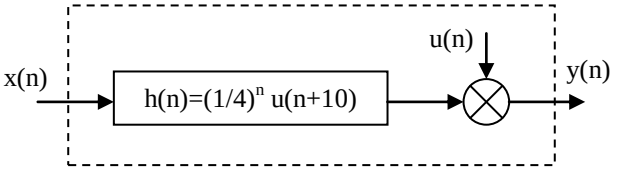
TD et exercices

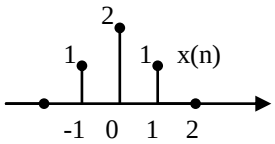
1- Application du théorème de l'échantillonnage :
a) On échantillonne une sinusoïde de fréquence 200 Hz, à la fréquence f_e =500Hz. Quel est le signal que l'on obtient lors de la reconstruction supposée parfaite du signal ? (filtre de reconstruction idéal)
b) Même question, même sinusoïde mais à la fréquence d'échantillonnage f_e= 250Hz ?

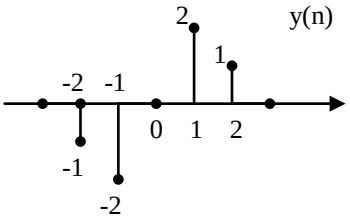
2- Considérer le système présenté ci-dessous. Répondre aux questions suivantes en justifiant votre réponse.



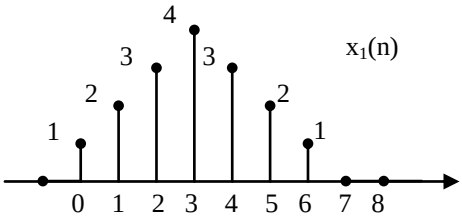
a) Le système, est-il linéaire ?
b) Le système, est-il invariant dans le temps ?
c) Le système est-il causal ?

3- L'entrée et la sortie d'un système LIT est donnée ci-dessous.





a) Quelle est la réponse du système à l'entrée ci-dessous ?



b) Quelle est la réponse impulsionnelle du système ?

4- La réponse d'un système LIT à un échelon u(n) est la suivante :

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + u(n)$$

a) Déterminer l'équation de différence
b) Donner la réponse impulsionnelle du système
c) Le système, est-il stable ?

5- Quand l'entrée d'un système LIT donné est x(n)=5u(n), la sortie est égale à :

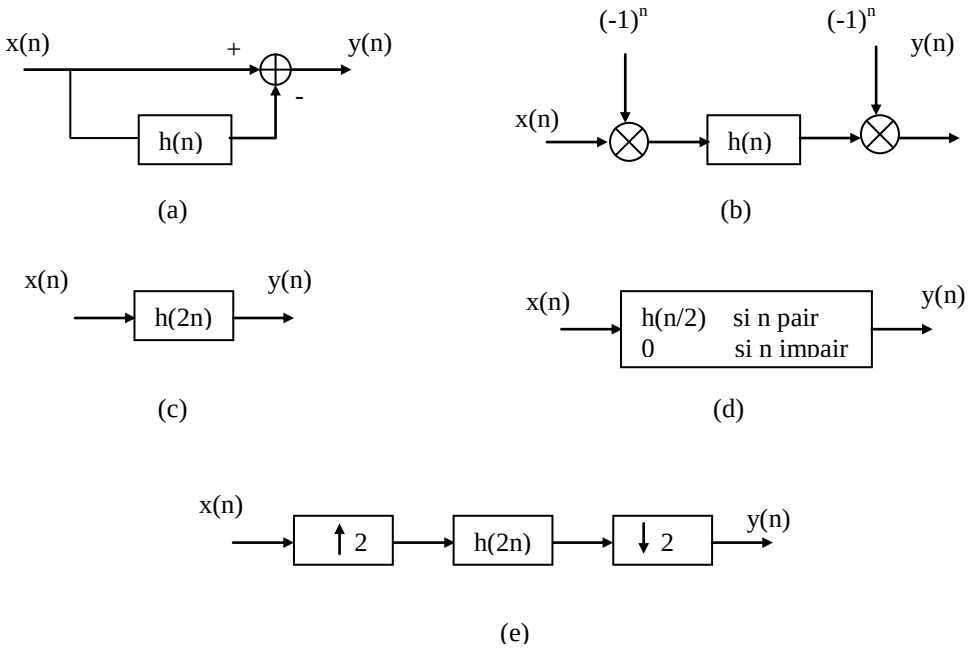
$$y(n)=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]u(n)$$

