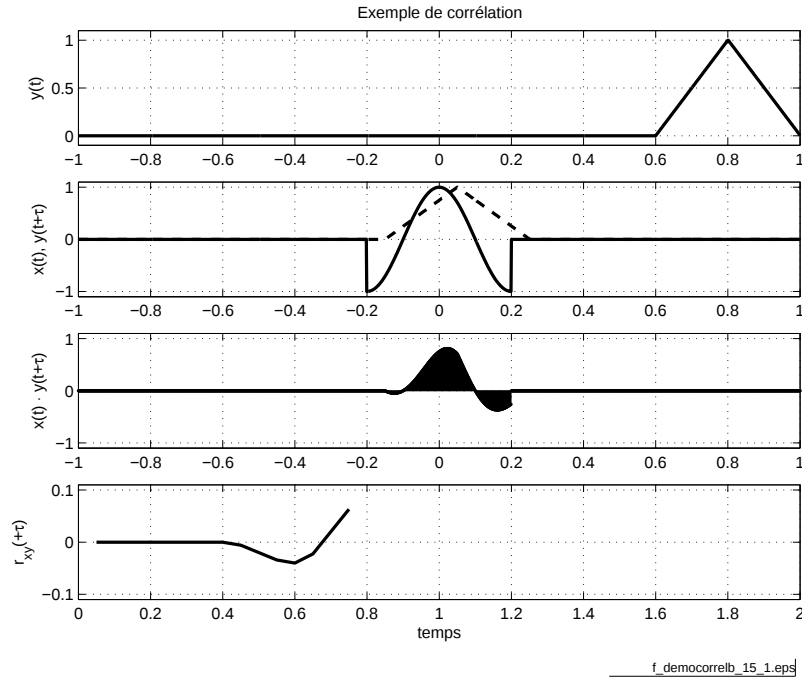


FIG. 2.17 – Corrélation de deux signaux ([fichier source](#)).

de comparer ces signaux et d'en mesurer la ressemblance ou corrélation. Ceci se fait simplement en effectuant l'intégrale du produit des signaux que l'on décale progressivement l'un par rapport à l'autre.

Deux illustrations en sont données dans les figures 2.17 et 2.18. Dans la première, on compare deux signaux dont la superposition (maximum de ressemblance) apparaît après un décalage temporel égal à 0.8. Dans la deuxième, on compare un signal chirp (signal sinusoïdal dont la fréquence varie linéairement avec le temps) avec sa version décalée. On y voit que la corrélation d'un tel signal avec sa version décalée possède un maximum très bien défini à l'instant correspondant au décalage des deux signaux.

2.6.1 Signaux à énergie finie

Intercorrélation de 2 signaux

Considérant deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à énergie finie, on définit la fonction d'*intercorrélation* (*fic*) comme l'intégrale du produit du signal $x(t)$ avec le signal $y(t)$ décalé d'une valeur τ :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt \quad (2.31)$$

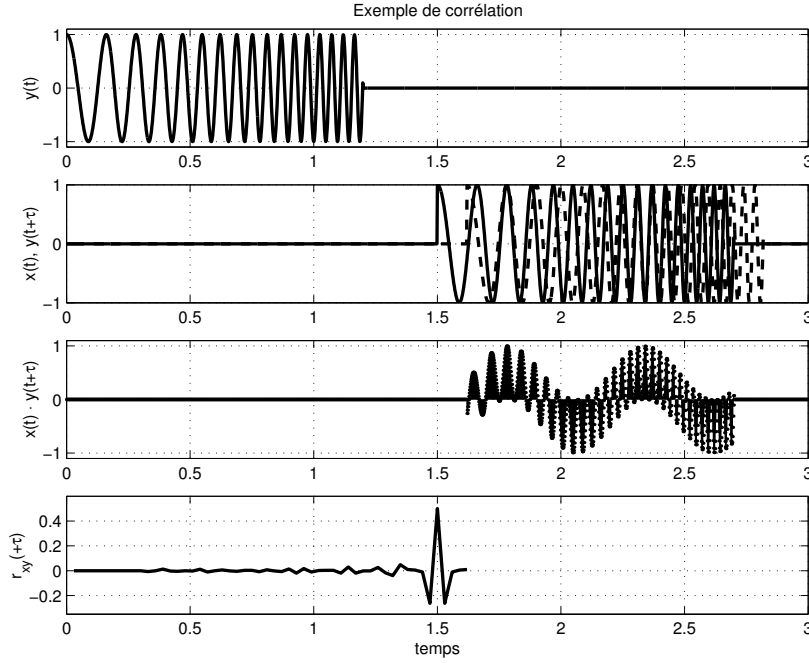


FIG. 2.18 – Corrélation d'un signal chirp.

Par changement de variable $\theta = t + \tau$, on montre que

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta - \tau) \cdot y(\theta) \cdot d\theta = r_{yx}(-\tau) \quad (2.32)$$

On voit ainsi que la fonction $r_{xy}(\tau)$ est aussi la version retournée de $r_{yx}(\tau)$ autour de l'ordonnée Oy .

Comme on peut le constater, les fonctions d'intercorrélation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt = r_{xy}(\tau)$$

et de convolution

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot y(t - \theta) \cdot d\theta = x(t) * y(t)$$

sont formellement très proches. On montre qu'elles sont reliées entre elles par :

$$r_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) \quad (2.33)$$

Cette relation valable dans l'espace temps a bien entendu son équivalent dans l'espace des fréquences :

$$R_{xy}(j \cdot f) = X^*(j \cdot f) \cdot Y(j \cdot f) \quad (2.34)$$

Autocorrélation d'un signal

Dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$, on obtient la fonction d'*autocorrélation* (fac) du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \quad (2.35)$$

qui, pour un décalage nul, donne l'énergie du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 \cdot dt = W_x \quad (2.36)$$

2.6.2 Corrélation de signaux à puissance finie

Dans ce cas, les signaux sont permanents et possèdent une énergie infiniment grande ; on ne peut donc pas utiliser les définitions précédentes. Pour cette catégorie de signaux, on redéfinit les deux fonctions de corrélation comme suit :

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y(t + \tau) \cdot dt \quad (2.37)$$

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \quad (2.38)$$

Dans le cas d'un décalage nul, on trouve avec l'autocorrélation la puissance du signal $x(t)$:

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)^2 \cdot dt = X_{\text{eff}}^2 = P_x \quad (2.39)$$

Il est d'autre part évident que si les signaux sont périodiques, l'intégration se fera sur une période seulement.

La figure 2.19 illustre des fonctions d'autocorrélation représentatives de quelques signaux aléatoires. On y trouve successivement trois signaux dont les puissances sont les mêmes, à savoir $0.2 [\text{V}_{\text{eff}}]^2$:

- *un bruit blanc gaussien* : son caractère non prévisible est manifeste et il est confirmé par l'étroitesse du pic de la fac.
- *un bruit à large bande* : ce signal a été obtenu en filtrant passe-bas le bruit blanc. Son contenu spectral moins étendu fait qu'il est raisonnablement possible de prévoir une valeur future pas trop éloignée. Une mesure de cet horizon de prévision est donnée par la largeur à mi-hauteur du pic de la fac.
- *un bruit à bande étroite* : ce signal a été obtenu en filtrant le bruit blanc à l'aide d'un filtre passe-bande. Son contenu fréquentiel étroit se manifeste par un comportement oscillant de manière assez régulière. Cette pseudo-périodicité est encore plus facile à déterminer à l'aide de sa fac : elle se mesure par la distance séparant le pic central du premier pic latéral.

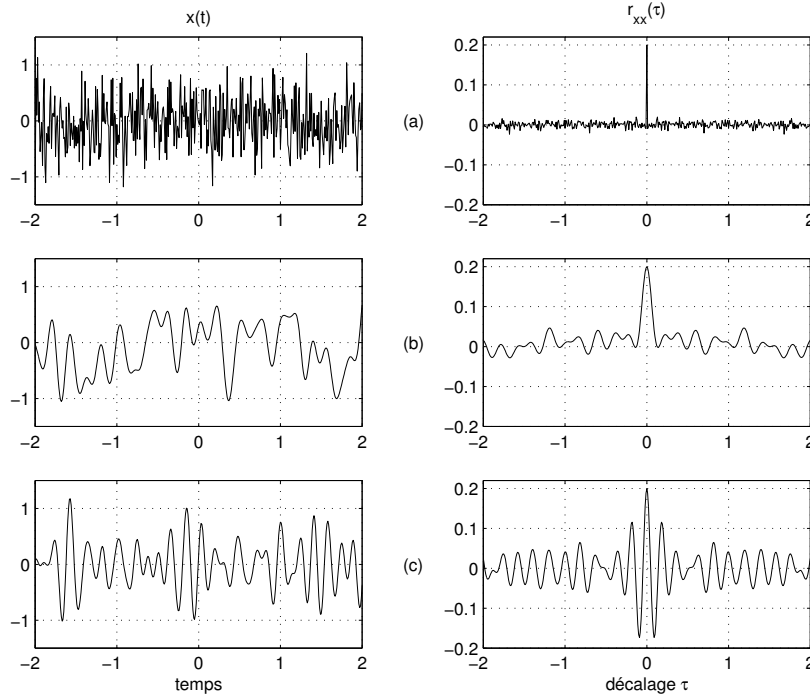


FIG. 2.19 – Quelques signaux et leur fonction d'autocorrélation.

2.6.3 Propriétés de l'autocorrélation

On rappellera tout d'abord que la fonction d'autocorrélation consiste à décaler un signal par rapport à lui-même, puis à intégrer le produit des deux. On montre alors aisément que la fonction d'autocorrélation possède les propriétés suivantes :

1. Lorsque le décalage temporel est nul ($\tau = 0$), la fac est égale à l'énergie du signal pour les signaux à énergie finie :

$$r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 \cdot dt = W_x \quad (2.40)$$

ou, à la puissance moyenne pour les signaux à puissance finie :

$$r_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)^2 \cdot dt = P_x$$

2. Comme la correspondance entre les 2 signaux ne peut pas être aussi forte que lorsque les signaux se superposent exactement cela entraîne que la fac est maximum pour un décalage nul. On a donc :

$$r_{xx}(0) \geq r_{xx}(\tau) \quad (2.41)$$

3. La fac est une fonction paire :

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau) \quad (2.42)$$

4. La fac d'un bruit blanc (ainsi appelé par analogie à la lumière blanche constituée de toutes les fréquences lumineuses) est une impulsion de Dirac. En effet, le bruit blanc étant formé d'une multitude de fréquences possédant la même puissance, il en résulte un signal variant si rapidement que sa valeur présente est indépendante des valeurs passées et que sa valeur est non nulle pour $\tau = 0$ seulement. On a donc :

$$r_{xx}(\tau) = \sigma^2 \cdot \delta(t) \quad (2.43)$$

où σ^2 est la variance du signal aléatoire ; c'est également, comme on l'a vu plus haut, la puissance du signal aléatoire.

5. La fac d'un signal périodique quelconque est une fonction périodique paire. Considérons comme exemple le signal $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$. On a alors :

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \\ &= \frac{A^2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \sin(\omega \cdot t + \alpha) \cdot \sin(\omega \cdot (t + \tau) + \alpha) \cdot dt \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(\omega \cdot \tau) \quad (2.44)$$

On remarque ainsi que l'amplitude de cette fac est la puissance $\frac{A^2}{2}$ du signal $x(t)$ et que la fac ne nous donne aucune information sur la phase α du signal.

