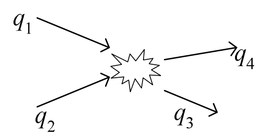
Chapitre 1 : Le champ électrostatique

I Loi de Coulomb pour deux particules élémentaires

A) Postulat de la charge

A toute particule élémentaire, on peut associer une grandeur scalaire q :
- Invariante par changement de référentiel
- Conservative :



On a $q_1 + q_2 = q_3 + q_4$ (ou, macroscopiquement : $\sigma_q = 0$)
- Algébrique : positive ou négative (ou nulle)

B) Loi de Coulomb

1) Enoncé

On considère une charge q_1 fixe dans un référentiel R.

- Cette charge q_1 en P modifie l'espace autour d'elle et crée en M un champ $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$.

ε_0 : permittivité du vide ; $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi.10^{-7}c^2}$ (en $\mathrm{F.m^{-1}}$) ; c'est une valeur exacte.

On a $\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi}.10^9\,\mathrm{F.m^{-1}} \approx 8{,}85418782.10^{-12}\,\mathrm{F.m^{-1}} \sim 10^{-11}\,\mathrm{S.I.}$

- On considère une charge q_2 fixe ou mobile en M.

Cette charge subit alors une force $\vec{F} = q_2\vec{E}(M)$

2) Discussion

- La loi reste valable en relativité

C'est une loi fondamentale de la physique.

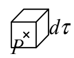
- Si q_1 se déplace, $\vec{E}(M)$ est variable et il y a en plus un champ $\vec{B}$.

C) Principe de superposition

On admet (principe) que $\vec{E}$ créé par des charges $q_1,...q_p$ vérifie $\vec{E} = \sum_{i=1}^{p}\vec{E}_i$.

II Loi de Coulomb macroscopique

A) Du microscopique au macroscopique



On note $\rho(P,t)=\dfrac{\overline{\sum_{i\in d\tau} q_i}}{d\tau}$ (rappel : la barre désigne une valeur moyenne)

1) Champ microscopique

Les charges q_i ont une vitesse d'agitation $\vec{v}_i$, et produisent donc un champ électromagnétique $\vec{e}_i(M,t)$, $\vec{b}_i(M,t)$

2) Champ macroscopique

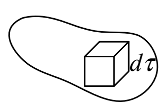
On a $d\vec{E}=\overline{\sum_{i\in d\tau}\vec{e}_i}=\dfrac{\rho.d\tau}{4\pi.\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

On retrouve donc un champ coulombien.

On a de plus $d\vec{B}=\overline{\sum_{i\in d\tau}\vec{b}_i}=\vec{0}$

Ainsi, les particules sont mésoscopiquement au repos.

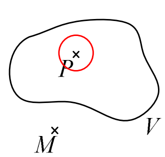
B) Le champ électrostatique macroscopique



On a $d\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho.d\tau\dfrac{\vec{r}}{r^3}$

1) Schématisation volumique

On a $\vec{E}(M)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\rho(P)\dfrac{\vec{r}}{r^3}d\tau$



- Si M est extérieur à V, l'intégrale converge.
- Sinon :

On considère que ρ est borné ($|\rho|<\rho_0$)

Alors $\vec{E}(M)=\vec{E}_l(M)+\vec{E}_i(M)$, où $\vec{E}_i$ est le champ créé à l'intérieur d'une petite boule S_R de rayon R, et $\vec{E}_l$ par le reste de la distribution, qui converge.

On va montrer que $\vec{E}_i(M)$ est borné :

$$\left|\vec{E}_i(M)\right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{S_R} \rho_0 \frac{1}{r^2} d\tau = \frac{\rho_0 R}{\varepsilon_0}$$

Donc $\vec{E}_i$ est borné, et l'intégrale converge.

Donc E est défini aussi dans la distribution.

2) Schématisation surfacique

On a $\vec{E}(M) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \sigma(P) \dfrac{\vec{r}}{r^3} ds$

Le champ diverge lorsque M est un point de la surface.

3) Schématisation linéique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \lambda(P) \frac{\vec{r}}{r^3} dl$$

4) Schématisation discrète

On a $\vec{E} = \sum_i \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{r}_i}{r^3}$, $\rho = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

III Potentiel électrostatique, rotationnel du champ *E*.

A) Potentiel électrostatique

1) Charge ponctuelle

Une charge q placée en P produit en M un champ :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}}_{-\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}} = -\vec{\nabla}_M \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Donc $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}_M V$ où $\boxed{V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte}}$.