a) donner la fonction de transfert du système H(z) et indiquer le diagramme des pôles et des zéros et définissez la ROC
b) Donner la réponse impulsionnelle du système
c) Donner l'équation de différence

6- Pour un système LIT, on a $\dfrac{(1+0.2z^{-1})(1-9z^{-2})}{1+0.81z^{-2}}$

a) Le système, est-il stable ?
b) Trouver une expression pour un système $H_1(z)$ à phase minimale et un système passe tout pour que $H(z)=H_1(z)H_{ap}(z)$

7- Soit h(n) la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal passe bas. La bande passante de ce filtre est de -π/4 à π/4. Pour les systèmes ci-dessous, tracer la réponse fréquentielle résultante.



8- Le signal analogique $x_c(t)$ est périodique avec T=1 msec. La série de Fourier de $x_c(t)$ est la suivante :

$$x_c(t)=\sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j(2\pi kt.10^3)}$$

$x_c(t)$ est échantillonné à la fréquence 6 kHz (T_e=1/6 msec).

- x(n) est-il périodique? Si oui, quelle est la période ?
- Avons-nous respecté le critère de Shannon?
- Si x(n) est développé en série de Fourier, quels sont les coefficients de série en fonction de a_k?

9- Soit x(n)=a^nu(n). On construit $\tilde{x}(n)$ à partir de x(n) par la relation $\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$

- Donner la transformée de Fourier de *x(n)* : $X(e^{j\omega})$
- Donner la série de Fourier discrète de $\tilde{X}(k)$
- Quelle est la relation entre $\tilde{X}(k)$ et $X(e^{j\omega})$?

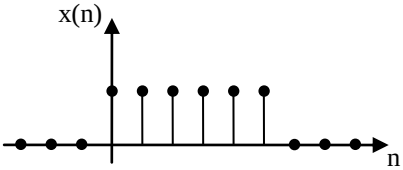
10- Calculer la TFD de chacune des séquences ci-dessous, sachant qu'elles sont bornées dans le temps dans l'intervalle [0, N-1]

- $x(n)=\delta(n)$
- $x(n)=\delta(n-n_0)$
- $x(n)=\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

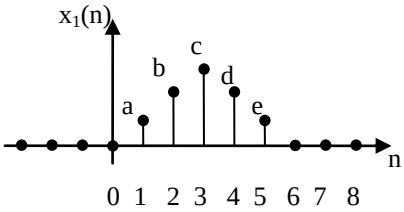
11- Considérons la séquence x(n) ci-dessous, X(z) est sa transformée de Z. On échantillon (z) sur les points $z=e^{j\frac{2\pi}{4}k}$ k=0, 1, 2 et 3 et la séquence obtenue est appelée

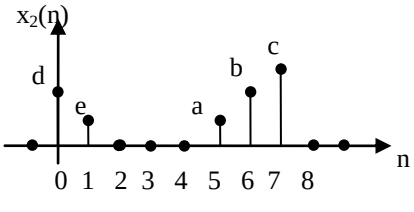
$$X_1(k)=X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{4}k}} \qquad k=0,1,2,3$$

Dessiner la séquence $x_1(n)$ qui est la TFD inverse de $X_1(k)$.

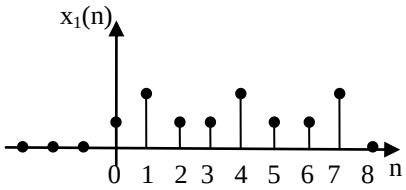


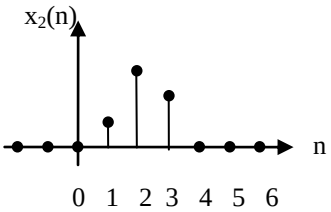
12- $x_1(n)$ et $x_2(n)$ sont deux séquences définies sur 8 points. Leurs TFD sont $X_1(k)$ et $X_2(k)$. Quelle est la relation entre $X_1(k)$ et $X_2(k)$?