6. Dans le cas d'un signal $x(t)$ perturbé par du bruit $n(t)$, il est possible de retrouver la fac du signal non perturbé. Considérant $y(t) = x(t) + n(t)$, on a en effet :

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (x(t) + n(t)) \cdot (x(t + \tau) + n(t + \tau)) \cdot dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} (x(t) \cdot x(t + \tau) + n(t) \cdot n(t + \tau) + \dots \\ &\quad \dots + x(t) \cdot n(t + \tau) + n(t) \cdot x(t + \tau)) \cdot dt \\ &= r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \end{aligned}$$

d'où :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) + r_{xn}(\tau) + r_{nx}(\tau) \quad (2.45)$$

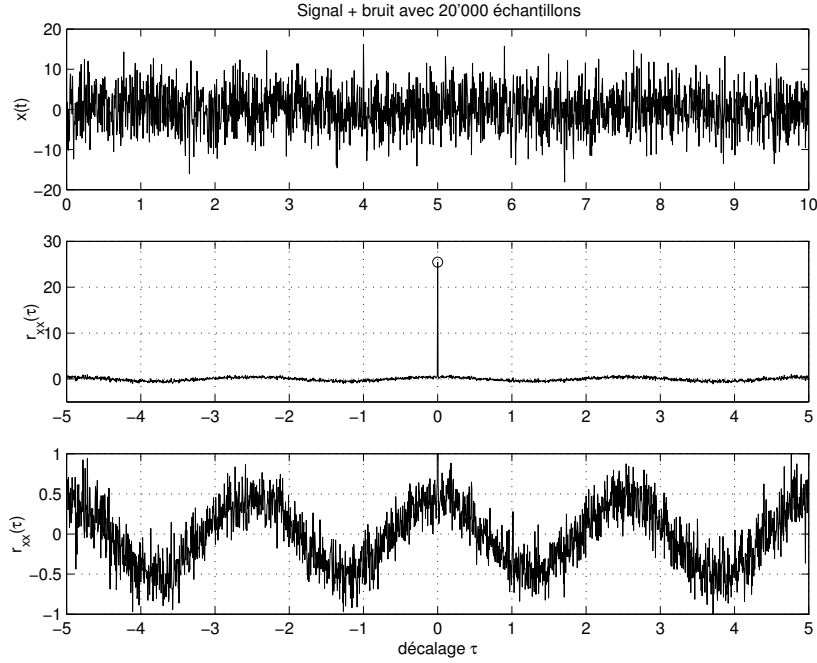


FIG. 2.20 – Extraction d'un signal avec l'aide de l'autocorrélation. Le dernier tracé correspond à celui du milieu avec une échelle verticale permettant de mieux voir les détails.

Dans le cas où le signal $x(t)$ et le bruit $n(t)$ ne sont pas corrélés, on a bien entendu $r_{xn}(\tau) = 0 = r_{nx}(\tau)$; ce qui donne finalement :

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \quad (2.46)$$

De plus, comme généralement la fac $r_{nn}(\tau)$ du bruit tend rapidement vers 0, on voit que, pour un décalage suffisamment grand, il restera la fac $r_{xx}(\tau)$ du signal $x(t)$.

Une illustration de cette dernière propriété (figure 2.20) montre comment l'autocorrélation permet d'extraire un signal noyé dans un bruit blanc. Dans cette figure, le signal est une sinusoïde d'amplitude 1 [V] et le bruit blanc possède une valeur efficace de 5 [V].

Le signal extrait est reconnaissable mais encore perturbé par du bruit. Comme ce bruit résiduel diminue avec la racine carrée du nombre d'échantillons, on voit qu'on peut diminuer le bruit en augmentant le nombre d'échantillons enregistrés.

2.6.4 Propriétés de l'intercorrrelation

Comme pour la fonction d'autocorrélation, on se contentera d'énoncer les propriétés des fonctions d'intercorrrelation :

1. En général la fic n'est ni paire, ni impaire.
2. Le maximum de la fic se situe à l'endroit du décalage correspondant au maximum de similitude entre les deux signaux. Cette propriété est très utilisée pour mesurer des temps de propagation.
3. Comme le fait de retarder $y(t)$ par rapport à $x(t)$ d'une valeur τ équivaut à avancer le signal $x(t)$ par rapport à $y(t)$, on aura :

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau) \quad (2.47)$$

4. Si les deux signaux sont périodiques de même période, la fic sera également périodique.

2.6.5 Calcul numérique de la corrélation

Le calcul numérique d'une corrélation se fait en remplaçant l'intégrale par la somme du produit des valeurs échantillonnées avec une période constante unité.

Dans le cas où l'on a suffisamment de points à disposition, on peut calculer la somme sur N points sans atteindre les limites des signaux enregistrés. On a alors :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot y[n+k] \quad k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \quad (2.48)$$

Dans le cas où l'on souhaite utiliser toutes les valeurs à disposition, le nombre de points intervenant dans la somme diminue au fur et à mesure que le décalage augmente. Pour éviter de biaiser le résultat de la corrélation, on la calcule alors comme suit :

$$r_{xy}[k] = \frac{1}{N - |k|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|k|} x[n] \cdot y[n+k] \quad 0 \leq k \leq N - 1 \quad (2.49)$$

2.7 Exemples de corrélation

La fonction d'intercorrélation est très souvent utilisée pour détecter la présence d'un message et mesurer un temps de propagation. Dans ce but, le signal émis est choisi de manière à ce que le pic de sa fonction d'autocorrélation soit très bien défini. Les signaux le plus souvent utilisés sont les signaux chirp (à fréquence variable au cours du temps) et les séquences binaires pseudo-aléatoires.

2.7.1 Fonction de corrélation d'un signal chirp

Le signal chirp est un signal sinusoïdal dont la fréquence (ou la pulsation) varie linéairement avec le temps. Il est défini comme suit :

$$x(t) = A \cdot \sin(\theta(t) + \alpha)$$

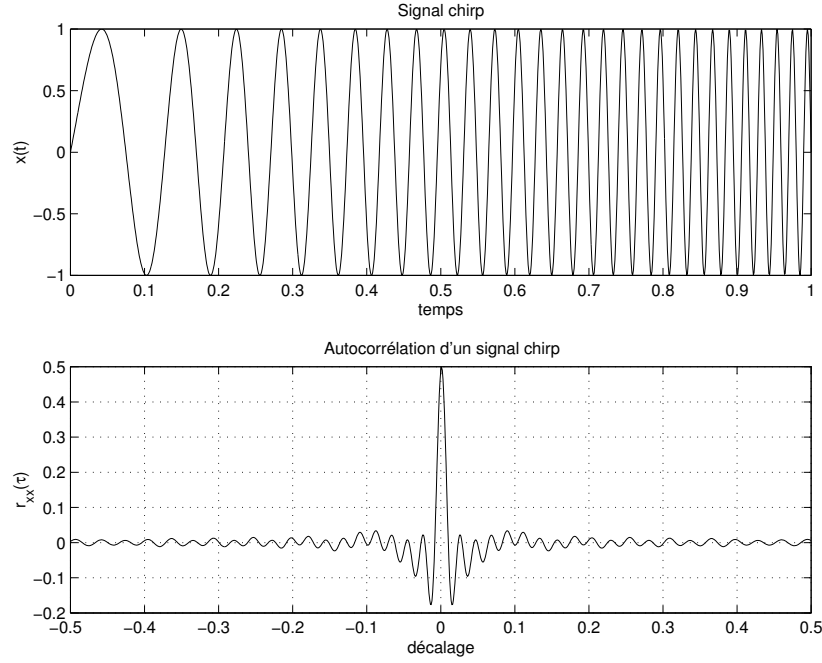


FIG. 2.21 – Autocorrélation d'un signal chirp.

avec

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) \cdot d\tau$$

et

$$\omega(t) = \omega_{\min} + \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{t_{\max}} \cdot t \quad 0 \leq t \leq t_{\max}$$

Sa fonction d'autocorrélation possède un maximum très bien défini correspondant à la puissance du signal qui vaut $\frac{A^2}{2}$ (figure 2.21).

2.7.2 Fonction de corrélation d'une SBPA

Une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) est une succession de valeurs binaires (généralement ± 1) dont la distribution temporelle possède un caractère aléatoire pendant une certaine durée et qui ensuite se répète périodiquement. Sa fonction d'autocorrélation possède également un pic très bien défini égal à la puissance A^2 du signal (figure 2.22).

2.7.3 Une illustration de l'utilisation de la corrélation

Comme exemple illustratif, imaginons un système radar avec lequel on désire détecter la présence ou non d'un avion puis en déduire la distance à laquelle il se trouve. Le radar émet un signal chirp $x(t)$ et capte en retour l'écho $y(t)$ renvoyé

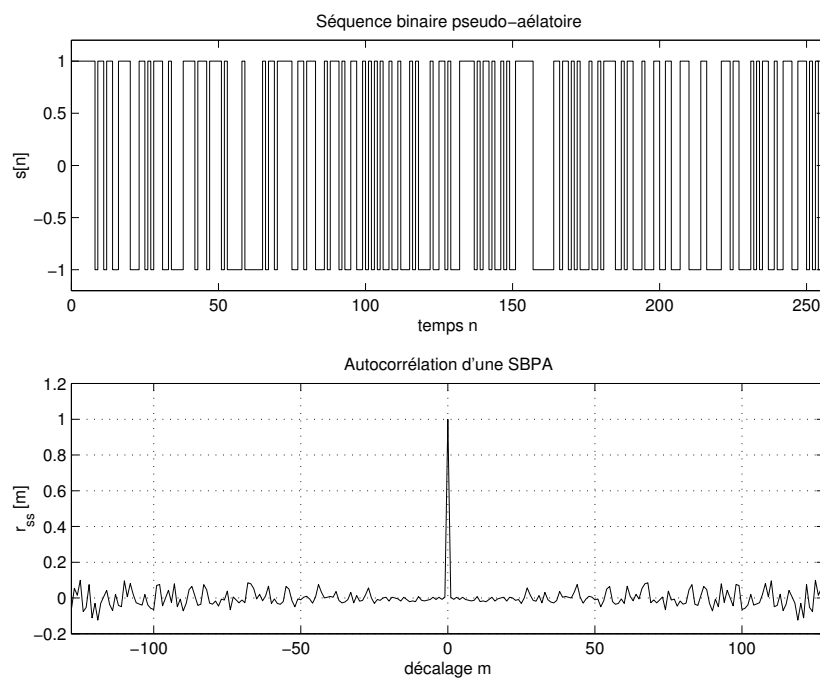
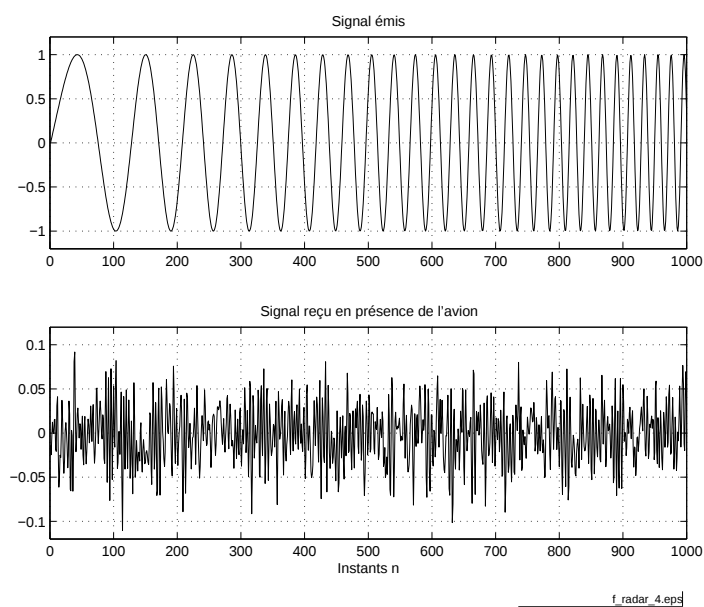


FIG. 2.22 – Autocorrélation d'une SBPA.