2) Répartition volumique de charges

- Expression :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \rho(P) \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3}}_{-\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}} d\tau$$

$\vec{\nabla}_M$ correspond à une dérivation par rapport à r et est donc indépendant de P

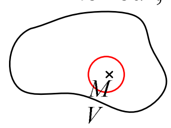
Ainsi, $\vec{E}(M) = -\vec{\nabla}_M \left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \dfrac{\rho(P)}{r} d\tau \right) = -\vec{\nabla}_M V$

Où $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \dfrac{\rho(P)}{r} d\tau + \text{cte}$

- Convergence de l'intégrale :

A l'extérieur de la distribution, on a bien convergence.

A l'intérieur, on applique la même méthode que pour le champ :



Dans une petite boule de rayon R, le potentiel créé est majoré :

$$|V_i(M)| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{S_R} \rho_0 \frac{1}{r} d\tau = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

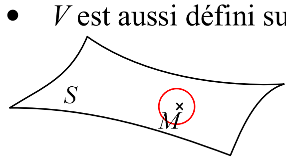
Donc l'intégrale converge sur la petite boule, et aussi en dehors, donc V est défini sur la distribution.

3) Répartition surfacique de charge

- Expression du potentiel :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \sigma(P) \frac{1}{r} ds$$

- V est aussi défini sur S :

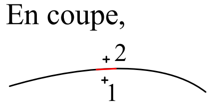


$V(M) = V_e(M) + V_i(M)$, ou $V_e(M)$ converge et :

$$|V_i(M)| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\text{disque}} \sigma_0 \frac{dS}{r} = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0} \iint \frac{2\pi . r . dr}{r} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}$$

- V est continu à la traversée de la répartition :

En coupe,



On a $V_2 - V_1 = V_{e_2} - V_{e_1} + V_{i_2} - V_{i_1}$

$V_{e_2} - V_{e_1}$ peut être rendu aussi petit qu'on veut :

Il suffit de prendre 1 et 2 suffisamment proches l'un de l'autre.

On a de plus $|V_{i_1}| < |V_i|$, $|V_{i_2}| < |V_i|$,

Et $|V_i| < \dfrac{1}{2} \dfrac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}$. Donc $|V_{i_1} - V_{i_2}| < \dfrac{\sigma_0 R}{\varepsilon_0}$, soit $|V_{i_1} - V_{i_2}| \underset{R \to 0}{\longrightarrow} 0$

Remarque :

V n'est pas défini sur la distribution pour une distribution linéique ou discrète.

B) Circulation de E.

On a $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, donc $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

Et $\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(P) - V(Q)$

C) Surfaces équipotentielles, lignes de champ

1) Définition

- Equipotentielle :

C'est un domaine d'équation $V(\vec{r}) = \text{cte}$ (en général, c'est une surface)

- Lignes de champ :

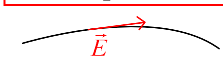
C'est une courbe Γ telle que $\vec{E}$ est tangent à Γ : $\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$ le long de Γ, et Γ est orienté par $\vec{E}$: $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$

2) Propriétés

- Les lignes de champ sont normales aux équipotentielles :

Pour tout $d\vec{r}$ sur l'équipotentielle, $dV = 0$, donc $\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, et $\vec{E}$ est bien normal à l'équipotentielle.

- Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ :



On a $\vec{E} \cdot d\vec{r} > 0$, donc $dV < 0$

D) Rotationnel de E.

1) Première équation locale du champ

On a :

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Leftrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}}$.

2) Discussion

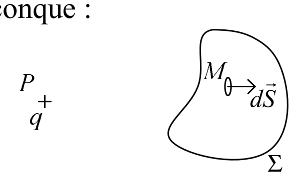
- La relation n'est valable qu'en électrostatique (sinon, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E}$ est à circulation conservative.
- Elle est valable pour tout champ en $\dfrac{\vec{r}}{r^n}$.

IV Théorème de Gauss et divergence de *E*.

A) Théorème de Gauss

1) Préliminaire

Flux du champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle à travers une surface quelconque :



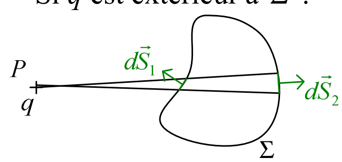
On a $d\phi = \vec{E}(M)\cdot d\vec{S} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\dfrac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S}}_{=d\Omega} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$

Soit $\boxed{\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$

2) Flux de *E* à travers une surface fermée

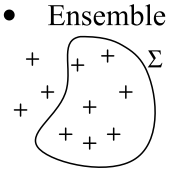
- Charge ponctuelle :

- Si q est intérieur à Σ, on a $\Omega = 4\pi$, donc $\phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$
- Si q est extérieur à Σ :



On a $d\Omega_1 = -d\Omega_2$, et donc en intégrant $\Omega = 0$, soit $\phi = 0$.