13- Pour les deux séquences données ci-dessous, calculer la convolution circulaire sur 8 points uniquement pour n=2 (c'est-à-dire que $x_3(n)=x_1(n)\overset{8}{*}x_2(n)$, $x_3(2)$= ?

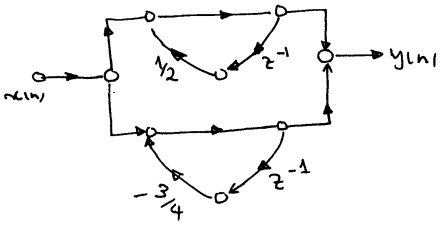




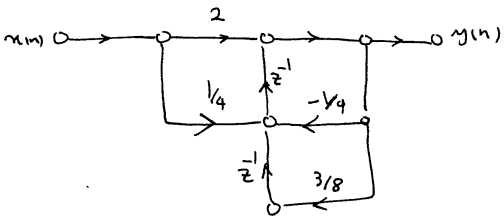
14- Un programme écrit en C est disponible qui prend en argument une séquence de taille N et sort la TFD de celle-ci. Comment on utilise la même fonction pour calculer la TFD inverse d'une séquence de taille N?

15- Obtenir en étapes la structure d'une TFR de taille 4.

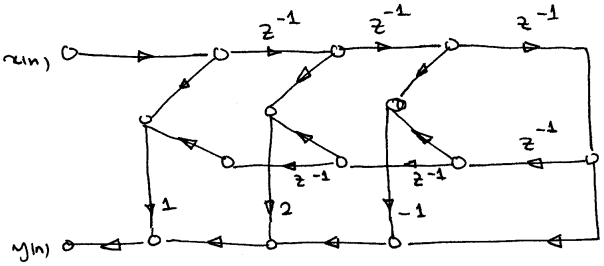
16- A partir de la structure en parallèle ci-dessous, donner la structure en cascade, direct I, directe II et transposée.



17- Pour le système ci-dessous
   a- Calculer le H(z)
   b- Ecrire les équations de différence pour x(n) et y(n)
   c- Dessiner la structure transposée et refaire a et b pour cette nouvelle structure.

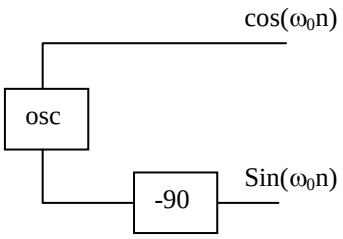


18- Tracer la réponse impulsionnelle du système ci-dessous :



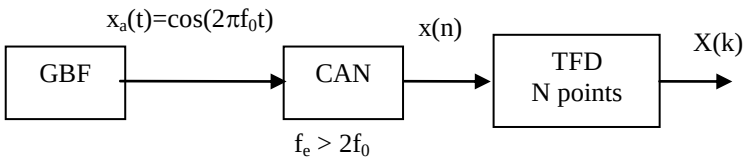
Combien de multiplications et addition sont nécessaires pour calculer chaque échantillon en sortie?

19- Nous voulons implanter un oscillateur pour générer sinus et cosinus comme schématise la figure ci-dessous :



On remarque que c'est un système dont $h(n) = e^{j\omega_0 n}u(n)$ et que les sorties sont les partie réelles et imaginaires de la sortie de ce système. On cherche un système avec les coefficients et les opérations réels. Donner un diagramme de flot réalisant ce système.

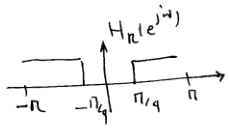
20- La sortie d'un générateur de signal sinusoïdal est connectée à un convertisseur A/N suivi par un bloc TFD de taille N qui calcule X(k) k=0, 1, …, N-1. Discutez de manière qualitative de la forme des X(k) (dites ce que vous attendiez de X(k)).