FIG. 2.23 – Signaux émis et reçus par un radar ([fichier source](#)).

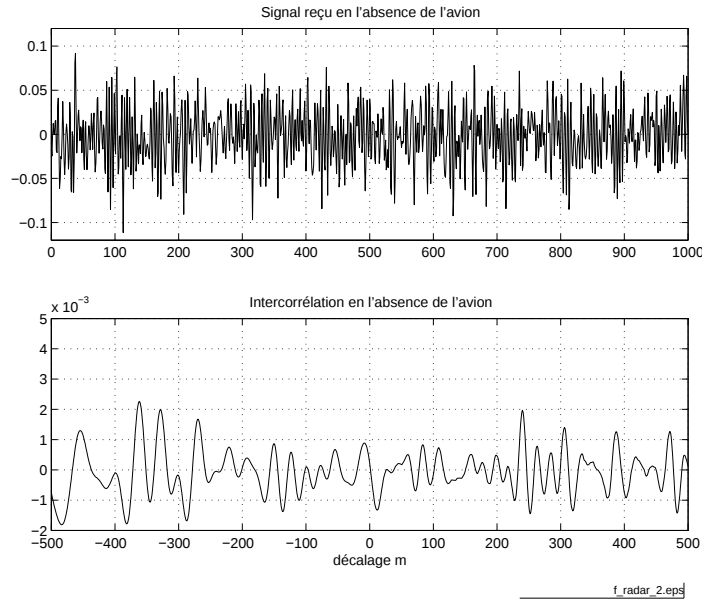


FIG. 2.24 – Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit ([fichier source](#)).

par l'avion (figure 2.23). S'il n'y a pas d'avion dans la zone couverte par le radar, le signal reçu $y(t)$ est constitué d'un bruit $n(t)$ seulement. De plus, il est évident que si un avion est présent, le signal $y(t)$ reçu en retour consiste en une version atténuée, retardée, et fortement bruitée du signal émis $x(t)$. Ainsi, le signal reçu peut être décrit par :

$$y(t) = A \cdot x(t - t_d) + n(t)$$

avec :

- A = une fonction d'atténuation dépendant de la distance et de la forme de l'avion
- t_d = le temps mis par l'onde pour faire son aller et retour
- $n(t)$ = le bruit additionnel capté par l'antenne et généré par l'électronique du radar.

Pratiquement, le signal reçu est tellement perturbé par le bruit qu'une analyse visuelle est incapable de déceler la présence ou l'absence d'un signal réfléchi par l'avion (figure 2.23).

Les figures 2.24 et 2.25 illustrent le principe de l'utilisation d'un signal chirp pour détecter un avion et mesurer sa distance. Considérons les deux situations suivantes :

1. **Absence d'avion** : Le signal reçu $y(t)$ est fortement atténué et perturbé. Seule une intercorrélacion entre $x(t)$ et $y(t)$ permet de savoir si un avion est présent ou non. Dans ce dernier cas, aucun pic bien distinct n'apparaît dans le graphe (figure 2.24).

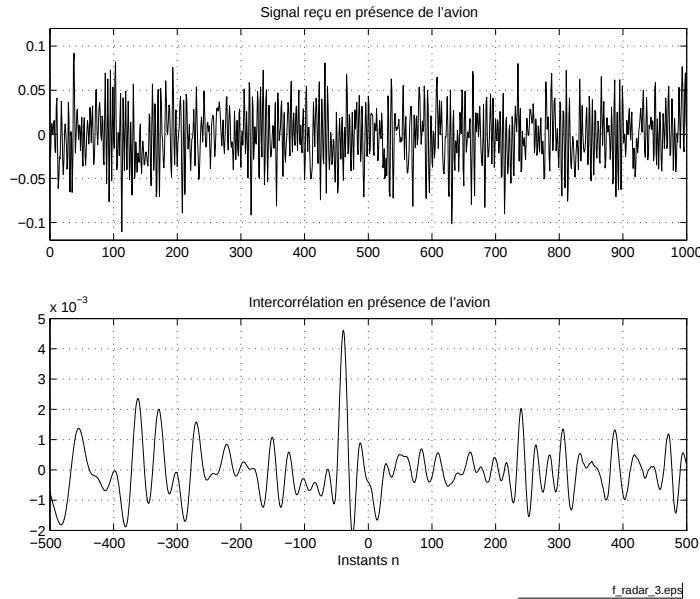


FIG. 2.25 – Intercorrélation entre un signal chirp et du bruit corrélé ([fichier source](#)).

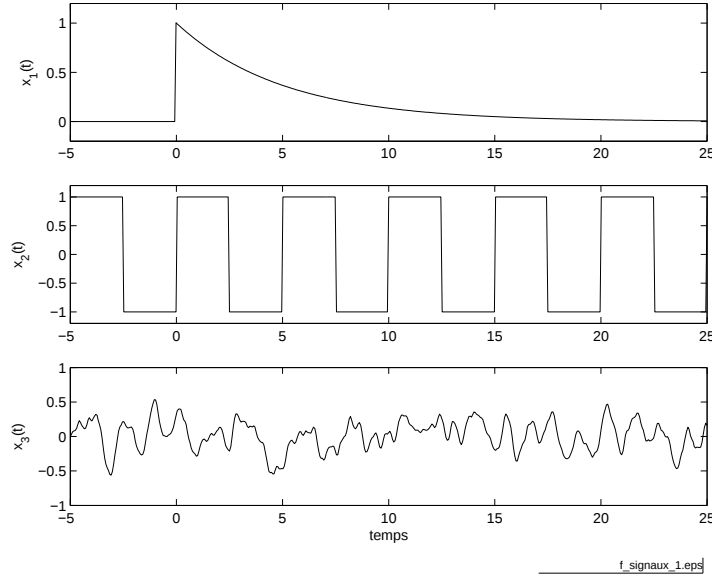
2. **Présence d'un avion** : Ici, l'intercorrélation fait apparaître un pic très étroit se dégageant nettement au-dessus du bruit de fond (figure 2.25). On notera que ce pic est légèrement décalé vers la droite par rapport à la position centrale ; ce décalage correspond au temps d'aller et retour du signal émis. Une fois ce temps déterminé, on peut calculer la distance de l'avion par rapport au radar.

2.8 Signaux types

Considérons comme exemple de signaux-types les trois signaux représentés à la figure 2.26. Le premier $x_1(t) = A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$ n'est ni périodique ni permanent ; dans la même catégorie, on peut placer les signaux temporaires tels que les signaux périodiques de durée finie par exemple. Le deuxième, un signal carré, est périodique et permanent. Le troisième $x_3(t)$ est un signal aléatoire permanent pour lequel il n'existe pas de description temporelle.

2.8.1 Signaux déterministes temporaires

Les signaux déterministes temporaires tels que $x_1(t)$ (figure 2.26) sont des signaux à puissance moyenne nulle mais énergie finie. Ils possèdent un spectre continu défini par leur densité spectrale d'amplitude $X(j \cdot f)$. Celle-ci n'est autre

FIG. 2.26 – Trois signaux-type ([fichier source](#)).

que la transformée de Fourier du signal :

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \quad [V \cdot s] = \left[\frac{V}{Hz} \right] \quad (2.50)$$

Leur énergie se calcule soit au niveau temporel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2(t) \cdot dt \quad [V^2 \cdot s]$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot df \quad \left[\frac{V^2}{Hz} \right] \quad (2.51)$$

à partir de la densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ exprimée en $\left[\frac{V^2}{Hz^2} \right]$

$$S_x(f) = X(j \cdot f) \cdot X^*(j \cdot f) = |X(j \cdot f)|^2 \quad (2.52)$$

2.8.2 Signaux déterministes permanents

Un signal déterministe permanent, par exemple $x_2(t)$ (figure 2.26), est un signal périodique dont la puissance est finie et l'énergie infinie. Sa description spectrale peut se faire grâce à la transformée de Fourier du signal

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot dt \quad [V \cdot s] \quad (2.53)$$

Pour tous les signaux périodiques, on obtient alors une densité spectrale d'amplitude constituée d'impulsions de Dirac. Ces impulsions correspondent aux raies spectrales du signal périodique qui, comme on le sait, possède un spectre discret.

Plutôt que de travailler avec les impulsions de Dirac, il est alors plus simple et plus pratique d'en rester à la description bien connue des séries de Fourier

$$X(j \cdot k) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_0 \cdot t} \cdot dt \quad [\text{V}] \quad (2.54)$$

La puissance des signaux périodiques se calcule soit au niveau temporel

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_1^2(t) \cdot dt = 0 \quad [\text{V}^2] \quad (2.55)$$

soit dans le domaine fréquentiel

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot k)|^2 \quad [\text{V}^2] \quad (2.56)$$

2.8.3 Signaux aléatoires

Par définition, les signaux aléatoires ne peuvent pas être décrits analytiquement. On peut cependant tenter de les classer dans une des trois catégories types qui sont :

- les bruits à large bande dans lesquels toutes les fréquences sont présentes à amplitudes égales (à la limite du bruit blanc) ;
- les bruits à bande limitée dans lesquels les composantes hautes fréquences sont nulles ;
- les bruits colorés dans lesquels toutes les fréquences sont présentes mais avec des amplitudes variables.

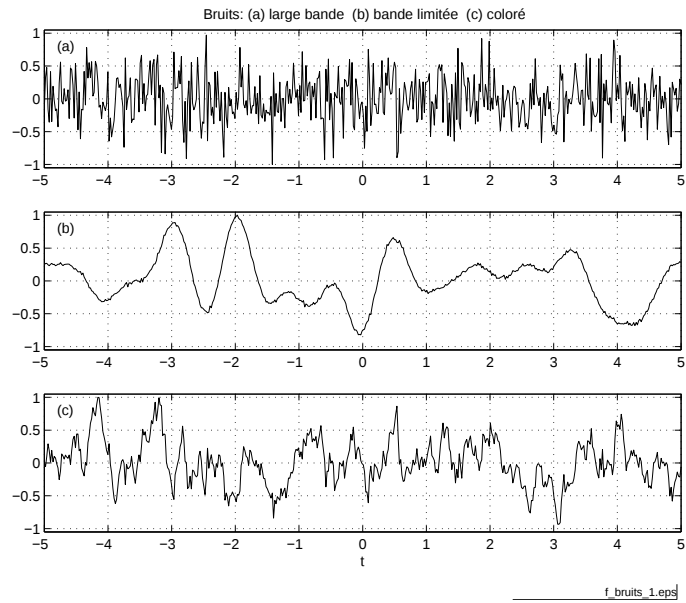
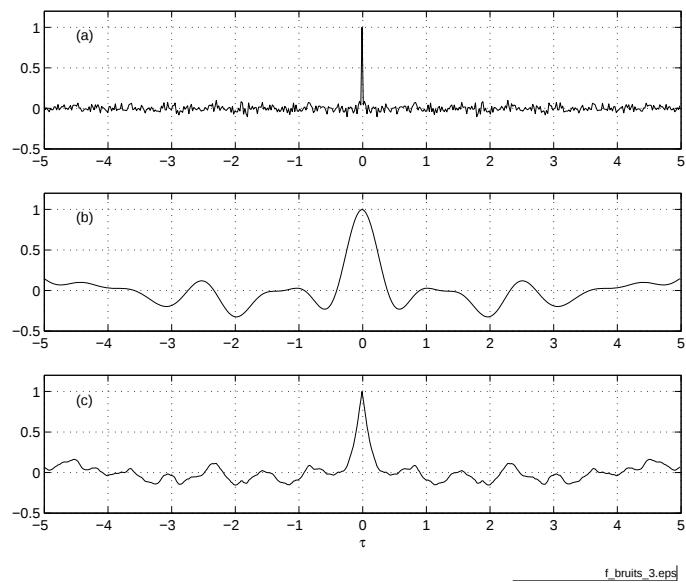
Une illustration temporelle de ces trois bruits est donnée dans la figure 2.27.