- Ensemble de charges ponctuelles :



On a $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$. Donc $\phi = \sum \phi_i = \sum_{i\,\text{intérieur}} \dfrac{q_i}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

- Répartition volumique :

On a $\phi = \iiint_V \dfrac{\rho d\tau}{\varepsilon_0}$

Ainsi, la formule devient $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \dfrac{\rho d\tau}{\varepsilon_0}$

3) Théorème de Gauss

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

4) Théorème de Earnshaw

- Enoncé :

Il n'existe pas d'extremum absolu de potentiel dans une région de l'espace vide de charge.

(Extremum absolu : la dérivée est nulle et la fonction est (dé)croissante dans toutes les directions de l'espace ; Extremum relatif : la dérivée est simplement nulle – comme pour une selle de cheval par exemple)

- Démonstration :

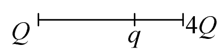
Si on a par exemple un maximum absolu en M, alors toutes les lignes de champ partent du point M (puisque V décroît le long d'une ligne de champ)

Ainsi, $\phi > 0$, donc il y a une charge en M.

- Conséquence :

On ne peut pas confiner la matière avec un champ électrostatique.

Ceci a déjà été vu quand on a remarqué qu'il ne pouvait pas y avoir d'équilibre stable dans une configuration de la forme :

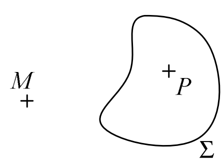


(Où Q, $4Q$ sont des charges fixes et q mobile)

Et ce quel que soit le signe des charges, ou même si on ajoute d'autres charges fixes autour de q.

B) Divergence de E.

1) Deuxième équation locale du champ



On a $\vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau$

Donc $\vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}(M) = \iiint \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0} \vec{\nabla}_M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} d\tau$

(On dérive uniquement par rapport à M)

Or, $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}_M \frac{1}{r}$. Donc $\vec{\nabla}_M \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}_M^2 \frac{1}{r} = -\vec{\nabla}_P^2 \frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{r})$

Et $\boxed{\vec{\nabla}_M \cdot \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$, ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

2) Discussion

- L'égalité est encore valable pour des charges mobiles ou même pour un champ qui n'est pas créé par des charges.
- On aurait pu montrer l'égalité à partir du théorème de Gauss.

- Un champ en $\frac{\vec{r}}{r^4}$ (par exemple) ne vérifierait pas l'équation. En fait :
- $\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\vec{0}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \vec{E}=\iiint\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}d\tau+\vec{K}$

3) Cas d'une charge ponctuelle

Pour $\rho=q\delta(\vec{r})$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r})$, la divergence est nulle partout sauf sur la charge où elle n'est pas définie.

4) Cas d'une répartition surfacique/linéique

C'est la même chose.

Remarque :
On peut aussi appliquer le théorème de Gauss pour la gravitation avec la correspondance $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\leftrightarrow -G$

V Relation de passage à la traversée d'une distribution surfacique

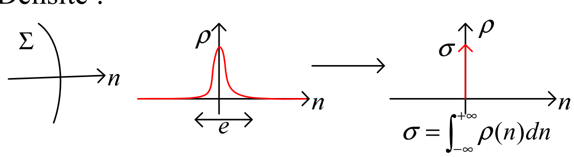
A) Potentiel *V*.

On a vu que pour une distribution bornée, *V* est défini et continu sur la surface.

B) Champ *E*.

1) De la schématisation volumique à la schématisation surfacique

Densité :



Donc $\rho\to\rho'(n)=\sigma\delta(n)$

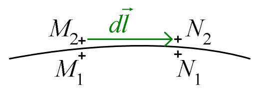
Ainsi, $\vec{E}$ est en réalité défini sur la surface (c'est à cause du modèle qu'il est divergeant)

On a donc une relation en 0 :

On va montrer que $\left.\begin{array}{l}\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\vec{0}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{E}_2-\vec{E}_1=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

C'est-à-dire qu'il y a continuité de la composante tangentielle de *E* et discontinuité de la composante normale.