Corrigée

7-

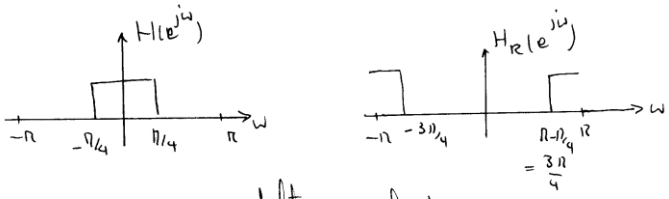
a) $H_R(e^{jw}) = 1 - H(e^{jw}) = \begin{cases} 1-1=0 & |w| < \pi/4 \\ 1-0=1 & \pi/4 < |w| < \pi \end{cases}$



un filtre passe haut

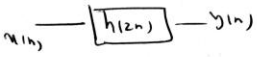
b) $y(n) = \left[x(n)e^{jn\pi} * h(n)\right]e^{jn\pi}$

$Y(e^{jw}) = \left[X(e^{j(w-\pi)})\,H(e^{jw})\right]\Big|_{w \to w-\pi} = X(e^{jw})\,H(e^{j(w-\pi)})$



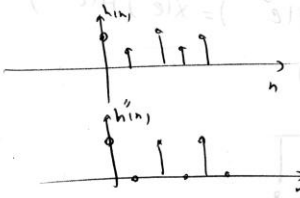
filtre passe haut

(c)



$h'(n) = h(2n)$

on définit d'abord $h''(n) = \dfrac{h(n) + (-1)^n h(n)}{2}$



$H''(e^{jw}) = \sum h''(n)e^{jwn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(2n)e^{jwn}$

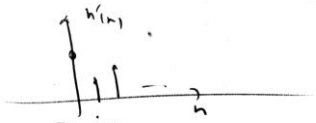
$H''(e^{jw}) = \dfrac{H(e^{jw}) + H(e^{j(w-\pi)})}{2}$

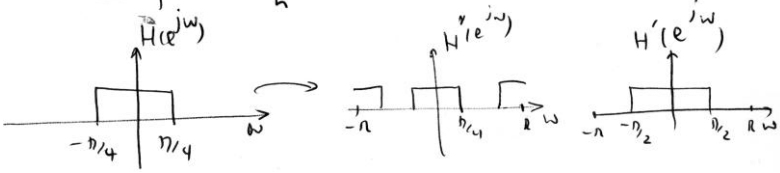
$h'(n) = h(2n)$

$H'(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h'(n)e^{jwn} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(2n)e^{jwn}$

$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h''(2n)e^{jwn} =$

$H''(e^{jw/2})$



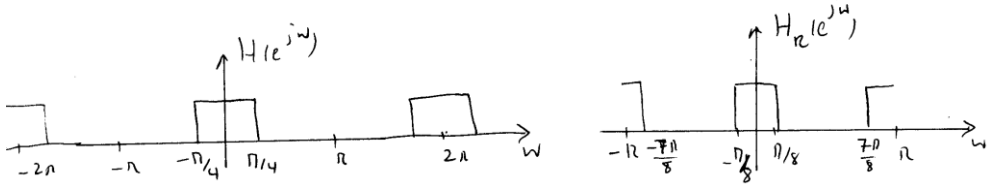


d- $h_R(n) = \begin{cases} h(n/2) & n \text{ paire} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$

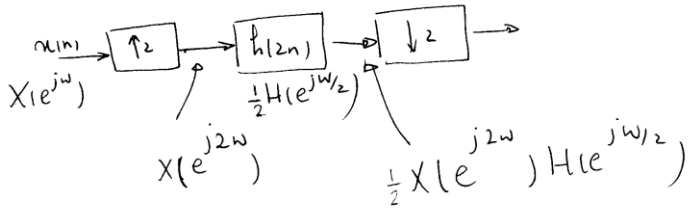
$$H_R(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_R(n) e^{-jwn} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_R(2k) e^{-jw2k} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_R(2k+1) e^{-jw(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j2wk} + 0 = H(e^{j2w})$$