2.9 Description des signaux aléatoires

Comme aucune description analytique n'est possible pour les signaux aléatoires, on tente d'en extraire des propriétés statistiques temporelles en utilisant leurs fonctions d'autocorrélation (fac) illustrées à la figure 2.28. On en déduit que la fac du premier signal est extrêmement étroite ; on la modélise par une impulsion de Dirac. La deuxième fac rappelle une fonction en sinus cardinal. Enfin, la troisième peut être modélisée par une exponentielle décroissante symétrique.

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation fournit la densité spectrale de puissance

$$R_{xx}(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} \cdot d\tau \quad [\text{V}^2 \cdot \text{s}] = \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$$

FIG. 2.27 – Trois signaux aléatoires ([fichier source](#)).FIG. 2.28 – Fonctions d'autocorrélation des trois bruits types ([fichier source](#)).

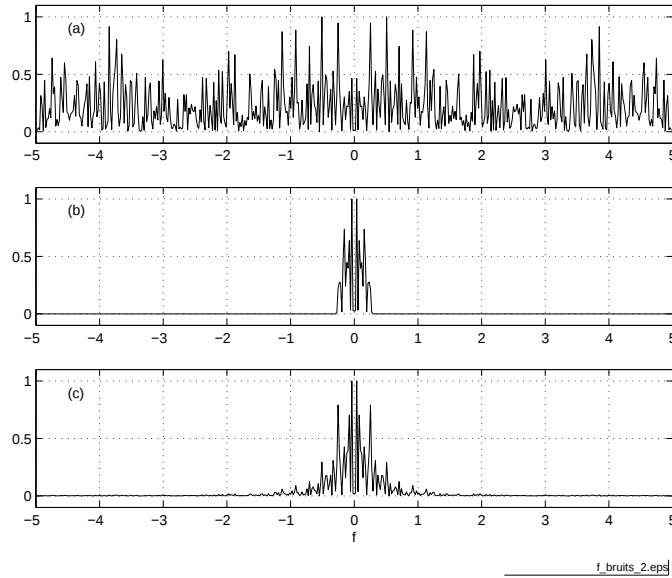


FIG. 2.29 – Densités spectrales de puissance des trois bruits types ([fichier source](#)).

L'observation de la densité spectrale de puissance (figure 2.29) des trois signaux permet de tirer quelques propriétés et de définir des modèles représentant aussi bien que possible chacune des trois densités spectrales de puissance.

2.9.1 Le bruit blanc à densité spectrale constante et bande infinie

Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$ et sa densité spectrale de puissance est constante. Il est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = A^2 \quad -\infty < f < +\infty \quad \left[\frac{V^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.57)$$

dont la fac est une impulsion de Dirac :

$$r_{xx}(\tau) = A^2 \cdot \delta(\tau) \quad [V^2] \quad (2.58)$$

Le théorème de Parseval nous dit alors que sa puissance est infinie ; est-ce possible ? Comme la réponse est négative, on préfère travailler avec un modèle aussi simple, mais plus réaliste ; c'est le bruit à densité spectrale constante et bande limitée

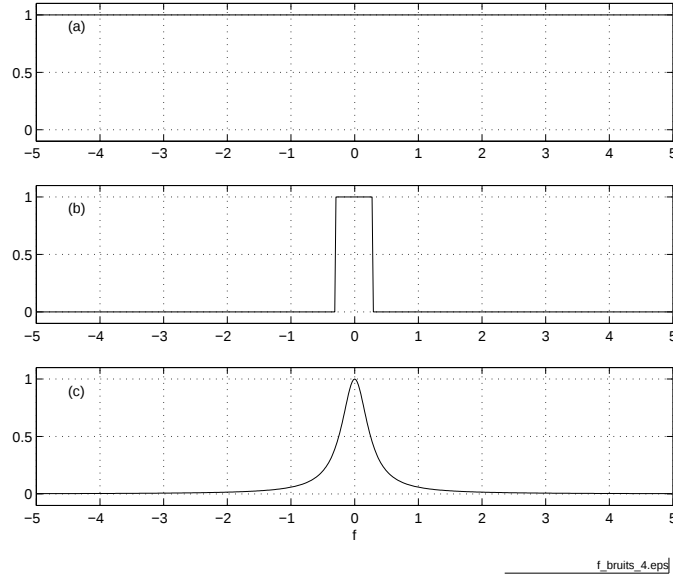


FIG. 2.30 – Trois modèles de densités spectrales de puissance. A comparer avec les densités spectrales de puissance "mesurées" de la figure 2.29 ([fichier source](#)).

2.9.2 Le bruit à densité spectrale constante et bande limitée

Il contient toutes les fréquences de $-f_{\max}$ à $+f_{\max}$. Sa puissance finie est souvent désignée par la variance statistique σ_x^2 qui n'est autre que le carré de la valeur efficace X_{eff}^2 du signal. Ce bruit est alors représenté par

$$R_{xx}(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{2 \cdot f_{\max}} & \text{si } -f_{\max} < f < +f_{\max} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.59)$$

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot f_{\max} \cdot \tau)}{2 \cdot \pi \cdot f_{\max} \cdot \tau} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [\text{V}^2] \quad (2.60)$$

2.9.3 Le bruit coloré à puissance finie

Il contient toutes les fréquences de $-\infty$ à $+\infty$. Mais son spectre diminuant avec la fréquence, sa puissance σ_x^2 est finie. Un modèle souvent utilisé est le suivant :

$$R_{xx}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\pi \cdot f_c} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad -\infty < f < +\infty \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.61)$$

	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
Signaux		
entrée	$x(t)$	$X(j \cdot f)$
système	$h(t)$	$H(j \cdot f)$
sortie	$y(t)$	$Y(j \cdot f)$
relation	$y(t) = h(t) * x(t)$	$Y(j \cdot f) = H(j \cdot f) \cdot X(j \cdot f)$
Corrélation		
entrée	$r_{xx}(\tau)$	$R_{xx}(f)$
système	$h(\tau)$	$H(j \cdot f)$
sortie	$r_{xy}(\tau)$	$R_{xy}(j \cdot f)$
relation	$r_{xy}(\tau) = h(\tau) * r_{xx}(\tau)$	$R_{xy}(j \cdot f) = H(j \cdot f) \cdot R_{xx}(f)$
Densités spectrales		
		$R_{yy}(f) = H(j \cdot f) ^2 \cdot R_{xx}(f)$

TAB. 2.2 – Relations temporelles et fréquentielles.

dont la fac vaut

$$r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \cdot e^{-a \cdot |\tau|} \quad -\infty < \tau < +\infty \quad [V^2] \quad (2.62)$$

avec

$$a = 2 \cdot \pi \cdot f_c \quad \left[\frac{1}{s} \right] \quad (2.63)$$

2.10 Systèmes linéaires et densités spectrales

Il est extrêmement fréquent que l'on doive étudier des signaux reliés entre-eux par le passage au travers d'un système linéaire, par exemple un filtre. Celui-ci étant décrit par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse fréquentielle $H(j \cdot f)$, les signaux d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ sont alors reliés entre eux par les relations bien connues :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot x(t - \theta) \cdot d\theta \quad (2.64)$$

$$Y(j \cdot f) = H(j \cdot f) \cdot X(j \cdot f) \quad (2.65)$$

où $X(j \cdot f)$ et $Y(j \cdot f)$ sont les densités spectrales d'amplitude des signaux $x(t)$ et $y(t)$.

Sachant que les densités spectrales de puissance (ou d'énergie) valent :

$$R_{xx}(f) = X(j \cdot f) \cdot X^*(j \cdot f) = |X(j \cdot f)|^2 \quad (2.66)$$

$$R_{yy}(f) = Y(j \cdot f) \cdot Y(j \cdot f)^* = |Y(j \cdot f)|^2 \quad (2.67)$$

on montre aisément que les densités spectrales de puissance sont reliées entre elles par la relation suivante :

$$R_{yy}(f) = |H(j \cdot f)|^2 \cdot R_{xx}(f) \quad (2.68)$$

On peut également montrer que si $x(t)$ et $y(t)$ sont reliés entre eux par $h(t)$, le produit de convolution s'applique aux fonctions de corrélation et l'on a :

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \cdot r_{xx}(\tau - \theta) \cdot d\theta \quad (2.69)$$

$$R_{xy}(f) = H(j \cdot f) \cdot R_{xx}(f) \quad (2.70)$$

Le tableau 2.2 réunit les relations existant entre les signaux, les fonctions de corrélation et les densités spectrales.

2.11 Énergie et puissance des signaux

Suivant les caractéristiques des signaux, on calculera leur puissance P ou leur énergie W . Ce calcul peut, bien entendu, se faire dans le domaine temporel :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \quad [\text{V}^2] \quad (2.71)$$

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) \cdot dt \quad [\text{V}^2 \cdot \text{s}] \quad (2.72)$$

ou dans celui des fréquences :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f) \cdot df \quad [\text{V}^2] \quad (2.73)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot df \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.74)$$

où $R(f) \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right]$ est la densité spectrale de puissance et $S(f) \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}^2} \right]$ est la densité spectrale d'énergie.

2.11.1 Domaine temporel

Reprenons les signaux de la figure 2.26 et calculons leur puissance ou leur énergie dans le domaine temporel.

Signal temporeire

Soit $x_1(t) = A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$; sa puissance moyenne est nulle et son énergie finie :

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_1^2(t) \cdot dt = 0$$

$$W_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_1^2(t) \cdot dt = \frac{A^2}{2 \cdot a} = \frac{A^2 \cdot \tau}{2} < \infty \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.75)$$

Signal périodique permanent

Soit $x_2(t) = A \cdot \text{signe}(\sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t))$; sa puissance est finie et son énergie infinie :

$$P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_2^2(t) \cdot dt = A^2 < \infty \quad [\text{V}^2] \quad (2.76)$$

$$W_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_2^2(t) \cdot dt \rightarrow \infty$$

Signal aléatoire permanent

Un signal aléatoire et permanent possède une puissance finie et une énergie infinie :

$$P_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_3^2(t) \cdot dt = X_{3,\text{eff}}^2 < \infty \quad [\text{V}^2] \quad (2.77)$$

$$W_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x_3^2(t) \cdot dt \rightarrow \infty$$

2.11.2 Domaine fréquentiel

Reprenant les signaux de la figure 2.26 et connaissant leur densité spectrale de puissance ou d'énergie, on peut calculer leur puissance ou énergie dans le domaine fréquentiel.

Signal temporeire

Son énergie se calcule après définition de sa densité spectrale d'énergie $S_1(f)$:

$$S_1(f) = |X_1(j \cdot f)|^2 = \left| \frac{A}{a + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \right|^2 = \frac{A^2}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}^2} \right] \quad (2.78)$$

$$W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(f) \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{a^2 + (2 \cdot \pi \cdot f)^2} \cdot df = \frac{A^2}{2 \cdot a} \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.79)$$

Signal périodique permanent

Sa puissance se calcule après définition de sa densité spectrale de puissance $R_2(f)$. Comme le signal est périodique, celle-ci est discrète et s'obtient à partir des raies spectrales $X(j \cdot k)$:

$$R_2(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot k)|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| A \cdot \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \Delta t)}{\pi \cdot f \cdot \Delta t} \cdot \delta(f - k \cdot f_0) \right|^2 \quad \left[\frac{\text{V}^2}{\text{Hz}} \right] \quad (2.80)$$

$$P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(f) \cdot df = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| A \cdot \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t)}{k \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \Delta t} \right|^2 = A^2 \quad [\text{V}_{\text{eff}}]^2 \quad (2.81)$$

Signal aléatoire permanent

Grâce aux modèles que l'on s'est donné pour décrire les signaux aléatoires (section 2.8.3), on peut calculer la puissance du signal $x_3(t)$:

$$P_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_3(f) \cdot df = X_{3,\text{eff}}^2 \quad [\text{V}_{\text{eff}}]^2 \quad (2.82)$$

Des graphes illustrants ces trois bruits ainsi que les fonctions d'autocorrélation et les densités spectrales de puissance correspondantes sont présentés dans les figures à 2.27 à 2.30.