2) Continuité de la composante tangentielle



On a $V(M_2)-V(M_1)<\varepsilon$, $V(N_2)-V(N_1)<\varepsilon'$

Donc $V(M_2)-V(M_1)-(V(N_2)-V(N_1))<\varepsilon''$ soit

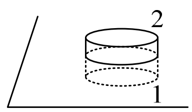
$V(M_2)-V(N_2)-(V(M_1)-V(N_1))<\varepsilon''$

Ou $\vec{E}_2\cdot d\vec{l}-\vec{E}_1\cdot d\vec{l}<\varepsilon''$

Donc $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot d\vec{l}=0, \forall d\vec{l}$ sur Σ

Soit $\vec{E}_{T_2}-\vec{E}_{T_1}=\vec{0}$ (on n'a utilisé que le fait que $\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\vec{0}$)

3) Discontinuité de la composante normale



On a $\delta\phi=\dfrac{\delta q}{\varepsilon_0}$

Soit $\delta\phi_1+\delta\phi_2+\delta\phi_l=\dfrac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$ ($\delta\phi_l$: flux latéral)

Lorsque les deux parois sont très proches :

$\delta\phi_l\to 0$

$\delta\phi_2=\vec{E}_2\cdot\vec{n}.dS$, $\delta\phi_1=-\vec{E}_1\cdot\vec{n}.dS$

Donc $(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\cdot\vec{n}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Ou $\vec{E}_{N_2}-\vec{E}_{N_1}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

(On n'utilise ici que le fait que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$)

4) Relation de passage globale

$\boxed{\vec{E}_2-\vec{E}_2=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$.

VI Equations locales pour V.

A) Expression

1) Equation de Poisson

$$\left.\begin{array}{r}\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{E}=-\vec{\nabla}V\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\vec{\nabla}^2V=\frac{-\rho}{\varepsilon_0}}$$

2) Equation de Laplace

Dans une région où $\rho=0$, on a $\vec{\nabla}^2V=0$

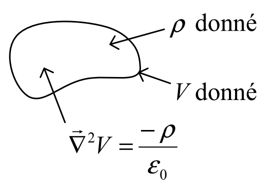
Remarque :

On a $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial z^2}=0$, donc toutes les dérivées ne sont pas de même signe (on retrouve le théorème de Earnshaw)

B) Résolution

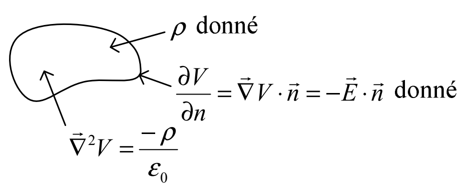
1) Conditions aux limites

- Dirichlet :



La solution de l'équation est unique (si on la trouve !)

- Neumann :



Alors la solution est unique à une constante additive près.

2) Commentaires

On a ainsi deux méthodes pour calculer V :

- L'utilisation de la loi de Coulomb $V(M)=\iiint\dfrac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Mais il faut connaître ρ sur tout l'espace.

- Equation de Poisson $\vec{\nabla}^2V=\dfrac{-\rho}{\varepsilon_0}$

On n'a besoin de ρ que sur un domaine

Récapitulatif :

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$ ou $\vec{E} = \iiint \frac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$

Circulation conservative.

Circulation conservative	Flux non conservatif
$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	Théorème de Gauss :
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\vec{E}_{T_2} - \vec{E}_{T_1} = \vec{0}$	$\vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

VII Exemples de champs et potentiels particuliers

A) Méthodes de calcul de *E*.

- Calcul direct :

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \rho d\tau \frac{\vec{r}}{r^3}$

3 intégrales scalaires à priori.

- Calcul par le potentiel :
- Plus commode car *V* est scalaire.
- On a deux méthodes pour calculer *V*.
- Pour calculer $\vec{E}$ ensuite, il faut *V* tout autour.
- Utilisation du théorème de Gauss :

$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

Applicable uniquement avec beaucoup de symétries.