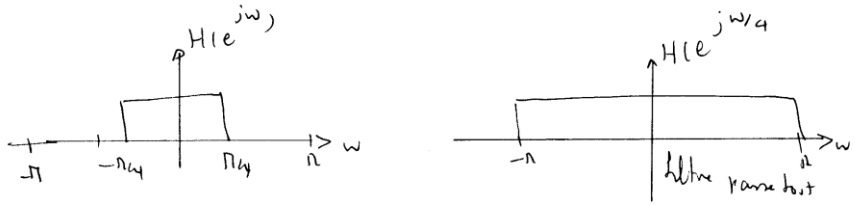
c'est-à-dire que le spectre de H est rétréci



e :



$$Y(e^{jw}) = \frac{1}{2} X(e^{j2w}) H(e^{jw/2}) \Big|_{w \to w/2} = \frac{1}{2} X(e^{jw}) H(e^{jw/4})$$



8-

a) $x_c(t) = x_c(t+T)$ où $T = 1$ msec

$x(n) = x_c(nT_e)$

$x(n+N) = x_c((n+N)T_e) = x_c(nT_e + NT_e)$

pour $NT_e = T$ on a $N = \frac{T}{T_e}$

Si N est entier, N est la période $N = \frac{1 \text{ msec}}{1/6 \text{ msec}} = 6$

Si $\frac{T}{T_e}$ n'est pas entier, un multiple de $\frac{T}{T_e}$ est choisi pour qu'il le devienne

Par exemple si $T_e = 0,3$ msec

$\Rightarrow \frac{T}{T_e} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$ $\Rightarrow$ $N = k\frac{T}{T_e} \in \mathbb{Z}$ pour $k = 3$

$N = \frac{10}{3} \times 3 = 10$

Car une période égale à $\frac{10}{3} = 3,33$ n'a pas de sens.

b) Non, vu la série de Fourier, la largeur de bande du signal est de $9 \times 10^3 = 9$ kHz $\Rightarrow$ freq Nyquist ≥ 18 kHz

c) $x(n) = \sum a_k e^{j2\pi k n T_e \times 10^3}$

$T_e = \frac{1}{6 \times 10^3} \Rightarrow x(n) = \sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j\frac{2\pi k n}{6}}$

Sachant que $e^{j\frac{2\pi l}{6} \times 6} = 1$

$e^{j\frac{2\pi k n}{6}} = e^{j\frac{2\pi k n}{6} + j2\pi l n} = e^{j2\pi n\left(\frac{k}{6} + l\right)} = e^{j\frac{2\pi n}{6}(k+6l)}$

$$\Rightarrow x(n) = \overbrace{(a_{-9} + a_{-3} + a_3 + a_9)}^{a_0} e^{j\frac{2\pi 0 n}{6}} +$$
$$+ \overbrace{(a_{-8} + a_{-2} + a_4)}^{a_1} e^{j\frac{2\pi n}{6}} +$$
$$+ \overbrace{(a_{-7} + a_{-1} + a_5)}^{a_2} e^{j\frac{2\pi}{6}2n} +$$
$$+ \overbrace{(a_{-6} + a_0 + a_6)}^{a_3} e^{j\frac{2\pi 3}{6}n} +$$
$$+ \overbrace{a_{-5} + a_1 + a_7)}^{a_4} e^{j\frac{2\pi 4}{6}n} +$$
$$+ \overbrace{(a_{-4} + a_2 + a_8)}^{a_5} e^{j2\pi\frac{5}{6}n}$$

$$x(n) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X(k) e^{j\frac{2\pi n k}{6}}$$

9-

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}}\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty} a^{n+rN} u(n+rN) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} a^{rN} \sum_{i=0}^{N-1} a^n u(n+rN) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{r=0}^{\infty} a^{rN} \sum_{i=0}^{N-1} a^n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a^{rN} \sum_{i=0}^{N-1} (ae^{-j\frac{2\pi}{N}k})^n = \sum_{r=0}^{\infty} a^{rN} \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \sum_{r=0}^{\infty} a^{rN} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \frac{1}{1-a^N} = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi k/N}}$$