Remarque Il est intéressant de relever que, pour les composants semiconducteurs, la donnée de la densité spectrale de puissance $R(f)$ est remplacée par une *tension équivalente de bruit* qui n'est autre que la racine carrée de la densité spectrale de puissance :

$$e_n(f) = \sqrt{R(f)} \quad \left[\frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad (2.83)$$

Par exemple, les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel LF411 montrent que, dans les basses fréquences, le spectre du bruit décroît à raison de 10 [dB] par décade (flicker noise = bruit de grenaille) et qu'il reste pratiquement constant au delà de 300 [Hz] et qu'il vaut alors :

$$e_n \approx 30 \left[\frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \quad f > 300 [\text{Hz}]$$

2.12 Temps, spectres et statistique des signaux

La page suivante, tirée de l'ouvrage de F.de Coulon [dC84], illustre les propriétés temporelles, spectrales et statistiques de quelques signaux. Comme on l'a déjà dit plus haut, ces descriptions ne sont que des points de vue différents d'une même réalité : le signal temporel $x(t)$. Ces points de vue sont complémentaires et c'est le but du traitement des signaux de les relier entre eux et d'en tirer efficacement le maximum d'information.

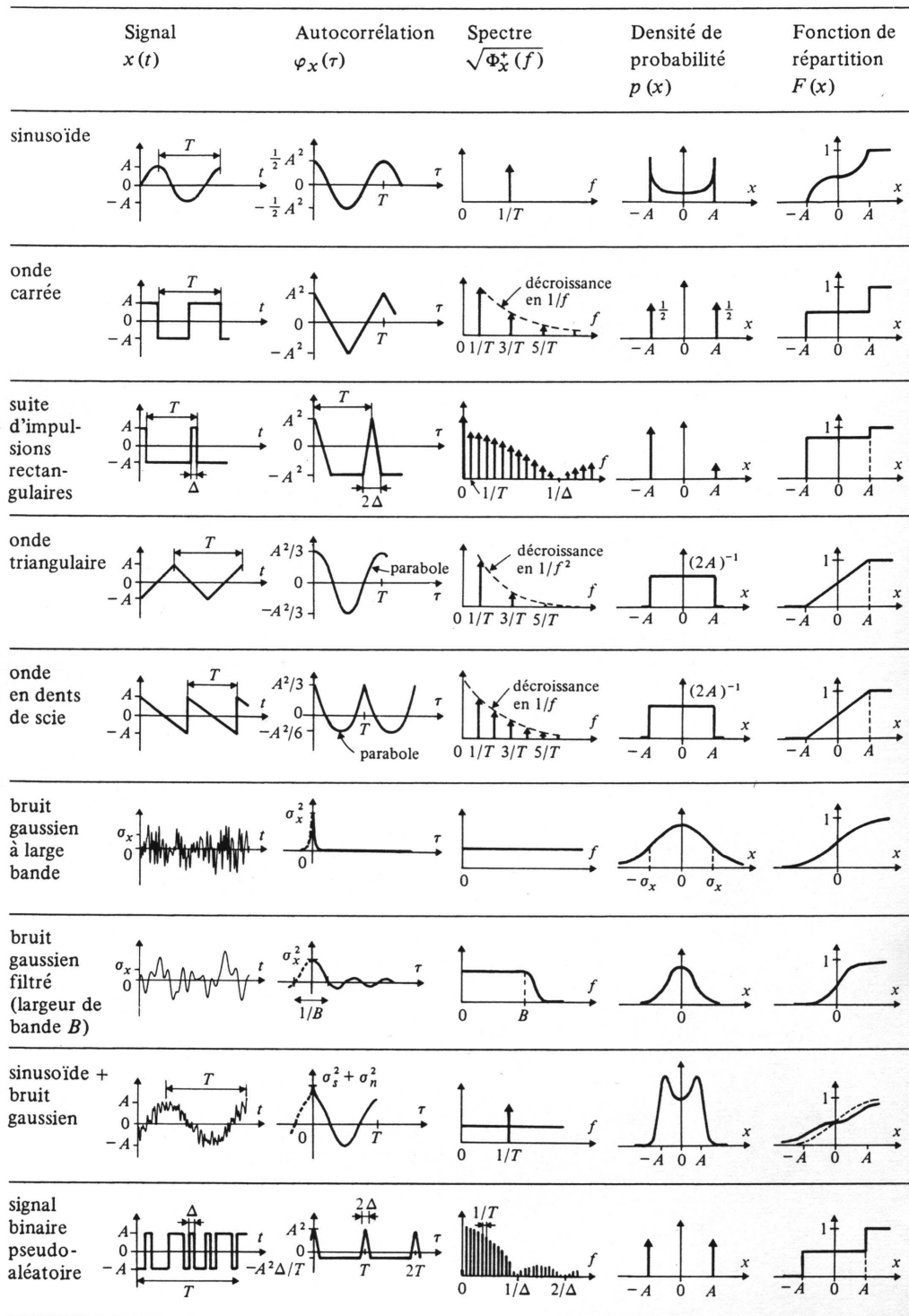


FIG. 2.31 – Descriptions temporelle, spectrale et statistique de signaux typiques [de Coulon].

2.13 Quelques exemples

Exemple 1

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$ à un filtre passe-bande idéal.

1. Dessinez la réponse fréquentielle du filtre.
2. Esquissez les densités spectrales d'amplitude $|U_1(j \cdot f)|$ et $|U_2(j \cdot f)|$.
3. Que valent les densités spectrales d'énergie $S_1(f)$ et $S_2(f)$?
4. Calculez les énergies W_1 et W_2 des signaux d'entrée et de sortie.
5. A.N. : $U_0 = 10 \text{ [V]}$, $a = 24'000 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, $f_1 = 4 \text{ [kHz]}$, $f_2 = 6 \text{ [kHz]}$

Solution :

Exemple 2

Un opérateur vous informe qu'il a mesuré à la sortie d'un amplificateur un bruit large bande dont la valeur efficace vaut $U_{1,\text{eff}} = 0.1 [\text{V}_{\text{eff}}]$.

1. Quelle est la puissance P_1 de ce bruit ?
2. L'information apportée par l'opérateur est-elle significative et suffisante ?
Après discussion, il précise que cette mesure a été effectuée avec un volt-mètre à vraie valeur efficace dont la bande passante est de 100 [kHz].
3. Esquissez puis calculez la densité spectrale de puissance $R_1(f)$ de ce bruit.
4. La sortie de cet amplificateur est branchée sur un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure est fixée à 1 [kHz]. Esquissez la densité spectrale de puissance $R_2(f)$ du bruit après le filtre.
5. Quelle valeur efficace $U_{2,\text{eff}}$ mesurerez-vous après le filtre ?

Solution :

2.13.1 Exemple 3

À la sortie d'un amplificateur dont la bande passante est de 100 [kHz] , on mesure un bruit de $0.1\text{ [V}_{\text{eff}}]$. On filtre ce bruit avec un filtre RC passe-bas réalisé avec $R = 1.6\text{ [k}\Omega]$ et $C = 100\text{ [nF]}$.

1. Calculez la densité spectrale de puissance $R_1(f)$ du bruit de sortie de l'amplificateur.
2. Calculez la fréquence de coupure du filtre passe-bas.
3. Esquissez sur un même diagramme les densités spectrales de puissance $R_1(f)$ et $R_2(f)$ présentes à l'entrée et à la sortie du filtre RC.
4. Quelle sera la valeur efficace de la tension à la sortie du filtre RC ?

Solution :

2.13.2 Exemple 4

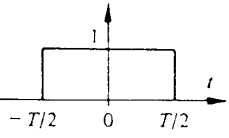
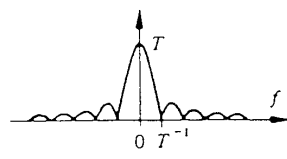
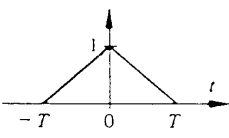
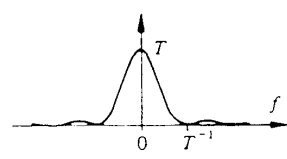
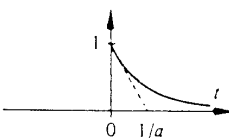
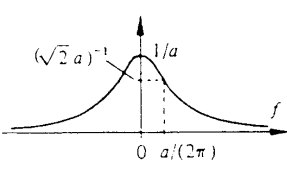
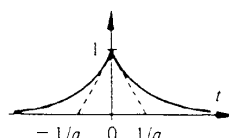
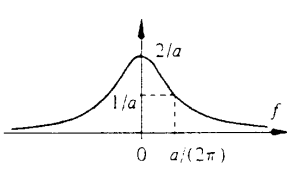
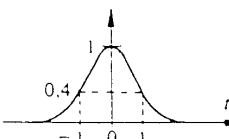
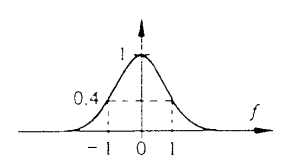
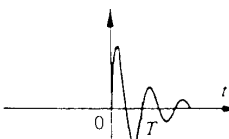
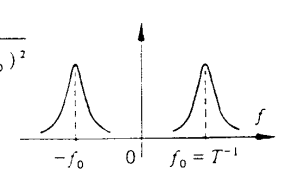
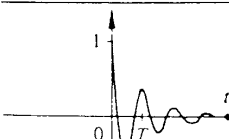
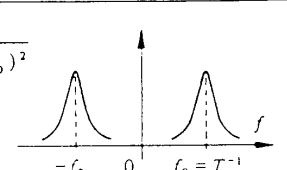
On applique une impulsion de tension d'amplitude E et de largeur Δt à un filtre passe-bande LC-R caractérisé par sa fréquence de résonance f_0 et son facteur de qualité Q_0 . Admettant que la largeur de l'impulsion est beaucoup plus petite que les temps caractéristiques du filtre :

1. Esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$ ainsi que $|U_1(j \cdot f)|$ et $|U_2(j \cdot f)|$.
2. Calculez $U_1(j \cdot f)$ et $U_2(j \cdot f)$.
3. Calculez l'énergie W_1 du signal d'entrée.
4. Calculez l'énergie W_2 du signal de sortie du filtre.
5. A.N. : $E = 10 \text{ [V]}$, $\Delta t = 10 \text{ [\mu s]}$, $f_0 = 1 \text{ [kHz]}$, $Q_0 = 10$.
6. Proposez des valeurs pour les composants R , L et C du filtre.