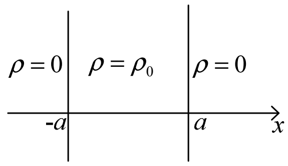
B) Champ *E* uniforme

Si $\vec{E} = E\vec{u}_x$

Densité de charge : $\rho = +\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

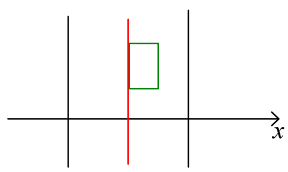
Potentiel : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edx$, donc $V = -Ex + \text{cte}$

C) Répartition volumique uniforme entre deux plans parallèles



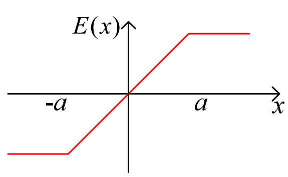
Symétries :
Invariance par translation orthogonale à Ox.
Donc V ne dépend que de x, et $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$.
Invariance par symétrie par rapport à yOz
Donc $V(x) = V(-x)$. Donc $E(x) = -E(-x)$

Calcul de $\vec{E}$:
Pour $x > 0$:

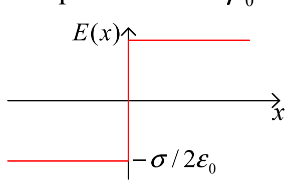


On a $\phi = \phi_g + \phi_l + \phi_d$
Et $\phi_g = 0$ (paroi de gauche) car $E(0) = 0$,
$\phi_l = 0$ car $\vec{E} // Ox$,
$\phi_d = E(x)S$
Donc $\phi = E(x)S$
Si $0 \leq x \leq a$, $Q_{\text{int}} = \rho_0 S x$, donc $E(x) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} x$, soit $\vec{E}(x) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} x \vec{u}_x$

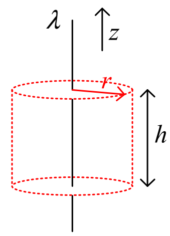
Si $x \geq a$, $Q_{\text{int}} = \rho_0 S a$, donc $\vec{E}(x) = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} a \vec{u}_x$



Lorsque $a \to 0$ et $\rho_0 \to +\infty$ mais de sorte que $2a\rho_0 = \text{cte} = \sigma$:



D) Fil rectiligne uniformément chargé



Symétries :
Translation d'axe Oz.
Rotation autour de z.
Ainsi, V ne dépend que de r, et $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

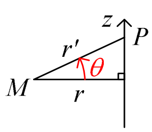
Calcul du champ :

$\phi = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

On a $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}$, soit $ES = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0}$.

Donc $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

Calcul du potentiel :
Calcul direct :



On a $V(M) = \int_{z=-\infty}^{+\infty} \dfrac{\lambda dz}{4\pi\varepsilon_0 r'}$

On fait le changement de variable $z = r\tan\theta$, $r' = \dfrac{r}{\cos\theta}$

$$V(M) = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda r d\theta}{4\pi\varepsilon_0 \dfrac{r}{\cos\theta}\cos^2\theta} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 \cos\theta} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

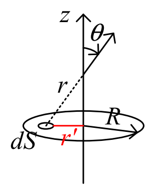
L'intégrale est donc divergente.
Calcul par le champ :

$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = \dfrac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr$

Donc $V = V_0 - \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{r}{r_0}$

E) Disque uniformément chargé

1) Champ sur l'axe



On a $\vec{E}=E(z)\vec{u}_z$. Une surface dS crée en M un champ $d\vec{E}=\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$, soit

$$dE_z=\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\theta.$$

Donc $E_z=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{dS}{r^2}\cos\theta$. Pour une petite bande, $dS=2\pi r'dr'$.

On a $r=\frac{z}{\cos\theta}$, $r'=z\tan\theta$.

Donc

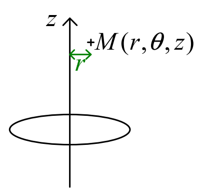
$$E_z=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\alpha}\frac{\cos^2\theta}{z^2}\times 2\pi z\tan\theta\frac{z}{\cos^2\theta}\cos\theta d\theta=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\alpha}\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

(Pour $z>0$)

Si $z>>R$, on a un champ proche de celui créé par une charge ponctuelle.

2) Champ au voisinage de l'axe



On a $E_r(r,\theta,z), E_\theta(r,\theta,z), E_z(r,\theta,z)$

On a une symétrie de révolution : donc V ne dépend que de r, z.

Donc $E_r(r,z), E_\theta=\frac{\partial V}{\partial\theta}=0, E_z(r,z)$

Champ à l'ordre 1 en r :

$$E_r(r,z)=E_r(0,z)+r\left(\frac{\partial E_r}{\partial r}\right)_{r=0}=0+r.\alpha(z)$$

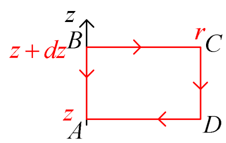
$$E_z(r,z)=E_r(0,z)+r\left(\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)_{r=0}=E_r(0,z)+r.\beta(z)$$

Première méthode :

En connaissant $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \\ \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\vec{0} \end{cases}$ (il n'y a pas de charge en *M*), on peut calculer α,β.