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N} = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi k/N}}$$

10-

a) $X(k) = 1$

b) $X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$

c) $\dfrac{1-a^N}{1-a\,e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$

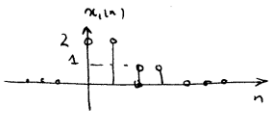
11-

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}} & k=0,1,\dots,N-1 \\ \tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\, e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \\ \tilde{x}(n) = x(n) * \sum \delta(n-rN) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n-rN) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x(n) \xrightarrow{X(z)} X(z) \xrightarrow{\text{ech}\ N} X(k) \longrightarrow x_1(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x(n-rN)$$

TFD

dans l'intervalle $(0, N-1)$



12-

$$X_2(k) = (-1)^k X_1(k)$$

Car $x_2(n) = x_1((n-4) \bmod 8)$ de calage circulaire de 4

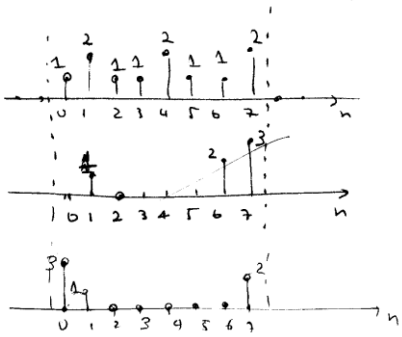
$$x_2(n) \longrightarrow X_2(k) = e^{-j\frac{2\pi k}{N} n_0} X_1(k)$$

$$= e^{-j\frac{2\pi k 4}{8}} X_1(k) = (-1)^k X_1(k)$$

13-

$x_3(2) = 9$

$$x_3(2) = \sum_{m=0}^{8} x_1(m) x_2(n-m)_8 = x_1(0)x_2(2) + x_1(1)x_2(1) + x_1(2)x_2(0) + x_1(3)x_2(7) + \dots$$



$$x_3(2) = 3\times 1 + 1\times 2 + 2\times 2 = 9$$

14-

entrée de la fonction : $\frac{1}{N} X((-n) \bmod N)$

Car la fonction calcule $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$

au lieu de $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$

ce que l'on veut : $y(n) \longrightarrow \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} y(n) e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} y(-m) e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{y((-m) \bmod N)}{N} e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}$$

il faut calculer $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k'=1}^{N} X(N-k') e^{-j2\pi nk'/N}$$

$$= \frac{X(0)}{N} + \sum_{k'=1}^{N-1} \frac{X(N-k')}{N} e^{-j2\pi nk'/N}$$

$$= \sum_{k'=0}^{N-1} x((-k')_N) e^{-j2\pi nk'/N}$$

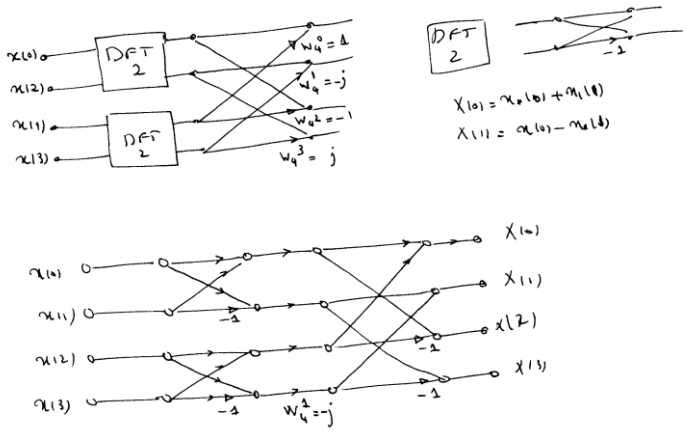
$$W_4^k = e^{-j\frac{\pi}{2}k}$$

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k)$$

TFR des points pairs

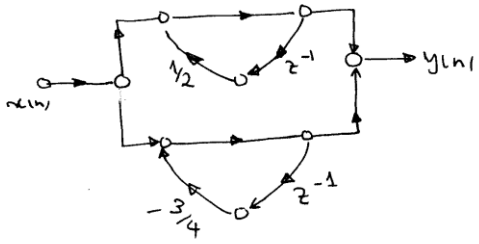
TFR des point impaire

15-



16-

a partir de la structure en parallèle ci-dessous, donner la structure en cascade, directe I, direct II et transposée.