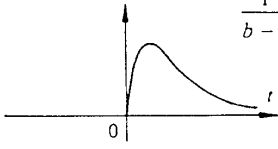
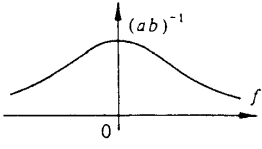
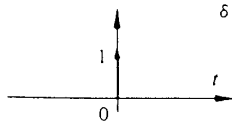
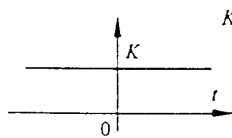
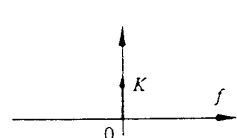
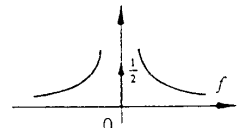
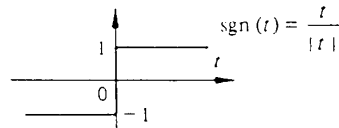
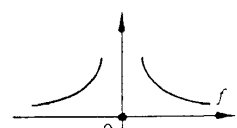
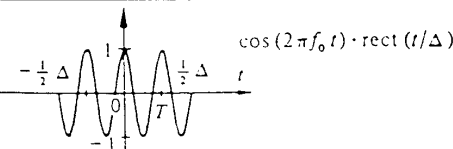
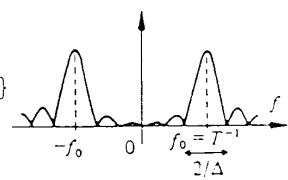
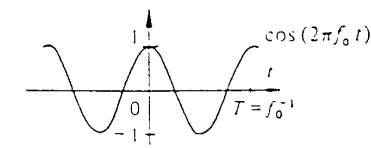
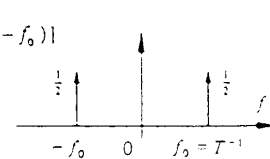
Solution :

2.A Table illustrée de quelques transformées de Fourier

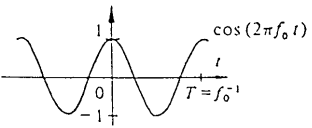
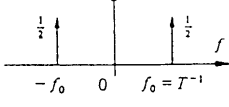
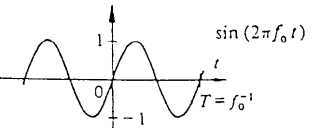
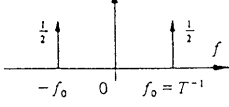
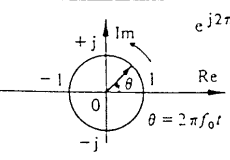
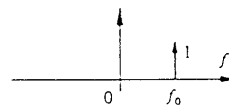
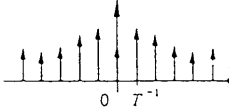
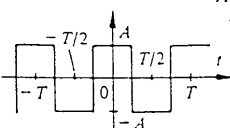
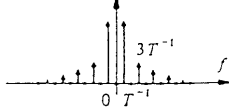
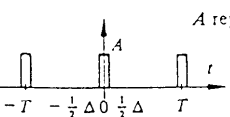
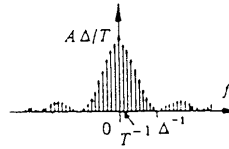
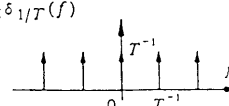
15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

$x(t)$		$X(f)$	$ X(f) $
 impulsion rectangulaire	$\text{rect}(t/T)$	$T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T \text{sinc}(fT)$	
 impulsion triangulaire	$\text{tri}(t/T)$	$= T \text{sinc}^2(fT)$	
 impulsion exponentielle	$e^{-at} \epsilon(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	
 double exponentielle	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	
 impulsion gaussienne	$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2}$	$\text{ig}(f) = e^{-\pi f^2}$	
 sinusoïde amortie	$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	
 cosinusoïde amortie	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \epsilon(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}$	 $(ab)^{-1}$
 $\delta(t)$	1	
impulsion unité (Dirac)		
 K	$K \delta(f)$	 K
constante		
 $\epsilon(t)$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	 $\frac{1}{2}$
saut unité		
 $\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$	$\frac{1}{j\pi f}$ si $f \neq 0$ 0 si $f = 0$	
fonction signe		
 $\cos(2\pi f_0 t) \cdot \text{rect}(t/\Delta)$	$\frac{\Delta}{2} \{ \text{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \text{sinc}[\Delta(f-f_0)] \}$	 $f_0 = T^{-1}$ $2/\Delta$
impulsion cosinusoidale		
 $\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	 $f_0 = T^{-1}$
signal cosinusoidal		

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (*suite*)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 signal cosinusoidal	$\frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$	
 signal sinusoïdal	$\frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$	
	$\delta(f-f_0)$	
 signal périodique	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}$	
 onde carrée	$A \text{ rep } T [2 \text{ rect}(2t/T) - \text{rect}(t/T)]$ $\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = A \text{ sinc}(n/2)$ $= \begin{cases} \left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 1, \pm 5, \dots \\ -\left \frac{2A}{\pi n} \right & \text{pour } n = \pm 3, \pm 7, \dots \end{cases}$ $X_n = 0$ pour n nul ou pair	
 suite d'impulsions rectangulaires	$A \text{ rep } T [\text{rect}(t/\Delta)]$ $\sum_n X_n \delta(f - n/T)$ avec $X_n = \frac{A\Delta}{T} \text{ sinc}(n\Delta/T)$	
 peigne de Dirac	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$	

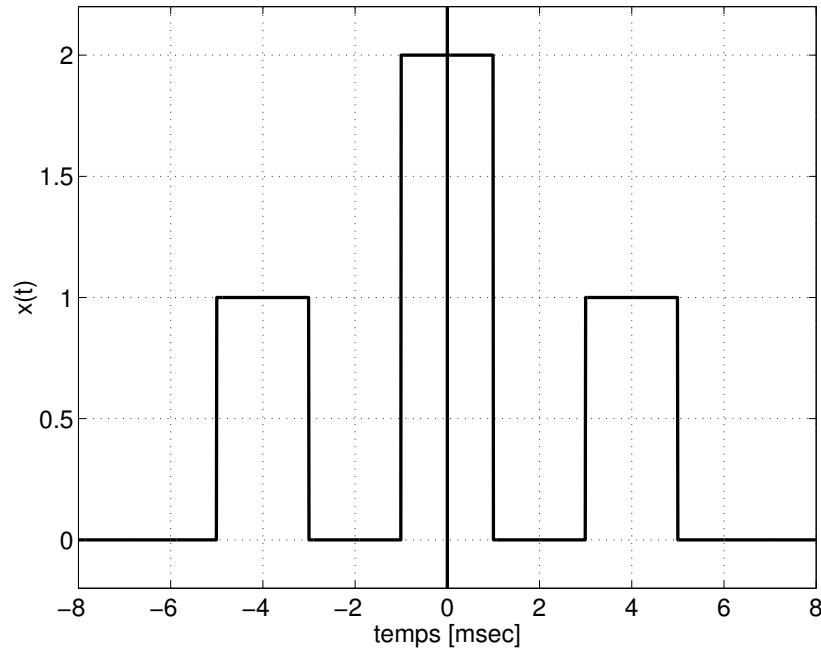


FIG. 2.32 – Exercice TF1.

2.B Exercices

2.B.1 Exercice TF 1

À partir de la seule observation du signal temporel de la figure 2.32, précisez ce que vaut sa densité spectrale en $f = 0$ [Hz] puis calculez et esquissez sa transformée de Fourier.

2.B.2 Exercice TF 2

Partant de la TF d'une impulsion rectangulaire et de la propriété d'intégration, calculez les TF de $x(t)$ et $y(t)$ (figure 2.33). Après calculs, vous remarquerez que $Y(j \cdot f)$ peut s'écrire sous la forme d'un sinc^2 .

2.B.3 Exercice TF 3

Partant de la TF d'une impulsion et d'un saut unité, trouvez celle de $z(t)$ (figure 2.33). Est-il possible de trouver $Z(j \cdot f)$ à partir de $Y(j \cdot f)$? Vous pouvez vérifier votre résultat en calculant $Z(j \cdot f = 0)$ qui doit être égal à $\frac{\Delta t}{2}$.

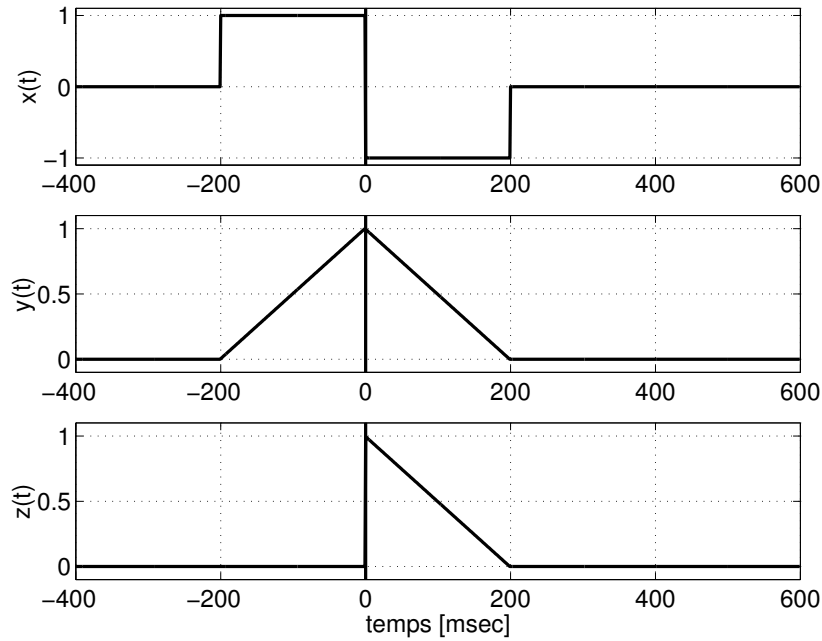


FIG. 2.33 – Exercices TF2 et TF3.

2.B.4 Exercice TF 4

Soit un signal carré symétrique (à valeur moyenne nulle) d'amplitude A . Esquissez

1. le signal $x(t)$;
2. le spectre que l'on obtient avec les séries de Fourier ;
3. le spectre que l'on obtient avec la transformation de Fourier.

2.B.5 Exercice TF 5

Considérant le signal $x(t) = e^{-a \cdot |t|}$, calculez et esquissez $x(t)$ et $X(j \cdot f)$, puis vérifiez les 2 égalités suivantes :

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt$$

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot df$$

2.B.6 Exercice TF 6

	fréquence	temps
1	la partie réelle de $X(j \cdot f)$ est nulle	
2	la partie imaginaire de $X(j \cdot f)$ est nulle	
3	il existe un décalage t_0 tel que $e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_0} \cdot X(j \cdot f)$ est réel	
4	$X(j \cdot f)$ est continu	

1. Considérant les quatre propriétés fréquentielles du tableau ci-dessus, exprimez leur équivalent temporel dans la colonne de droite.
2. Pour chacun des signaux temporels de la figure 2.34, quelles sont les propriétés du tableau qui s'y appliquent ?
3. Construisez un signal qui ne possède aucune des quatre propriétés mentionnées dans le tableau.

2.B.7 Exercice TF 7

Soit $X(j \cdot f)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$ de la figure 2.35. Sans calculer explicitement $X(j \cdot f)$, recherchez :

1. la densité spectrale de phase de $X(j \cdot f)$;
2. la valeur de $X(f = 0)$;
3. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j \cdot f) \cdot df$;
4. la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j \cdot f)|^2 \cdot df$.

2.B.8 Exercice TF 8

Connaissant la TF d'une sinusoïde amortie $x(t) = A \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \epsilon(t)$:

1. calculez la transformée de Fourier d'une sinusoïde démarrant à l'instant zéro :

$$y(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \epsilon(t)$$

2. esquissez les spectres $X(j \cdot f)$, $Y(j \cdot f)$ et celui d'une sinusoïde permanente ;
3. discutez les différences existant entre ces trois spectres.