Autre méthode :

- Circulation de $\vec{E}$:



On a

$$\delta C = 0 = \underbrace{E_z(0,z)dz}_{AB} + \underbrace{\int_0^r r'\alpha(z+dz)dr'}_{BC} \underbrace{- E_z(r,z)dz}_{CD} \underbrace{- \int_0^r r'\alpha(z)dr'}_{DA}$$

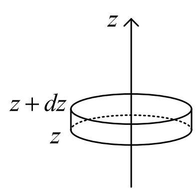
$$= \frac{1}{2}(\alpha(z+dz)-\alpha(z))r^2 - r\beta(z)dz$$

Donc $\frac{1}{2}\alpha'(z).r = \beta(z)$

Donc en considérant l'ordre 0, $\beta(z)=0$

(Attention : on ne peut pas écrire que $\alpha'(z)=0$ car le membre de droite ne correspond à un DL qu'à l'ordre 0 en *r*.)

- Flux de $\vec{E}$:



On a $\delta\phi = 0$

Soit $\pi.r^2(E_z(0,z+dz)-E_z(0,z)) + 2\pi r.dz \times E_r(r,z) = 0$ (au premier ordre)

Donc $\pi.r^2\frac{dE_z(0,z)}{dz}dz + 2\pi.r.dz \times E_r(r,z) = 0$

D'où $E_r(r,z) = \frac{-r}{2}\frac{dE_z(0,z)}{dz}$, puis $\alpha = \frac{-1}{2}\frac{dE_z(0,z)}{dz}$

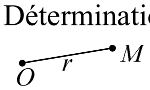
Remarque :

On n'a utilisé ici que des symétries de révolution pour appliquer le raisonnement (et le fait qu'il n'y a pas de charge là où on l'applique)

On verra que ce type de résultat s'applique aussi en magnétostatique.

VIII Complément

Détermination de la répartition de charge à partir du potentiel :



On suppose que $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{-r/a}$, où *q* et *a* sont des constantes.

1) Analyse

La répartition de charge possède une symétrie sphérique.

On pourrait utiliser la formule $\vec{\nabla}^2 V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$, mais il faut connaître $\vec{\nabla}^2$ en coordonnées sphériques ; on a peut-être aussi une répartition surfacique, qu'on ne pourrait pas trouver avec cette formule.

2) Champ *E*.

On a :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{-\partial V}{\partial r}\vec{u}_r = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} e^{-r/a}\left(\frac{-1}{r^2} - \frac{1}{ar}\right)\vec{u}_r$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} e^{-r/a}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar}\right)\vec{u}_r$$

3) Calcul de $\phi(r)$.

On a $\phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} e^{-r/a}\left(1 + \frac{r}{a}\right)$ $(= E_r \times 4\pi . r^2)$

4) Calcul de ρ.

On a $\phi(r + dr) - \phi(r) = \frac{4\pi . r^2 dr . \rho}{\varepsilon_0}$ (répartition de charge entre deux sphères de rayons *r* et *r*+*dr*)

Donc $\rho = \frac{\varepsilon_0}{4\pi . r^2}\frac{d\phi}{dr} = \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{ar} e^{-r/a}$

Problème :

On a trouvé que $\rho < 0$, et $\lim_{r \to +\infty} \phi(r) = 0$

Donc d'après le théorème de Gauss (dans « tout l'espace »), $\int_0^{+\infty} \rho = 0$

Ainsi, il y a forcément une charge ponctuelle en *O* (qui n'a pas été « détectée » par les sphères successives), qui compense ainsi exactement toute la distribution à l'extérieur.

5) Charge ponctuelle

On a $\lim_{r \to 0} \phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}$. On a donc une charge q en O, et une charge $-q$ répartie selon $\rho(r)$.

6) Commentaires

- On aurait très bien pu trouver des distributions surfaciques avec cette méthode (on aurait $d\phi = +\infty$ sur la surface)
- Cette répartition modélise l'atome d'hydrogène.
- Interaction forte :

Yukawa : l'énergie potentielle de l'interaction forte vaut
$U = \frac{-g^2}{r} e^{-r/a}$, où $\frac{g^2}{\hbar c} \approx 14{,}5$.