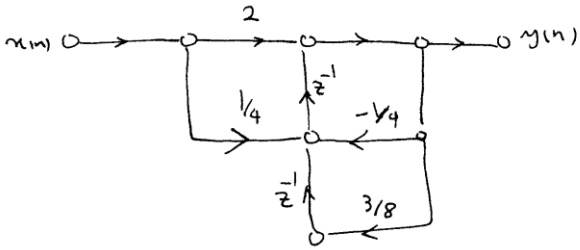
17-

Pour le système ci-dessous

a) calculer H(z)

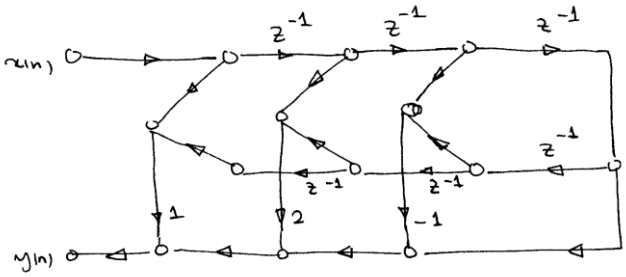
b) écrire l'équation de différence pour x(n) et y(n).

c) dessiner la structure transposée et refaire pour ce système les questions a et b.



18-

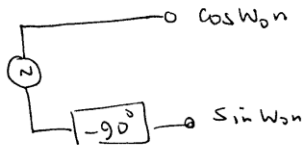
tracer la réponse impulsionnelle du filtre ci-dessous :



Combien de multiplications et additions sont nécessaires pour calculer chaque échantillon en sortie ?

19-

Nous voulons implanter un oscillateur pour générer les sinus et cosinus comme schematisé la figure ci-dessous :



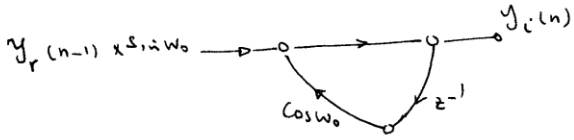
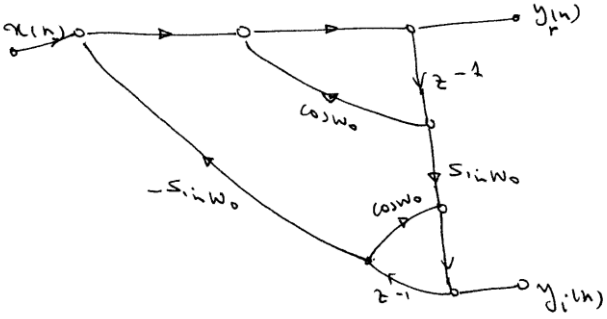
On remarque que c'est un système dont $h(n) = e^{jW_0 n} u(n)$ et que les sorties sont les parties réelles et imaginaire de la sortie de ce système. On cherche un système avec les coefficients réels et les opérations réelles. Donner un diagramme de flot réalisant ce système.

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\frac{Y}{X} = H(z) = \frac{1}{1 - e^{jw_0} z^{-1}} \Rightarrow y = x(n) + e^{jw_0} y(n-1)$$

$$y_r(n) = x_r(n) + y_r(n-1)\cos w_0 - y_i(n-1)\sin w_0 \qquad \mathrm{I}$$

$$y_i(n) = \cancel{x_i(n)}^{\,0} + y_r(n-1)\sin w_0 + y_i(n-1)\cos w_0 \qquad \mathrm{II}$$

$$x(n) = \delta(n) \Rightarrow x_i(n) = 0$$

II :