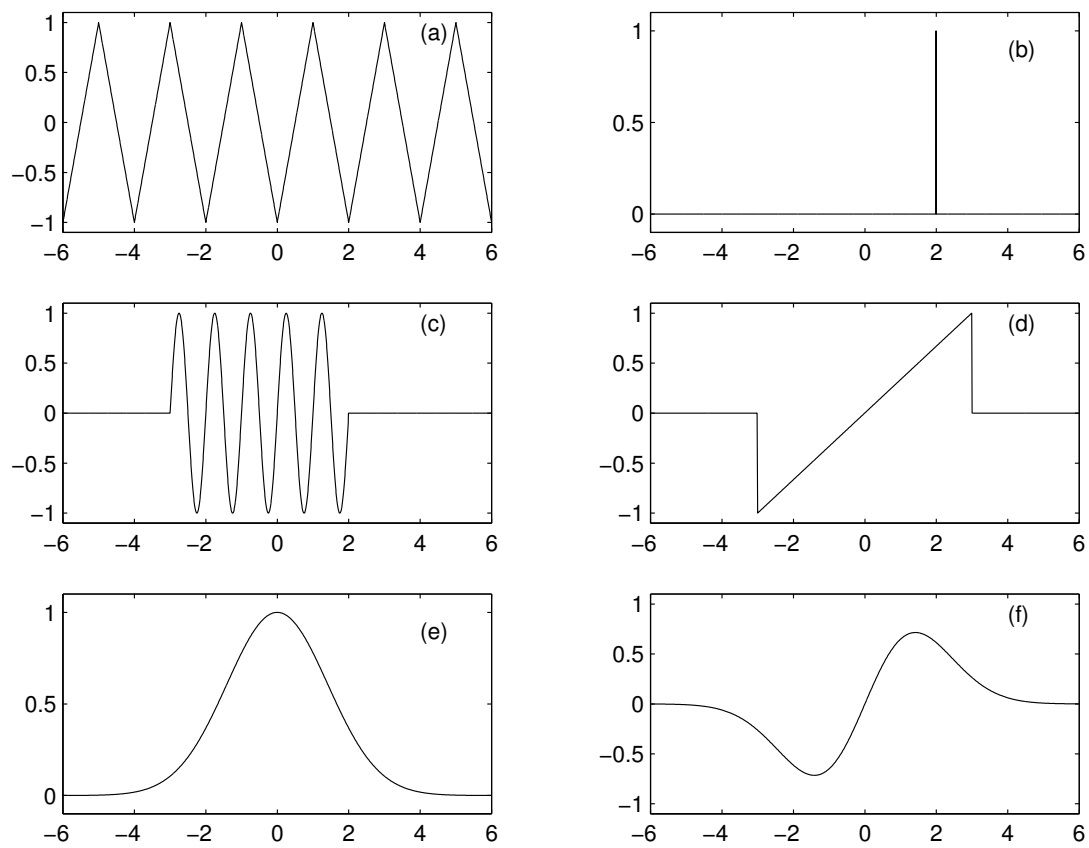


FIG. 2.34 – Exercice TF6.

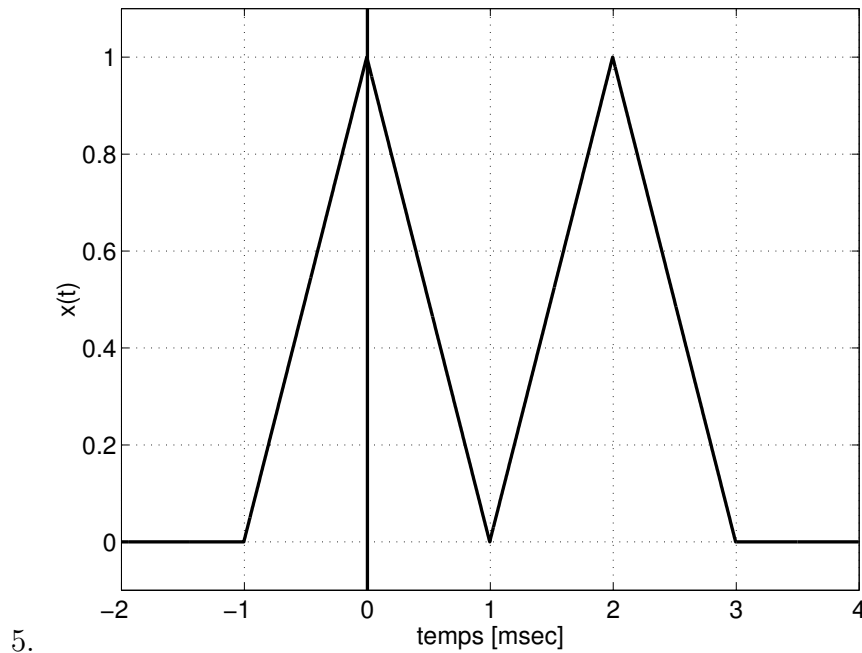


FIG. 2.35 – Exercice TF7.

2.B.9 Exercice TF 9

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$, d'amortissement $a = 100 \text{ [s}^{-1}\text{]}$ à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1 \text{ [ms]}$;

1. calculez la TF $U_2(j \cdot f)$ de la tension de sortie $u_2(t)$ du filtre;
2. utilisez le tableau des transformées pour déduire l'expression temporelle de $u_2(t)$.

2.B.10 Exercice TF 10

Soit un message $m(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$ modulé en amplitude par une porteuse sinusoïdale $p(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)$:

1. calculez la TF du signal modulé $x(t) = m(t) \cdot p(t) = A \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$;
2. esquissez le spectre du signal modulé $|X(j \cdot f)|$ si $f_1 = 10 \text{ [kHz]}$ et $f_0 = 800 \text{ [kHz]}$;
3. idem que le point 2) lorsque le signal $m(t)$ possède un spectre continu $|M(j \cdot f)|$ triangulaire et non-nul entre 2 [kHz] et 10 [kHz] .

2.B.11 Exercice TF 11

Soit le signal :

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) & \text{si } |t| \leq t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(j \cdot f)$;
3. esquissez $|U(j \cdot f)|$ pour $U_0 = 1$ [V] $T = \frac{1}{f_0} = 1$ [ms] $t_0 = 10$ [ms].

Ce signal correspond à l'observation d'une fonction sinusoïdale pendant une durée finie $2 \cdot t_0$. On remarquera, une fois le calcul effectué, que l'analyse spectrale d'une sinusoïde pendant une durée finie revient à remplacer les raies spectrales situées en $f = \pm f_0$ par la fonction sinus cardinal.

2.B.12 Exercice TF 12

Soit la fonction :

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t)] & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. esquissez $u(t)$;
2. calculez sa TF $U(j \cdot f)$;
3. esquissez $U(j \cdot f)$ et la TF d'une impulsion rectangulaire de même durée ;
4. observez les différences.

2.B.13 Exercice TF 13

Connaissant la transformée $E(j \cdot f)$ d'un saut unité $\epsilon(t)$, calculez la transformée $S(j \cdot f)$ de la fonction signe $s(t)$.

2.B.14 Exercice TF 14

Montrez qu'un produit simple dans l'espace des fréquences correspond à un produit de convolution dans l'espace temps :

$$Y(j \cdot f) = X(j \cdot f) \cdot H(j \cdot f) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot h(t - \theta) \cdot d\theta$$

Pour démontrer ce résultat important et bien connu, vous pouvez d'abord exprimer la TFI de $Y(j \cdot f)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j \cdot f) \cdot X(j \cdot f) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} \cdot df$$

puis y introduire la TF de $x(t)$:

$$X(j \cdot f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \theta} \cdot d\theta$$

2.B.15 Exercice TF 15

Considérant la réponse d'un filtre $h(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$H(j \cdot f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq 100 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquissez $H(j \cdot f)$;
2. calculez, puis esquissez $h(t)$;
3. ce signal correspond à la réponse impulsionnelle du filtre décrit par $H(j \cdot f)$; ce filtre est-il réalisable ? Justifier la réponse.

Indication Le calcul de la transformée de Fourier inverse (TFI) peut se faire en appliquant la définition telle quelle ; mais il est immédiat si l'on se souvient que

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j \cdot f) \iff \mathcal{F}^{-1}\{x(j \cdot f)\} = X(-t)$$

2.B.16 Exercice TF 16

Considérant un signal $u(t)$ dont le spectre est le suivant :

$$U(j \cdot f) = \begin{cases} 1 & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 200 \text{ [Hz]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. esquisser $U(j \cdot f)$;
2. calculer puis esquissez $u(t)$;
3. que vaut sa puissance ?

2.B.17 Exercice TF 17

Utiliser la transformation de Fourier pour trouver le courant circulant dans un circuit RC série sachant que le signal appliqué est un saut de tension d'amplitude E .

2.B.18 Exercice TF 18

On applique une fonction signe $u_1(t)$ d'amplitude E à un filtre RC passe-bas.

1. utilisez la transformation de Fourier pour trouver la tension de sortie ;
2. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

2.B.19 Exercice TF 19

On applique une exponentielle symétrique $u_1(t) = U_0 \cdot e^{-a \cdot |t|}$ à un filtre passe-bas de constante de temps τ .

1. avant de vous lancer dans les calculs, esquissez $u_1(t)$ et imaginez ce que peut être $u_2(t)$;
2. calculez la tension de sortie du filtre.

La marche à suivre est la même que celle utilisée avec la transformation de Laplace : décomposition en somme de fractions simples puis recherche des coefficients par identification avec des transformées connues.

2.B.20 Exercice TF 20

On applique une exponentielle décroissante $u_1(t) = U_0 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$ à un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c .

1. exprimez $U_1(j \cdot f)$ et $U_2(j \cdot f)$; esquissez leur module ;
2. en admettant $U_0 = 10 \text{ [V]}$ et $a = 1000 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, calculez les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie lorsque :

(a) $f_c = 1 \text{ [kHz]}$

(b) $f_c = \frac{a}{2 \cdot \pi}$

2.B.21 Exercice TF 21

On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = 1 \text{ [ms]}$ un signal $u_1(t)$ dont le spectre est défini par :

$$U_1(j \cdot f) = \begin{cases} 1 \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right] & \text{si } 100 \text{ [Hz]} \leq |f| \leq 300 \text{ [Hz]} \\ 0 \left[\frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right] & \text{sinon} \end{cases}$$

1. exprimez la fonction de transfert $H(j \cdot f)$ du filtre ; que vaut sa fréquence caractéristique f_c ?
2. esquissez $U_1(j \cdot f)$, $H(j \cdot f)$ et $U_2(j \cdot f)$ pour $-500 \text{ [Hz]} < f < +500 \text{ [Hz]}$;
3. quelles sont les énergies E_1 et E_2 des signaux d'entrée et de sortie ?
4. comment évoluera E_2 si la constante de temps τ diminue ?
5. comment calculeriez-vous $u_2(t)$? Ne faites pas les calculs, mais précisez point par point votre démarche ; essayez d'entrevoir les difficultés de ce calcul.

2.B.22 Exercice TF 22

On applique à un filtre passe-bas de constante de temps $\tau = R \cdot C = 10$ [ms] une tension exponentielle $u_1(t) = 10 \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$ avec $a = 1000$ [s⁻¹].

1. esquissez $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
2. calculez les énergies contenues dans les signaux d'entrée et de sortie.¹

2.B.23 Exercice TF 23

On applique une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à un filtre passe-bande dont la fonction de transfert vaut :

$$H(j \cdot f) = \frac{D_0 \cdot \frac{j \cdot f}{f_0}}{1 + D_0 \cdot \frac{j \cdot f}{f_0} + \left(\frac{j \cdot f}{f_0}\right)^2} \quad D_0 = \frac{1}{Q_0}$$

1. esquissez les spectres des signaux d'entrée et de sortie ;
2. exprimez l'énergie du signal de sortie contenue dans la bande passante Δf sachant que :

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{LC}} = 1 \text{ [kHz]} \quad D_0 = \frac{1}{Q_0} = 0.1$$

$$f_{i,s} = \frac{\Delta f}{2} \cdot \left[\pm 1 + \sqrt{1 + 4 \cdot Q_0^2} \right] \quad \Delta f = f_0 \cdot D_0$$

2.B.24 Exercice TF 24

Considérant le spectre $X(j \cdot f)$ de la figure 2.36 constitué d'un sinus cardinal d'amplitude $X(0) = 2 \cdot 10^{-3}$ et de 2 impulsions de Dirac de surface $\frac{1}{2}$, trouvez puis esquissez le signal $x(t)$ correspondant.

2.B.25 Exercice TF 25

A partir du signal $x(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \epsilon(t)$, trouvez le spectre de $y(t) = \text{sgn}(t)$.

¹Si le calcul de l'intégrale définie nécessaire pour obtenir l'énergie vous paraît trop difficile, essayez la démarche suivante :

- (a) esquissez la fonction à intégrer ;
- (b) estimez des limites raisonnables pour la valeur de l'énergie ;
- (c) à l'aide d'un petit programme (une douzaine de lignes), intégrez numériquement la densité spectrale d'énergie. Si le nombre de pas est suffisant, le résultat obtenu sera tout à fait satisfaisant.

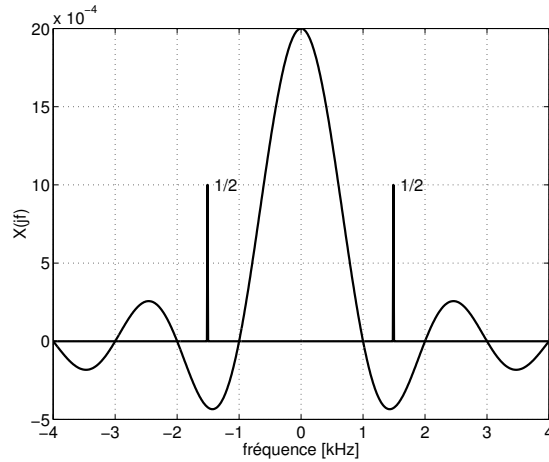


FIG. 2.36 – Exercice TF24.

2.B.26 Exercice Corr 1

Considérant le signal $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} -A & \text{si } -\Delta t < t < 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ +A & \text{si } 0 < t < \Delta t \\ 0 & \text{si } |t| \geq \Delta t \end{cases}$$

on demande :

1. esquissez $x(t)$
2. calculez sa fonction d'autocorrélation pour les valeurs particulières suivantes

$$\tau = 0 \quad \tau = \pm \Delta t \quad \tau = \pm 2 \cdot \Delta t$$

3. esquissez la fonction $r_{xx}(\tau)$ $-\infty < \tau < +\infty$.

2.B.27 Exercice Corr 2

Considérant les 3 signaux suivants :

- $x(t)$ = une exponentielle décroissante d'amplitude A et de constante de temps τ_1
- $y(t)$ = une impulsion rectangulaire centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de largeur Δt
- $z(t)$ = une impulsion triangulaire centrée en $t = 0$, d'amplitude A et de base $2 \cdot \Delta t$

on demande :

1. esquissez ces 3 signaux ;

2. calculez des valeurs particulières de leur fonction d'autocorrélation ;
3. calculez leur fonction d'autocorrélation pour τ compris entre $+\infty$ et $-\infty$;
4. esquissez ces fonctions.

Remarque Le calcul de la troisième fonction n'est pas simple ; sans entrer dans le détail des calculs, imaginez comment vous devriez vous y prendre pour le faire.

2.B.28 Exercice Corr 3

Calculez la fonction d'intercorrélation des signaux $x(t)$ et $h(t)$ de l'exercice CV2. Avant de vous lancer dans les calculs, imaginez où se situera le maximum de la fonction. Esquissez le résultat de l'intercorrélation.

2.B.29 Exercice Corr 4

On souhaite connaître la fonction d'intercorrélation des signaux $h_2(t)$ et $h_1(t)$ de l'exercice CV1 :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) \cdot h_1(t + \tau) \cdot dt$$

Pour cela :

1. imaginez tout d'abord l'endroit où se situera le maximum de la fic ;
2. montrez que, pour les points particuliers suivants $\tau = \{-2\Delta t, -\Delta t, 0, +\Delta t\}$, on a, respectivement, $h_{21}(\tau) = \{0, A^2 \frac{\Delta t}{3}, A^2 \frac{\Delta t}{6}, 0\}$;
3. pourquoi, comme il est précisé dans la remarque ci-dessous, le calcul est-il plus simple lorsque τ est compris entre 0 et Δt ?
4. que pensez-vous des résultats graphiques obtenus avec Matlab (figure 2.37) ?

Remarque Pour donner une idée de ce que représente l'approche analytique, voici le calcul de la partie la plus simple correspondant au décalage avancé de $h_1(t + \tau)$ avec τ compris entre 0 et Δt .

Comme l'on a :

$$r_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) \cdot h_1(t + \tau) \cdot dt$$

il faut commencer par décrire les 2 fonctions suivantes :

$$h_2(t) = \frac{A}{\Delta t} t \quad h_1(t + \tau) = A \cdot \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t}\right)$$

valables pour $0 < t < \Delta t$, respectivement, $-\tau < t < \Delta t - \tau$.

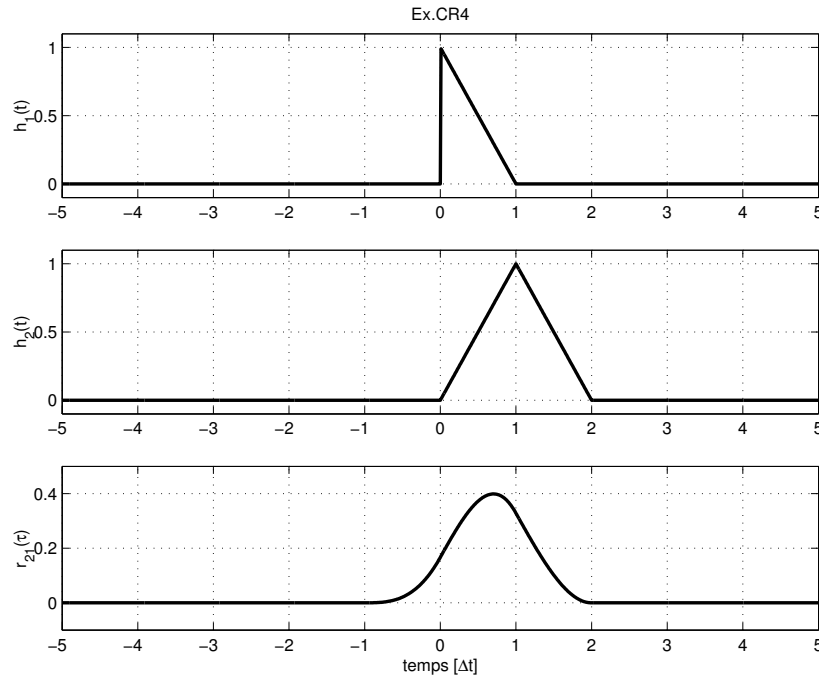


FIG. 2.37 – Exercice Corr4

Puis, tenant compte des parties nulles, il vient :

$$\begin{aligned}
 r_{21}(\tau) &= \int_0^{\Delta t - \tau} h_2(t) \cdot h_1(t + \tau) \cdot dt \\
 &= \int_0^{\Delta t - \tau} \frac{A}{\Delta t} \cdot t \cdot A \cdot \left(1 - \frac{t + \tau}{\Delta t}\right) \cdot dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t - \tau} \left(t - \frac{t^2}{\Delta t} - \frac{\tau \cdot t}{\Delta t}\right) \cdot dt \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \cdot \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3 \cdot \Delta t} - \frac{\tau \cdot t^2}{2 \cdot \Delta t}\right) \Big|_0^{\Delta t - \tau} \\
 &= \frac{A^2}{\Delta t} \cdot \left(\frac{(\Delta t - \tau)^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{\tau}{\Delta t}\right) - \frac{(\Delta t - \tau)^3}{3 \cdot \Delta t}\right) \\
 &= A^2 \frac{(\Delta t + \tau)^2}{6 \cdot \Delta t^2} \cdot (\Delta t - \tau)
 \end{aligned}$$

Ce qui donne en particulier les 2 valeurs suivantes :

$$r_{21}(\tau = 0) = A^2 \cdot \frac{\Delta t}{6} \quad r_{21}(\tau = \Delta t) = 0$$

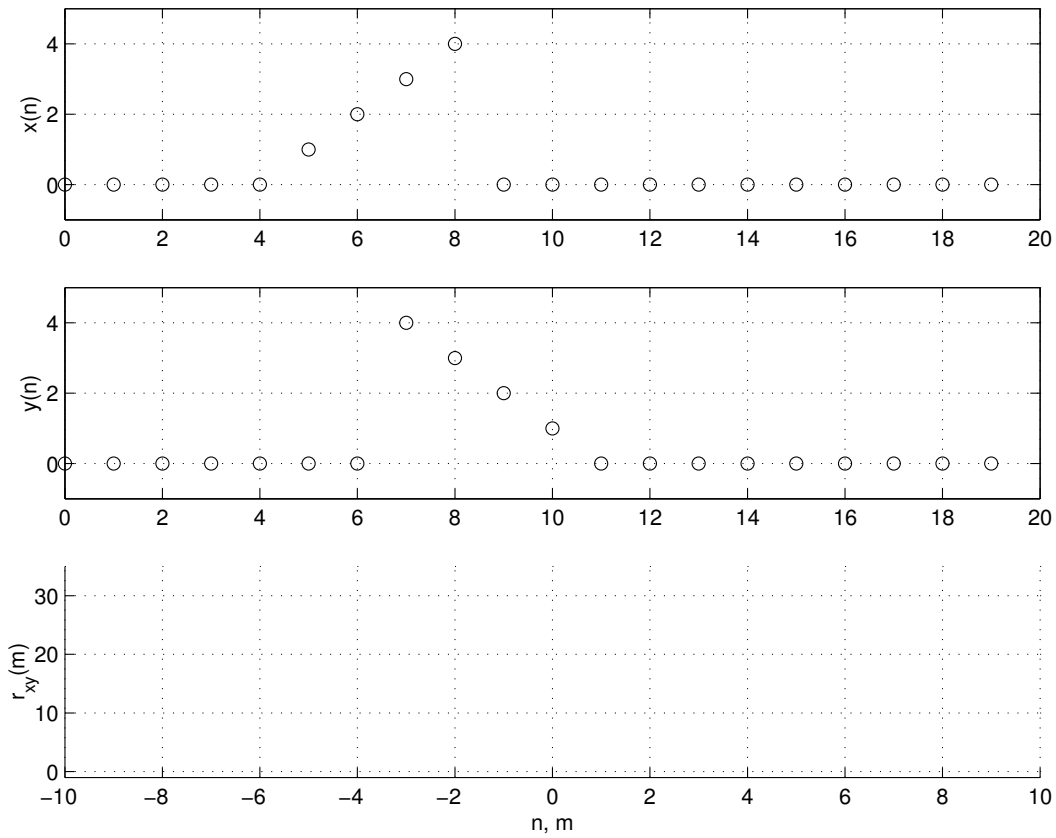


FIG. 2.38 – Exercice Corr5

2.B.30 Exercice Corr 5

Considérant deux signaux numériques $x(n)$ et $y(n)$ définis comme suit :

n	$\dots$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\dots$
$x(n)$	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0	0
$y(n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1	0	0	0	0	0

calculez et représentez la fonction d'intercorrélation

$$r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot y(n+m)$$

Bibliographie

- [dC84] F. de Coulon. Traité d'électricité. In *Théorie et traitement des signaux*, volume 6. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1984. bibliothèque HEIG-Vd N° 32.100-23.
- [MA70] E.J. Finn M. Alonso. *Physique générale : champs et ondes*. Editions pédagogiques, Montréal, 1970.

